Contenido

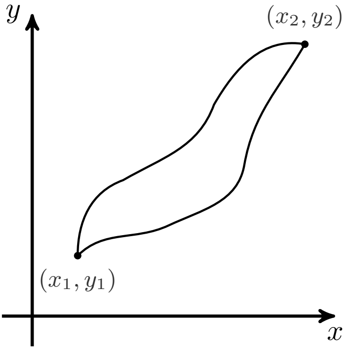
Contenido: Tema 03

Contenido: Tema 03

Definición y ecuaciones de Euler

Fundamentos

Considerando el siguiente problema básico,



x: variable independiente definida en el intervalo $[x_1, x_2]$.
$y(x)$: función de x definida en el mismo intervalo y diferenciable.

Donde se tiene la relación,

$$f = f[y(x), y'(x), x],$$

definida en una trayectoria $y(x)$ en el intervalo $[x_1, x_2]$ con:

$$y'(x) \equiv \frac{dy}{dx}.$$

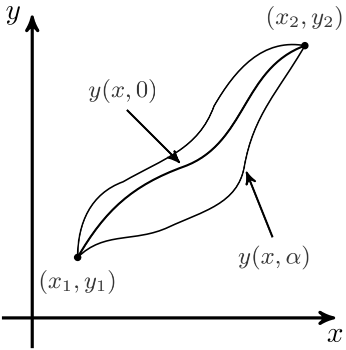
El objetivo fundamental es determinar $y(x)$ tal que

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f[y(x), y'(x), x] dx,$$

sea un **extremal**.

Definición y ecuaciones de Euler

Fundamentos



Sea $y(x, 0)$ la trayectoria **solución** y $y(x, \alpha)$ alguna trayectoria vecina tal que:

$$y(x, \alpha) = y(x, 0) + \alpha\eta(x),$$

en donde α es una cantidad infinitesimal y $\eta(x)$ satisface:

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0.$$

Para tal familia de curvas, J se puede expresar como,

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f[y(x, \alpha), y'(x, \alpha), x]dx,$$

con la condición de **extremal** dada como:

$$\left.\frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = 0,$$

para todas las $\eta(x)$ posibles.

Para determinar el resultado de la condición anterior, se calcula la diferencial de la integral $J(\alpha)$,

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f[y(x,\alpha), y'(x,\alpha), x]dx,$$
$$\Rightarrow \quad \frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \alpha}\right] dx.$$

Analizando el segundo término de la integral anterior,

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \alpha}dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial \eta}{\partial x}dx \ \ \forall \quad \frac{\partial y}{\partial \alpha} = \eta(x) \ \ \& \ \ \frac{\partial y'}{\partial \alpha} = \frac{\partial \eta}{\partial x},$$

por tanto,

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right] dx.$$

Definición y ecuaciones de Euler

Ecuación de Euler

De la expresión anterior, integrando el segundo término por partes:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial \eta}{\partial x} dx = \left. \frac{\partial f}{\partial y'} \eta(x) \right|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta(x) dx.$$ [1]

Ahora, debido a la condición de que la familia de curvas (representada por el parámetro α) debe pasar por (x_1, y_1) y (x_2, y_2), entonces $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, por tanto,

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right] \eta(x) dx,$$

con lo cual, la condición de **extremal** estará dada como:

$$\left. \frac{\partial J}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} dx \eta(x) \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right]_{\alpha=0} = 0.$$

[1] $\int u dv = uv - \int v du$

Definición y ecuaciones de Euler

Ecuación de Euler

Debido a que $\eta(x)$ es una función arbitraria, entonces $J(\alpha)$ será un **extremal** cuando:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0,$$

lo que se conoce como **ecuación de Euler**.

Además, se tiene que la cantidad:

$$d\alpha\eta(x) = d\alpha\frac{\partial y}{\partial \alpha} \equiv \delta y,$$

representa el corrimiento infinitesimal del recorrido alterno con respecto al recorrido correcto $y(x)$ en el punto x, por tanto corresponde a un **desplazamiento virtual**.

