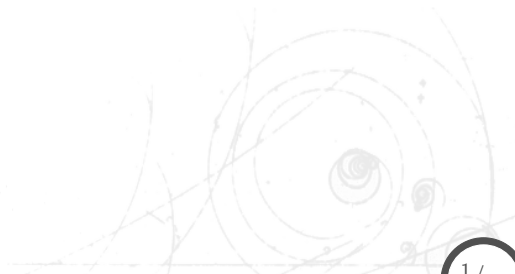


2. Pequeñas oscilaciones



Contenido: Tema 02

2. Pequeñas oscilaciones

2.1 Oscilador armónico

2.2 Oscilador armónico amortiguado

2.3 Oscilador armónico forzado

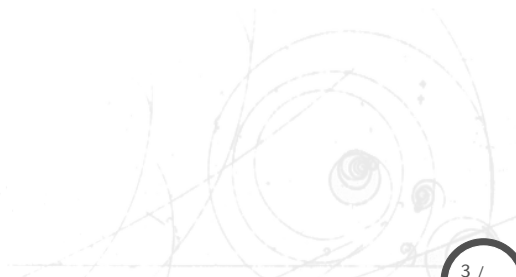
Contenido: Tema 02

2. Pequeñas oscilaciones

2.1 Oscilador armónico

2.2 Oscilador armónico amortiguado

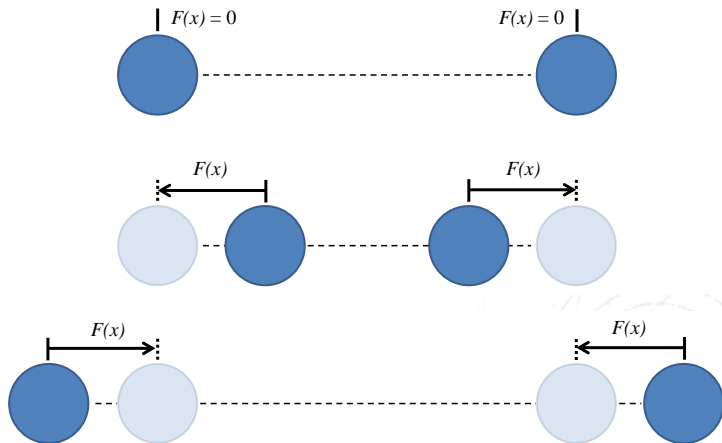
2.3 Oscilador armónico forzado



Oscilador armónico

Introducción

Considerando el movimiento **oscilatorio** de una partícula alrededor de un punto de equilibrio estable en donde $F = F(x)$,



Oscilador armónico

Introducción

En ese caso se puede expresar $F(x)$ como una **expansión** alrededor del punto de equilibrio $x = 0$,

$$\Rightarrow F(x) = F_0 + x \left(\frac{dF}{dx} \right)_0 + \frac{1}{2!} x^2 \left(\frac{d^2 F}{dx^2} \right)_0 + \frac{1}{3!} x^3 \left(\frac{d^3 F}{dx^3} \right)_0 + \dots$$

Tomando en cuenta las siguientes consideraciones:

- i) $F_0 \equiv F(x = 0) = 0$, por ser $x = 0$ definido como el **punto de equilibrio**.
- ii) $O(x^n) \approx 0 \forall n \geq 2$, si se consideran desplazamientos **pequeños**.

Entonces, se puede aproximar $F(x)$ como:

$$F(x) = -kx \quad \forall \quad k \equiv - \left(\frac{dF}{dx} \right)_0 \quad \& \quad k > 0.$$

en donde $F(x)$ representa una fuerza **restitutiva** que apunta siempre a la posición de equilibrio y se conoce como la **ley de Hooke**.

Oscilador armónico

Ecuación de movimiento

Relacionando la ley de Hooke con la 2da ley de Newton se tiene,

$$F = -kx \quad \& \quad F = ma \quad \Rightarrow \quad -kx = m\ddot{x},$$

por tanto,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \forall \quad \omega_0^2 \equiv k/m.$$

lo cual representa la ecuación diferencial de un **oscilador armónico**.

Las solución a la ec. anterior es una **función periódica** y se puede expresar de las siguientes maneras, todas ellas equivalentes:

$$x(t) = A \text{Cos} \omega_0 t + B \text{Sen} \omega_0 t,$$

$$x(t) = A \text{Cos}(\omega_0 t - \delta),$$

$$x(t) = A e^{i\omega_0 t} + B e^{-i\omega_0 t}.$$

Oscilador armónico

Energía cinética y potencial

Con la solución a la ecuación del oscilador armónico¹ se puede obtener la expresión de la **energía cinética**,

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad \forall \quad x(t) = A \text{Cos}(\omega_0 t - \delta),$$
$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \text{Sen}^2(\omega_0 t - \delta),$$
$$T = \frac{1}{2}kA^2 \text{Sen}^2(\omega_0 t - \delta) \quad \forall \quad k = m\omega_0^2.$$

Por otro lado, para obtener la **energía potencial**,

$$F = -\nabla U \quad \Rightarrow \quad F = -\frac{dU}{dx},$$
$$\therefore U = -\int F dx = \int kx dx = \frac{1}{2}kx^2,$$
$$U = \frac{1}{2}kA^2 \text{Cos}^2(\omega_0 t - \delta).$$

¹En cualquiera de sus formas.

Oscilador armónico

Energía total y propiedades fundamentales

Combinando los resultados anteriores para calcular la **energía total**,

$$E = T + U = \frac{1}{2}kA^2 \left[\text{Sen}^2(\omega_0 t - \delta) + \text{Cos}^2(\omega_0 t - \delta) \right],$$

$$E = T + U = \frac{1}{2}kA^2,$$

por tanto, para el caso de sistemas **oscilatorios** lineales, la energía total es proporcional al **cuadrado** de la amplitud.

Periodo

Es el intervalo de tiempo entre repeticiones sucesivas en la posición y dirección de movimiento,

$$\tau_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Frecuencia

$$\nu_0 = \frac{1}{\tau_0} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}},$$

$$\omega_0 = 2\pi\nu_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Oscilador armónico

Oscilador armónico en dos dimensiones

Para el caso de un oscilador **bidimensional**, se tiene que la fuerza es:

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{r},$$

lo cual se puede expresar en coordenadas polares como sigue:

$$F_x = -kr \cos\theta = -kx \quad \& \quad F_y = -kr \sin\theta = -ky,$$

en donde las ecuaciones de movimiento son,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \& \quad \ddot{y} + \omega_0^2 y = 0,$$

siendo las soluciones,

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t - \alpha) \quad \& \quad y(t) = B \cos(\omega_0 t - \beta),$$

en donde $\omega_0^2 = k/m$.

Oscilador armónico

Oscilador armónico en dos dimensiones

De las soluciones anteriores se puede obtener la ecuación de la **trayectoria** de la partícula eliminando t ,

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t - \alpha),$$

$$y(t) = B \cos(\omega_0 t - \beta),$$

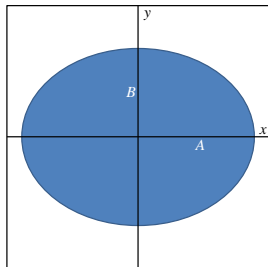
$$\Rightarrow A^2 B^2 \sin^2 \delta = B^2 x^2 - 2ABxy \cos \delta + A^2 y^2,$$

en donde $\delta = \alpha - \beta$.

$$\delta = \pm \pi/2$$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1,$$

lo cual representa la ecuación de una **elipse** ($A \neq B$).



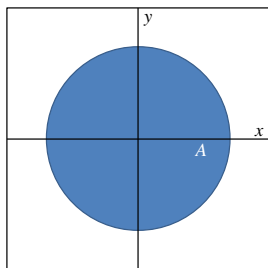
Oscilador armónico

Oscilador armónico en dos dimensiones

$$\delta = \pm\pi/2, A = B$$

$$x^2 + y^2 = A^2,$$

lo cual representa la ecuación de una **circunferencia**.



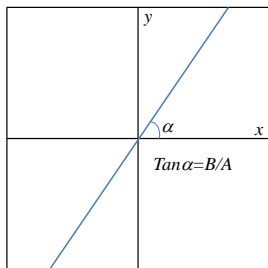
$$\delta = 0$$

$$B^2x^2 - 2ABxy + A^2y^2 = 0,$$

$$\Rightarrow (Bx - Ay)^2 = 0,$$

$$\therefore y = \frac{B}{A}x,$$

dando la ecuación de una **línea recta** con pendiente positiva.



Oscilador armónico

Oscilador armónico en dos dimensiones

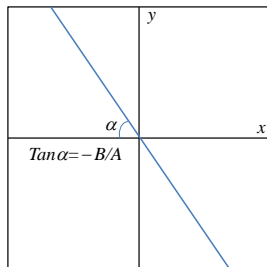
$$\delta = \pm\pi$$

$$B^2x^2 + 2ABxy + A^2y^2 = 0,$$

$$\Rightarrow (Bx + Ay)^2 = 0,$$

$$\therefore y = -\frac{B}{A}x,$$

siendo la ecuación de una **línea recta** con pendiente negativa.



Para todos los demás casos de valores de δ se tendrán **elipses** como curvas de trayectoria.

Oscilador armónico

Oscilador armónico en dos dimensiones: curvas de Lissajous

En el caso más general, en el cual las constantes de acoplamiento k_x y k_y son diferentes, las ecuaciones de movimiento serán:

$$x(t) = A \cos(\omega_x t - \alpha) \quad \forall \quad \omega_x = \sqrt{k_x/m},$$
$$y(t) = B \cos(\omega_y t - \beta) \quad \forall \quad \omega_y = \sqrt{k_y/m}.$$

La trayectoria ya no será una elipse, sino una **curva de Lissajous** y su forma dependerá de dos factores:

- i) La relación entre las **frecuencias** ω_x y ω_y .
- ii) La **diferencia de fases**: $\delta = \alpha - \beta$.

Frecuencias

T. cerrada : $\omega_x/\omega_y = p/q \quad \forall \quad q, p \in \mathbb{Z}$.

Ejem: $\omega_x/\omega_y = 3/4$.