Esta notación se utiliza también para la **condición de extremal**,

$$d\alpha\frac{\partial J}{\partial \alpha} \equiv \delta J.$$

Definición y ecuaciones de Euler

Segunda forma de la ecuación de Euler

La ecuación de Euler,

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0$$

puede ser expresada de otra manera, partiendo del funcional $f(y, y', x)$:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}, \\ &= y'\frac{\partial f}{\partial y} + y''\frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{\partial f}{\partial x}, \end{aligned}$$

ahora, por otro lado, considerando:

$$\frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = y''\frac{\partial f}{\partial y'} + y'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right),$$

y restando ambas ecuaciones, se tiene:

$$\frac{df}{dx} - \frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = y'\frac{\partial f}{\partial y} - y'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) + \frac{\partial f}{\partial x}.$$

De la ecuación anterior se agrupan términos, para tener:

$$\frac{df}{dx} - \frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = y'\frac{\partial f}{\partial y} - y'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) + \frac{\partial f}{\partial x},$$

$$\frac{d}{dx}\left(f - y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial x} = y'\left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right],$$

donde se observa que el término de la derecha corresponde a la **ecuación de Euler**,

$$\left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right] = 0,$$

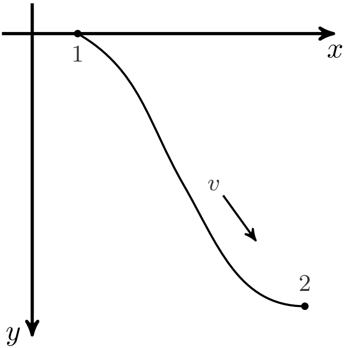
por tanto

$$\frac{d}{dx}\left(f - y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$

lo cual se conoce como **segunda forma** de la ecuación de Euler.

Definición y ecuaciones de Euler

Segunda forma de la ecuación de Euler: Braquistócrona



Si se parte del reposo y v es la velocidad a lo largo de la curva, entonces el t desde 1 hasta 2 es:

$$t_{1\to 2} = \int_1^2 dt = \int_1^2 \frac{ds}{v}.$$

Ahora, por conservación de energía, junto con $V(y=0)=0$, se tiene:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gy}.$$

Por tanto, sustituyendo en t,

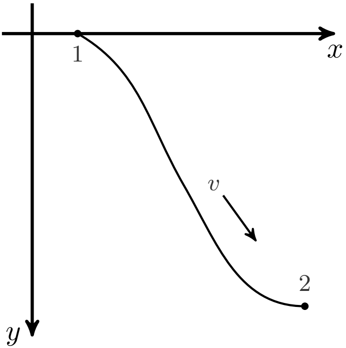
$$t_{1\to 2} = \int_1^2 \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \int_1^2 \sqrt{\frac{1+{y'}^2}{2gy}}\,dx,$$

identificando a $f(y,y',x)$ como el **funcional**:

$$f = \sqrt{\frac{1+{y'}^2}{2gy}}.$$

Definición y ecuaciones de Euler

Segunda forma de la ecuación de Euler: Braquistócrona



Se observa que f es ind. de x:

$$f(y, y') = \sqrt{\frac{1 + {y'}^2}{2gy}}.$$

Ahora, recordando la **segunda forma** de la ec. de Euler,

$$\frac{d}{dx}\left(f - y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}\left(f - y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0,$$

$$\Rightarrow \quad f - y'\frac{\partial f}{\partial y'} = \text{cte.}$$

Calculando y sustituyendo,

$$\sqrt{\frac{1 + {y'}^2}{2gy}} - \frac{{y'}^2}{\sqrt{2gy(1 + {y'}^2)}} = c,$$

reduciendo se obtiene,

$$y(1 + {y'}^2) = 2a \quad \forall \quad a = \text{cte.}$$

Reescribiendo:

$$y(1+y'^2) = 2a,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2ay - y^2}{y^2} = y'^2,$$