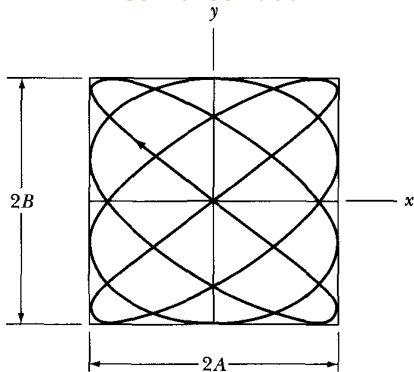
T. abierta : $\omega_x/\omega_y = p/q \quad \forall \quad q, p \notin \mathbb{Z}$.

Ejem: $\omega_x/\omega_y = 1.1/\pi$.

Oscilador armónico

Oscilador armónico en dos dimensiones: curvas de Lissajous

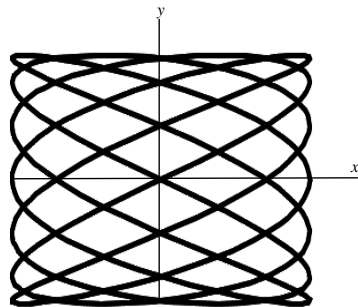
Curva cerrada



donde,

$$\omega_x = \frac{4}{3}\omega_y,$$
$$\delta = \alpha - \beta = 0.$$

Curva abierta



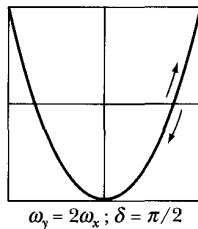
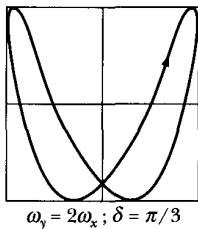
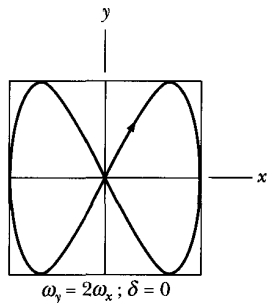
donde,

$$\omega_x = \frac{7.5}{4.3}\omega_y,$$
$$\delta = \alpha - \beta = 0.$$

Oscilador armónico

Oscilador armónico en dos dimensiones: curvas de Lissajous

Aun cuando se tienen **curvas cerradas**² la forma de éstas dependerá de manera importante en la **diferencia de fases** δ .

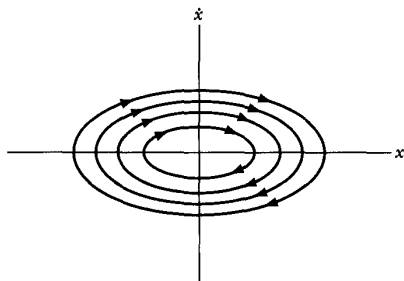


²Frecuencias conmensurables

Oscilador armónico

Diagramas de fase

Si se considera a $x(t)$ y $\dot{x}(t)$ como las coordenadas de un punto $P(x, \dot{x})$, entonces el plano que definen se conoce como **espacio fase**.



- x y \dot{x} definen el **espacio fase**.
- $P(x, \dot{x})$ es un **punto representativo** del espacio.

Propiedades

- Conforme t varía, $P(x, \dot{x})$ se mueve a lo largo de un **camino de fase** dado.
- Diferentes **condiciones iniciales** determinarán diferentes **caminos de fase**.
- El total de posibles caminos de fase representa el **diagrama de fase** del sistema.

Oscilador armónico

Diagramas de fase

Para el oscilador armónico unidimensional, se tiene:

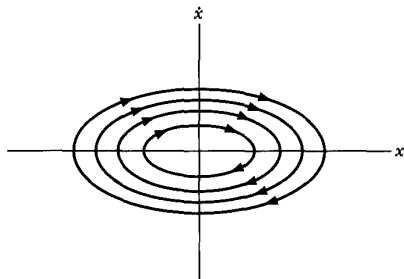
$$\begin{aligned}x(t) &= A \text{Sen}(\omega_0 t - \delta), \\ \Rightarrow \dot{x}(t) &= A\omega_0 \text{Cos}(\omega_0 t - \delta),\end{aligned}$$

eliminando t tal que se pueda obtener la ec. de la trayectoria o camino de fase,

$$\begin{aligned}x^2 &= A^2 \text{Sen}^2(\omega_0 t - \delta), \\ \dot{x}^2 &= A^2 \omega_0^2 \text{Cos}^2(\omega_0 t - \delta), \\ \therefore 1 &= \frac{x^2}{A^2} + \frac{\dot{x}^2}{A^2 \omega_0^2}.\end{aligned}$$

Recordando que $E = kA^2/2 = m\omega_0^2 A^2$ para un oscilador,

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2E/k} + \frac{\dot{x}^2}{2E/m} = 1,$$



en donde cada trayectoria corresponde a un valor definido de **energía total** del oscilador.

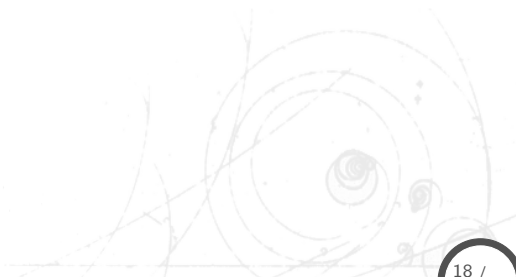
Contenido: Tema 02

2. Pequeñas oscilaciones

2.1 Oscilador armónico

2.2 Oscilador armónico amortiguado

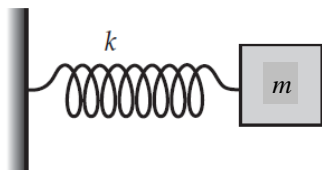
2.3 Oscilador armónico forzado



Oscilador armónico amortiguado

Planteamiento del problema

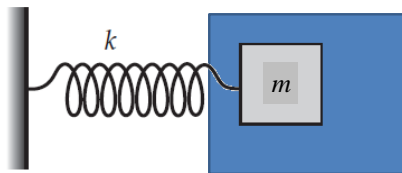
Oscilador libre



$$\begin{aligned} -kx &= F, \\ \Rightarrow -kx &= m\ddot{x}, \\ \therefore \ddot{x} + \omega_0^2 x &= 0, \end{aligned}$$

donde: $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

Oscilador amortiguado



$$\begin{aligned} -kx - b\dot{x} &= F \quad \forall b > 0, \\ \Rightarrow -kx - b\dot{x} &= m\ddot{x}, \\ \therefore \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x &= 0, \end{aligned}$$

donde: $\beta = b/2m$, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ y a $F = -b\dot{x}$ se le conoce como **fuerza de amortiguamiento**.

Oscilador armónico amortiguado

Solución de la ecuación de movimiento

La solución de la ecuación diferencial anterior,

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \forall \quad \beta = b/2m \quad \& \quad \omega_0 = \sqrt{k/m},$$

se propone como,

$$x = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}.$$

Probando la solución, se llega a que tiene la forma siguiente:

$$x(t) = e^{-\beta t} \left[Ae^{i(\omega_0^2 - \beta^2)^{1/2}t} + Be^{-i(\omega_0^2 - \beta^2)^{1/2}t} \right].$$

La naturaleza de la solución dependerá de la relación en el argumento de la exponencial:

$$\omega_0^2 - \beta^2,$$

la cual puede tener tres posibles escenarios:

$$\omega_0^2 > \beta^2, \quad \omega_0^2 = \beta^2, \quad \omega_0^2 < \beta^2.$$

Oscilador armónico amortiguado

Movimiento sub-amortiguado

En el caso en que:

$$\omega_0^2 > \beta^2 \Rightarrow \omega_1^2 = \omega_0^2 - \beta^2 > 0,$$

con lo cual se tiene que de la solución:

$$x(t) = e^{-\beta t} \left[A e^{i(\omega_0^2 - \beta^2)^{1/2} t} + B e^{-i(\omega_0^2 - \beta^2)^{1/2} t} \right],$$

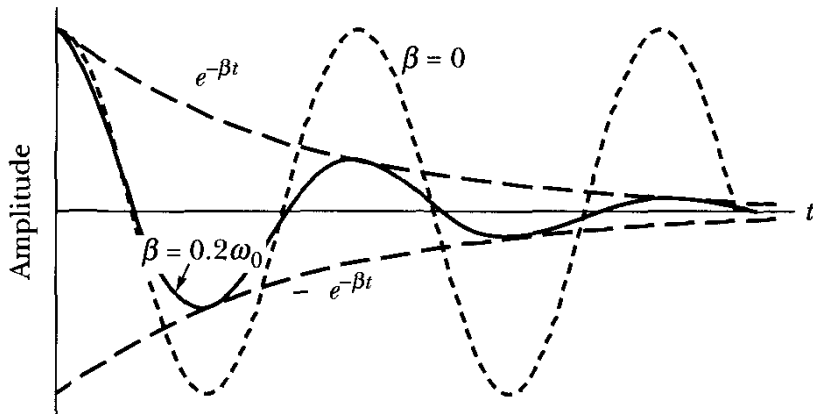
las funciones exponenciales serán **funciones armónicas**, y por tanto la solución será **oscilatoria decadente** debido a $e^{-\beta t}$,

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\beta t} \left[A e^{i\omega_1 t} + B e^{-i\omega_1 t} \right], \\ &= e^{-\beta t} \left[A \text{Cos}\omega_1 t + B \text{Sen}\omega_1 t \right], \\ &= e^{-\beta t} A \text{Cos}(\omega_1 t - \delta), \end{aligned}$$

en donde ω_1 se le conoce como la **frecuencia del oscilador amortiguado**, y el movimiento es **sub-amortiguado**.

Oscilador armónico amortiguado

Movimiento sub-amortiguado



Oscilador armónico amortiguado

Movimiento con amortiguamiento crítico

Para el caso cuando se tiene **amortiguamiento crítico**:

$$\omega_0^2 - \beta^2 = 0,$$

la solución de la ecuación de movimiento será,

$$x(t) = e^{-\beta t} \left[A e^{it(\omega_0^2 - \beta^2)^{1/2}} + B e^{-it(\omega_0^2 - \beta^2)^{1/2}} \right],$$
$$\Rightarrow x(t) = [A + B] e^{-\beta t} = C e^{-\beta t}.$$

Ambas funciones, inicialmente linealmente independientes³, ahora son **idénticas**, por tanto falta una solución que sea ind. a la original.