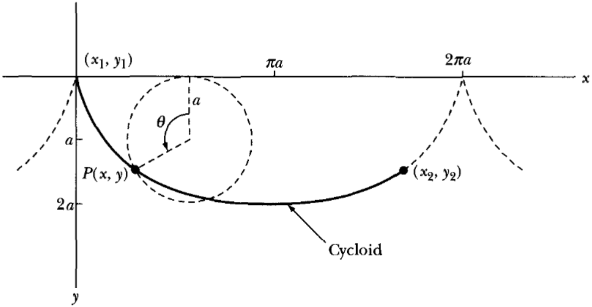
$$\therefore \quad \int \frac{y dy}{\sqrt{2ay - y^2}} = x,$$

haciendo un cambio de variables:

$$y = a(1 - \text{Cos}\,\theta),$$

$$\Rightarrow \quad x = a(\theta - \text{Sen}\,\theta),$$

lo que corresponde a las ecs. paramétricas de una **cicloide**.



Contenido: Tema 03

Generalizacion a varias variables, constricciones

Funcional con varias variables dependientes

Generalizando el prob. fundamental del cálculo de variaciones para el caso donde f es una función de muchas variables y_i y sus derivadas y_i':

$$\delta J = \delta \int_1^2 f(y_1(x), y_2(x), \ldots; {y'}_1(x), {y'}_2(x), \ldots; x)dx,$$

considerando que $J = J(\alpha)$ y que α etiqueta un set de curvas $y_i(x, \alpha)$:

$$\begin{aligned} y_1(x,\alpha) &= y_1(x,0) + \alpha\eta_1(x), \\ y_2(x,\alpha) &= y_2(x,0) + \alpha\eta_2(x), \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ y_i(x,\alpha) &= y_i(x,0) + \alpha\eta_i(x), \\ \vdots \quad & \quad \vdots \end{aligned}$$

y donde $y_1(x,0),\ y_2(x,0)$, etc., son las soluciones del problema extremal, mientras que $\eta_1,\ \eta_2$, etc., son funciones independientes arbitrarias (continuas y diferenciables) de x que se anulan en los puntos frontera.

Generalizacion a varias variables, constricciones

Funcional con varias variables dependientes

Calculando la variación de J,

$$\delta J = \int_1^2 \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial f}{\partial y_i'}\delta {y'}_i \right) dx,$$

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha}d\alpha = \int_1^2 \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial \alpha}d\alpha + \frac{\partial f}{\partial y_i'}\frac{\partial y_i'}{\partial \alpha}d\alpha \right) dx,$$

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha}d\alpha = \int_1^2 \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i}\eta_i(x) + \frac{\partial f}{\partial y_i'}\frac{d\eta_i(x)}{dx} \right) d\alpha dx,\text{[2]}$$

integrando por partes el segundo término,

$$\int_1^2 \frac{\partial f}{\partial y_i'}\frac{d\eta_i(x)}{dx}dx = \left.\frac{\partial f}{\partial y_i'}\eta_i(x)\right|_1^2 - \int_1^2 \eta_i(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i'}\right)dx,$$

$$= \int_1^2 \eta_i(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i'}\right)dx = \int_1^2 \frac{\partial y_i}{\partial \alpha}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i'}\right)dx.$$

[2] $\partial y_i/\partial\alpha = \eta(x)$, $\partial {y'}_i/\partial\alpha = d\eta_i(x)/dx$

Generalizacion a varias variables, constricciones

Funcional con varias variables dependientes

Sustituyendo lo anterior en la variación de J,

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} d\alpha = \int_1^2 \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_i'} \right) \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} d\alpha dx,$$

$$\Rightarrow \quad \delta J = \int_1^2 \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_i'} \right) \delta y_i dx,$$

aplicando la **condición extremal** $\delta J = 0$,

$$\int_1^2 \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_i'} \right) \delta y_i dx = 0,$$

debido a que las y_i's son var. **independientes** $\Rightarrow \delta y_i$ también lo son,

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y_i'} \right) = 0 \;\; \forall \;\; i = 1, 2, \ldots, n$$

la cual representa la generalización a varias variables de la **ecuación de Euler**.