En estos casos, se propone una solución del tipo,

$$x_2(t) = t x_1(t) \quad \forall \quad x_1(t) \text{ solución de la ec. diferencial,}$$

por tanto, se tendrá que la solución es:

$$x(t) = [A + Bt] e^{-\beta t}.$$

³ $e^{-it\alpha}$ y $e^{it\alpha}$

Oscilador armónico amortiguado

Movimiento sobre-amortiguado

En el caso en que:

$$\omega_0^2 - \beta^2 < 0 \Rightarrow (\omega_0^2 - \beta^2)^{1/2} = i(\beta^2 - \omega_0^2)^{1/2}$$

por tanto, la solución será:

$$x(t) = e^{-\beta t} \left[A e^{it(\omega_0^2 - \beta^2)^{1/2}} + B e^{-it(\omega_0^2 - \beta^2)^{1/2}} \right],$$

$$x(t) = e^{-\beta t} \left[A e^{-t(\beta^2 - \omega_0^2)^{1/2}} + B e^{t(\beta^2 - \omega_0^2)^{1/2}} \right],$$

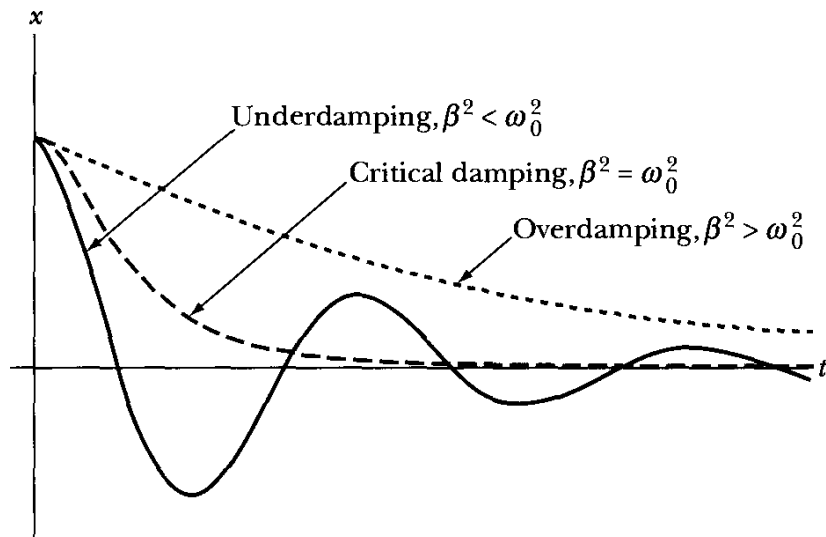
$$x(t) = e^{-\beta t} \left[A e^{-\omega_2 t} + B e^{\omega_2 t} \right],$$

donde $\omega_2 = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$, lo cual arroja una solución que decae **totalmente** con el tiempo⁴, sin ningún tipo de movimiento oscilatorio asociado.

⁴ya que $\beta > \omega_2$.

Oscilador armónico amortiguado

Movimiento sobre-amortiguado



Oscilador armónico amortiguado

Diagrama de fase: Oscilador sub-amortiguado

Recordando que para el oscilador sub-amortiguado,

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

$$\forall x = Ae^{-\beta t} \text{Cos}(\omega_1 t - \delta),$$

con $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \in \mathbb{R}$.

Entonces. calculando \dot{x} ,

$$\dot{x} = -Ae^{-\beta t} [\text{Cos}(\omega_1 t - \delta) + \dots \\ \dots + \omega_1 \text{Sen}(\omega_1 t - \delta)].$$

Ahora, proponiendo:

$$u = \omega_1 x, \quad v = \beta x + \dot{x},$$

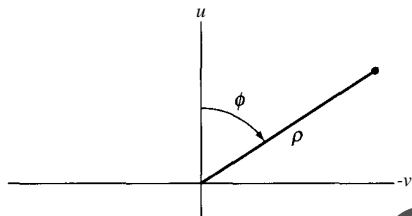
se obtiene,

$$u = \omega_1 A e^{-\beta t} \text{Cos}(\omega_1 t - \delta),$$

$$v = -\omega_1 A e^{-\beta t} \text{Sen}(\omega_1 t - \delta).$$

Lo cual, se puede representar en polares (con $\delta = 0$):

$$\rho = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad \phi = \omega_1 t$$



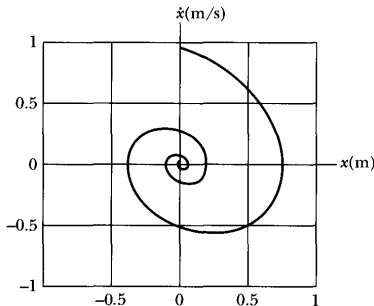
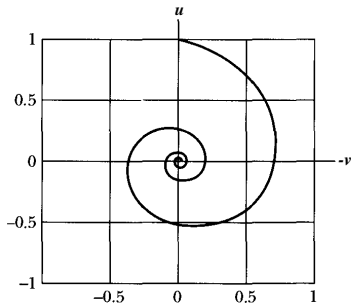
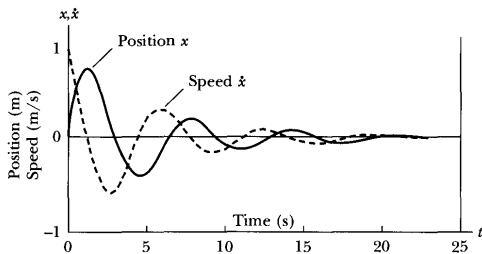
Oscilador armónico amortiguado

Diagrama de fase: Oscilador sub-amortiguado

Realizando el cambio de variables se llega a:

$$\rho = \omega_1 A e^{(-\beta/\omega_1)\phi},$$

lo cual representa la ec. de una **espiral logarítmica**.