Considerando el caso en el que,

$$f\left\{y_i, y_i', x\right\} = f(y, z, y', z', x)$$

por tanto, la cantidad a la cual se desea hallar su extremal será:

$$J = \int_1^2 f\left\{y_i, y_i', x\right\} dx = \int_1^2 f(y, z, y', z', x) dx,$$

aplicando la condición de extremal,

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_1^2 \left[\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial \alpha}\right] dx,$$

en donde,

$$\int_1^2 \frac{\partial f}{\partial \xi'}\frac{\partial \xi'}{\partial \alpha} dx = \int_1^2 \frac{\partial f}{\partial \xi'}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial \alpha} dx = \left.\frac{\partial f}{\partial \xi'}\frac{\partial \xi}{\partial \alpha}\right|_1^2 - \int_1^2 \frac{\partial \xi}{\partial \alpha}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi'}\right) dx$$

$$= -\int_1^2 \frac{\partial \xi}{\partial \alpha}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi'}\right) dx \quad \forall \;\; \xi = y,\, z.$$

Sustituyendo,

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_1^2 \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right] \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \left[\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right)\right] \frac{\partial z}{\partial \alpha} \right\} dx = 0.$$

Considerando ahora el caso en el que existe una relación de **constricción**,

$$g\left\{y_i, x\right\} = g(y, z, x) = 0,$$

las variaciones $\partial y/\partial\alpha$ y $\partial z/\partial\alpha$ ya no son **independientes**, por tanto las expresiones en $\partial J/\partial\alpha$ **no** se anulan término a término.

Para eliminar tal dependencia, se toma en cuenta la constricción,

$$\frac{dg}{d\alpha} = \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} = -\frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \alpha}$$

por tanto, sustituyendo;

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_1^2 \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right] - \left[\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right)\right] \frac{\partial g/\partial y}{\partial g/\partial z} \right\} \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx = 0.$$

De la ecuación anterior,

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_1^2 \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) \right] - \left[\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right) \right] \frac{\partial g/\partial y}{\partial g/\partial z} \right\} \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx = 0,$$

como $\partial y/\partial \alpha$ es una función **genérica** que multiplica a todo el integrando, se debe cumplir:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) \right] \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^{-1} = \left[\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right) \right] \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^{-1},$$

en donde el lado **izquierdo** incluye derivadas respecto y y y', mientras que el **derecho** derivadas respecto z y z', por lo que ambas deben ser iguales a una función de x solamente:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) \right] \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^{-1} = \left[\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right) \right] \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^{-1} = -\lambda(x).$$

Generalizacion a varias variables, constricciones

Constricciones

Reescribiendo lo anterior, se tiene:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) + \lambda(x)\frac{\partial g}{\partial y} = 0, \\
\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right) + \lambda(x)\frac{\partial g}{\partial z} = 0,
\end{aligned}
$$

siendo $g(y, z, x) = 0$ y en donde $\lambda(x)$ es una función por determinar, que se le conoce como **multiplicador de Lagrange**.

Generalizando el caso anterior para n variables y m constricciones, se tiene:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i'}\right) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(x)\frac{\partial g_j}{\partial y_i} = 0, \\
g_j\left\{y_i, x\right\} = 0,
\end{aligned}
$$

en donde $i = 1, 2, \ldots, n$ y $j = 1, 2, \ldots, m$.

Generalizacion a varias variables, constricciones

Constricciones isoperimétricas

Las constricciones **isoperimétricas** son aquellas en las cuales se requiere que la **integral** de una función dada $g(y, y', x)$ tenga un valor fijo K:

$$J = \int_1^2 f(y, y', x)dx \quad \forall \quad K = \int_1^2 g(y, y', x)dx,$$

en donde K representa, por tanto, una **constricción integral**.

Para resolver el problema se aplica el método de multiplicadores de Lagrange,

$$h(y, y', x) = f(y, y', x) + \lambda g(y, y', x),$$

en donde ahora se tiene un nuevo funcional h **libre** de constricciones:

$$H = \int_1^2 h(y, y', x)dx,$$

el cual arroja la siguiente ecuación de Euler **modificada**:

$$\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial h}{\partial y'}\right) = 0.$$