Oscilador armónico amortiguado

Diagrama de fase: Oscilador sobre-amortiguado

En el caso **sobre-amortiguado** se tiene que la solución es:

$$x = e^{-\beta t} \left[A e^{-\omega_2 t} + B e^{\omega_2 t} \right] \quad \forall \quad \omega_2 = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \in \mathbb{R},$$

$$\Rightarrow \dot{x} = -\beta e^{-\beta t} \left[A e^{-\omega_2 t} + B e^{\omega_2 t} \right] + \omega_2 e^{-\beta t} \left[-A e^{-\omega_2 t} + B e^{\omega_2 t} \right],$$

relacionando las expresiones se tiene,

$$\dot{x} = -\beta x + \omega_2 e^{-\beta t} \left[A e^{-\omega_2 t} + B e^{\omega_2 t} - 2A e^{-\omega_2 t} \right],$$

$$\Rightarrow \dot{x} = -(\beta - \omega_2)x - 2A\omega_2 e^{-(\beta+\omega_2)t},$$

donde para $t \rightarrow \infty$ se tiene que $\dot{x} = -(\beta - \omega_2)x$.

También se pueden relacionar como:

$$\dot{x} = -\beta x - \omega_2 e^{-\beta t} \left[A e^{-\omega_2 t} + B e^{\omega_2 t} - 2B e^{\omega_2 t} \right],$$

$$\Rightarrow \dot{x} = -(\beta + \omega_2)x - 2B\omega_2 e^{-(\beta-\omega_2)t},$$

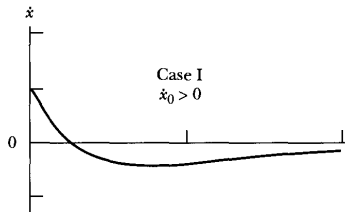
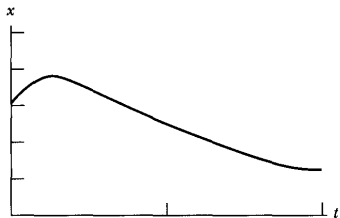
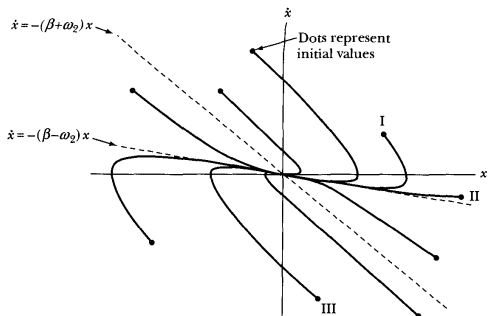
siendo que para $t \rightarrow \infty$ se llega al comportamiento de $\dot{x} = -(\beta + \omega_2)x$

Oscilador armónico amortiguado

Diagrama de fase: Oscilador sobre-amortiguado

Caso I: $x_0 > 0$ & $\dot{x}_0 > 0$

La partícula se alejará de la posición de equilibrio llegando a una x máx. y $\dot{x} = 0$, para luego invertir la dirección y dirigirse a $x = 0$.

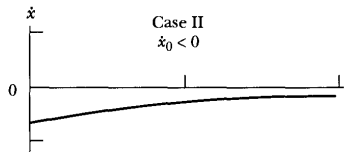
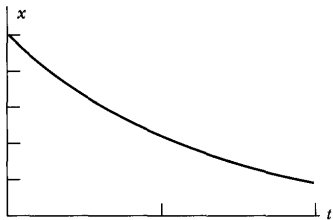
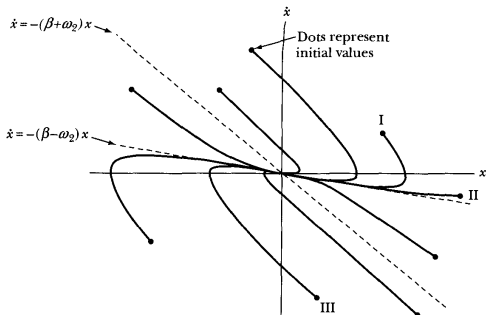


Oscilador armónico amortiguado

Diagrama de fase: Oscilador sobre-amortiguado

Caso II: $x_0 > 0$ & $\dot{x}_0 < 0$

La partícula tenderá a $x = 0$ de manera monótona, con $|\dot{x}|$ también decreciendo.

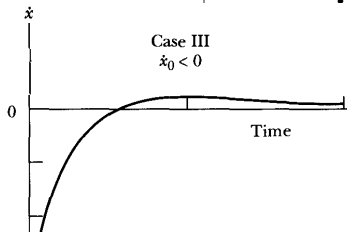
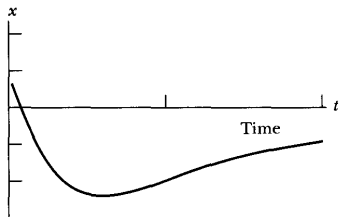
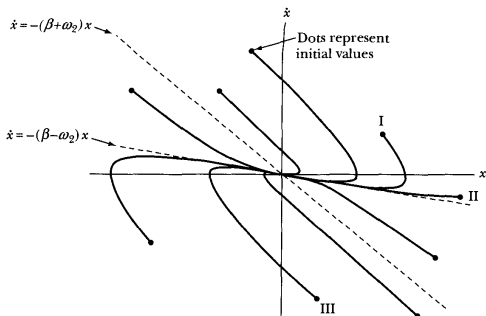


Oscilador armónico amortiguado

Diagrama de fase: Oscilador sobre-amortiguado

Caso III: $x_0 > 0$ & $\dot{x}_0 \ll 0$

La partícula tenderá a $x = 0$, pero al tener una velocidad tan grande, pasará de largo, acercándose a $x = 0$ ahora desde $x < 0$ de manera monótona y con $\dot{x} > 0$.



Oscilador armónico amortiguado

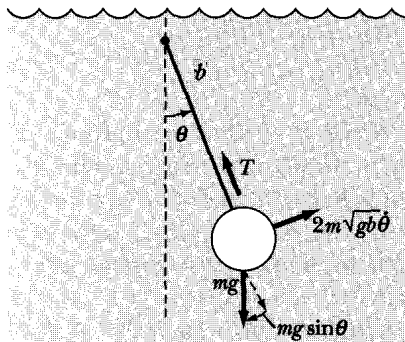
Ejemplo: Péndulo en un medio dispersivo

Considerando un péndulo de long. b y masa m en un medio dispersivo, cuya fuerza de resistencia es:

$$F_r = 2m\sqrt{g/b}(b\dot{\theta}),$$

con las siguientes condiciones iniciales,

$$\theta(0) = \alpha \quad \& \quad \dot{\theta}(0) = 0.$$



La ecuación de movimiento es:

$$\begin{aligned} -mg \text{Sen}\theta - 2m\sqrt{g/b}(b\dot{\theta}) &= m(b\ddot{\theta}), \\ \Rightarrow \ddot{\theta} + 2\sqrt{g/b}\dot{\theta} + (g/b)\theta &= 0. \end{aligned}$$

Oscilador armónico amortiguado

Ejemplo: Péndulo en un medio dispersivo

Comparando el resultado anterior con la ecuación general de un oscilador amortiguado,

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$
$$\ddot{\theta} + 2\sqrt{g/b}\dot{\theta} + (g/b)\theta = 0,$$

entonces se tiene:

$$\beta = \sqrt{g/b} \quad \& \quad \omega_0^2 = g/b \quad \Rightarrow \quad \beta^2 = \omega_0^2,$$

por tanto se tiene el caso de un movimiento **críticamente amortiguado**, cuya solución es,

$$\theta(t) = (A + Bt)e^{-\beta t},$$
$$\Rightarrow \dot{\theta}(t) = (B - \beta A - \beta Bt)e^{-\beta t}.$$

Oscilador armónico amortiguado

Ejemplo: Péndulo en un medio dispersivo

Considerando las condiciones iniciales:

$$\theta(0) = \alpha \text{ \& } \dot{\theta}(0) = 0,$$

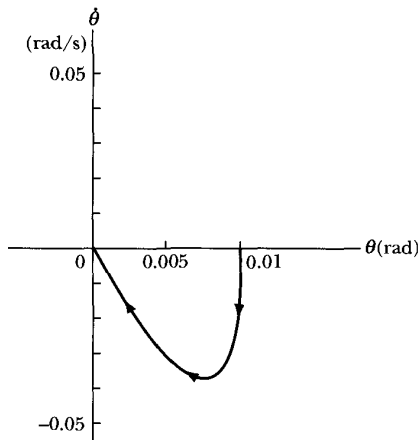
se tiene que:

$$A = \alpha \text{ \& } B = \beta\alpha,$$

por tanto,

$$\theta(t) = \alpha(1 + \sqrt{g/bt})e^{-\sqrt{g/bt}},$$

$$\dot{\theta}(t) = -\frac{\alpha g}{b}te^{-\sqrt{g/bt}}.$$

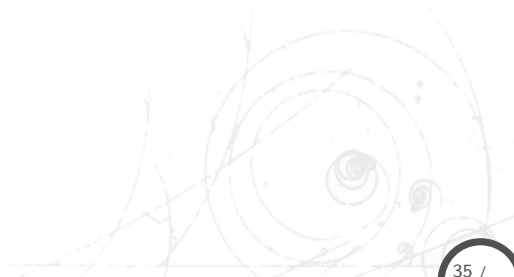


2. Pequeñas oscilaciones

2.1 Oscilador armónico

2.2 Oscilador armónico amortiguado

2.3 Oscilador armónico forzado



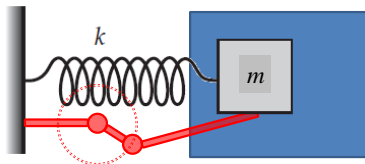
Oscilador armónico forzado

Fuerzas sinusoidales

El caso más simple de un oscilador armónico forzado es cuando se aplica una fuerza externa de tipo **sinusoidal** con frecuencia ω ,

$$F_{ext} = F_0 \text{Cos } \omega t.$$

Considerando un sistema armónico **amortiguado** y **forzado**:



donde la ecuación de movimiento en este sistema es,

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + b\dot{x} + kx &= F_0 \text{Cos } \omega t, \\ \Rightarrow \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x &= A \text{Cos } \omega t, \end{aligned}$$

donde $\beta = b/2m$, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, y $A = F_0/m$.

Oscilador armónico forzado

Solución de la ecuación de movimiento

La solución de la ecuación de movimiento consta de dos partes:

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t).$$

Función complementaria $x_c(t)$

Solución de la ecuación **homogénea**,

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

$$\forall x_c(t) = e^{-\beta t} \left[A e^{it(\omega_0^2 - \beta^2)^{1/2}} + B e^{-it(\omega_0^2 - \beta^2)^{1/2}} \right].$$

Función particular $x_p(t)$

Función que reproduce $F(t) = F_0 \text{Cos } \omega t$ en la ecuación de movimiento,

$$x_p(t) = D \text{Cos}(\omega t - \delta).$$

Oscilador armónico forzado

Solución de la ecuación de movimiento

Sustituyendo $x_p(t)$ propuesta en la ec. de movimiento, se obtiene:

$$x_p(t) = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}} \text{Cos}(\omega t - \delta),$$

$$\text{donde: } \delta = \text{Tg}^{-1} \left(\frac{2\omega\beta}{\omega_0^2 - \omega^2} \right),$$

siendo que δ representa la **diferencia de fase** entre la influencia de forzamiento y el movimiento resultante.

De la solución completa,

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t),$$

x_c representa la parte **atenuante** de la solución.

x_p representa el comportamiento **estacionario** del mov.

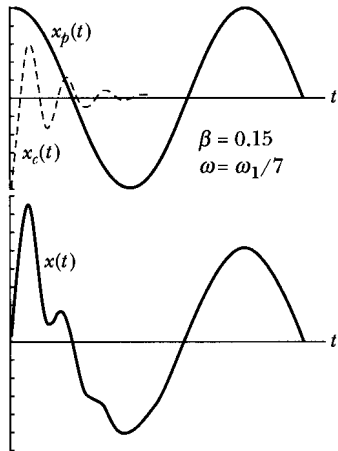
Por tanto se tiene:

$$\lim_{t \gg 1/\beta} x(t) \approx x_p(t).$$

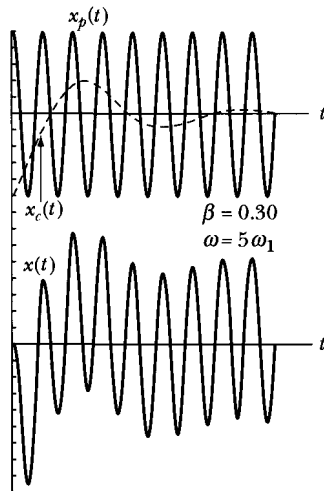
Oscilador armónico forzado

Movimiento oscilatorio con forzamiento y sub-amortiguamiento

$$\omega < \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$



$$\omega > \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$



Oscilador armónico forzado

Fenómenos de resonancia

Encontrando ahora la frecuencia $\omega = \omega_R$ tal que la amplitud de la **solución particular** x_p sea máxima:

$$D = \frac{A}{\sqrt{4\omega^2\beta^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}},$$
$$\Rightarrow \frac{dD}{d\omega} = -\frac{2A\omega}{[4\omega^2\beta^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2]^{3/2}} \left[\omega^2 - (\omega_0^2 - 2\beta^2) \right],$$

por tanto, se tiene que:

$$\frac{dD}{d\omega} = 0 \quad \iff \quad \omega = \omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2},$$

en donde ω_R se le conoce como **frecuencia de resonancia**, la cual será menor a medida que el amortiguamiento crezca.

Oscilador armónico forzado

Fenómenos de resonancia

Calculando el valor de la amplitud D :

$$\omega_0^2 > 2\beta^2 \Rightarrow \omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \Rightarrow D = \frac{A}{2\beta(\omega_0^2 - \beta^2)^{1/2}}$$

$$\omega_0^2 = 2\beta^2 \Rightarrow \omega_R = 0 \Rightarrow D = \frac{A}{\omega_0^2}$$

$$\omega_0^2 < 2\beta^2 \Rightarrow \omega_R = 0 \Rightarrow D = \frac{A}{\omega_0^2}$$

Cuando $\omega_0^2 \leq 2\beta^2$ se tiene que la amplitud decrecerá monótonamente desde $\omega = 0$:

$$D = \frac{A}{\sqrt{\omega_0^4 + \omega^4 + 2\omega^2(2\beta^2 - \omega_0^2)}}.$$

Oscilador armónico forzado

Fenómenos de resonancia

El grado de amortiguamiento se puede expresar en términos del **factor de calidad** Q ,

$$Q = \frac{\omega_R}{2\beta},$$

$$D = \frac{A}{\sqrt{4\beta^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}},$$

Si el factor β es pequeño $\Rightarrow Q$ crece, indicando que la amplitud D también:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} D = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

por tanto la **resonancia** será en

$$\omega_R = \omega_0.$$

