

ÁLGEBRAS GEOMÉTRICAS

Manuel Berrondo
Brigham Young University
Provo, UT, 84097
berrondo@byu.edu

Aplicaciones físicas:

- Mecánica: péndulo de Foucault
- Electro-magnetostática
- Dispersión y difracción E.M.
- Mecánica Cuántica: precesión spin
- Teoría de Campos: ecuación Dirac
- (Relatividad General)

Ejemplos de álgebras geométricas

- Números complejos $\mathbb{C}$
- Cuaterniones de Hamilton $\mathbb{H}$
- Álgebra de Pauli
- Álgebra de Dirac

Extensión del espacio vectorial

- inverso de un vector $\mathbf{A}^{-1}, \nabla^{-1}$
- reflexiones, rotaciones, transf. de Lorentz
- integrales: Cauchy (≥ 2 d), Stokes general

Basado en la idea de **MULTIVECTORES**:

$$\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_3 \dots$$

incluyendo métrica: $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2$

Producto geométrico o matricial

$$\mathbf{a} \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$$

$$\mathbf{b} \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$$

$$\mathbf{a} \mathbf{b} \neq \mathbf{b} \mathbf{a}$$

Propiedades Algebraicas $\mathbb{R}$

+

- cerradura
- conmutatividad
- asociatividad
- cero
- negativo
- y + distributividad

•

- cerradura
- conmutatividad
- asociatividad
- unidad
- recíproco

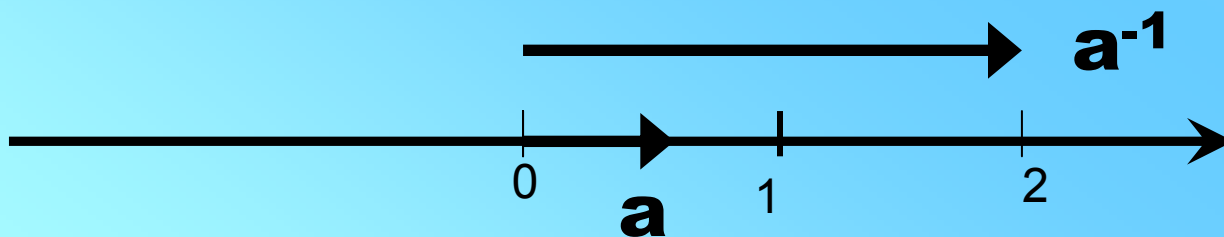
Espacios vectoriales: combin. lineales

Extensión a álgebras

- incluir métrica: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$
- definir producto geométrico

PRIMER PASO: Inverso de un vector $a \neq 0$

$$\mathbf{a}^{-1} = \frac{\hat{\mathbf{a}}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2} = \frac{\mathbf{a}}{a^2}, \quad a^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$$



Base ortonormal

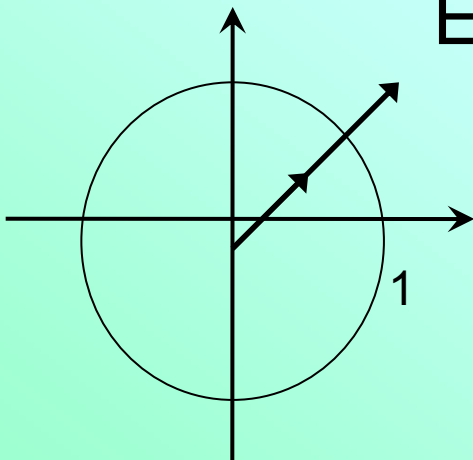
3d: $\hat{\mathbf{e}}_1 \quad \hat{\mathbf{e}}_2 \quad \hat{\mathbf{e}}_3$
 $\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_k = \delta_{ik}$

$\hat{\mathbf{e}}_i^{-1} = \hat{\mathbf{e}}_i$
 Euclidiano

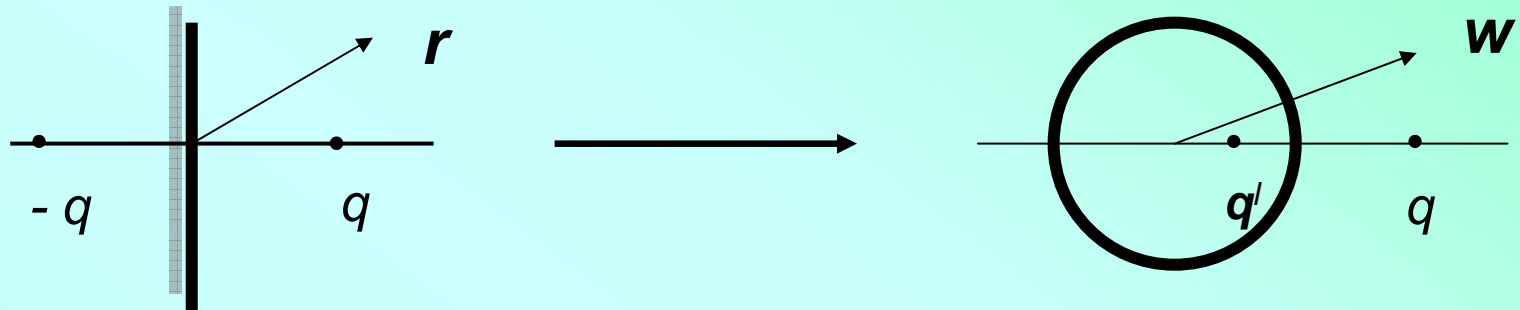
4d: $\gamma_0 \quad \gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \gamma_3$
 $\gamma_\mu \cdot \gamma_\nu = g_{\mu\nu} \Rightarrow (1, -1, -1, -1)$

Minkowski

Ejemplo: $(\hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{\mathbf{e}}_2)^{-1} = (\hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{\mathbf{e}}_2)/2$



Electrostática: método de imágenes



$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \hat{\mathbf{e}}_1 \rightarrow \frac{1}{\mathbf{r} + \hat{\mathbf{e}}_1} \rightarrow \frac{1}{\mathbf{r} + \hat{\mathbf{e}}_1} - \frac{\hat{\mathbf{e}}_1}{2} \rightarrow 2 \left(\frac{1}{\mathbf{r} + \hat{\mathbf{e}}_1} - \frac{\hat{\mathbf{e}}_1}{2} \right)$$

Plano: carga $-q$ en $c\hat{\mathbf{e}}_1$, imagen $(-q)$ en $-c\hat{\mathbf{e}}_1$

Esfera radio a , carga q en $b\hat{\mathbf{e}}_1$, encontrar imagen (?)

r	w	carga
0	a	$V = 0$
c	b	q
$-c$	$?$	$q' = ?$

Escalas en **r** y en **w** libres

$$\mathbf{w} = 2a \left(\frac{1}{\beta \mathbf{r} / c + \hat{\mathbf{e}}_1} - \frac{\hat{\mathbf{e}}_1}{2} \right)$$

$$V(\mathbf{w}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{|\mathbf{w} - b\hat{\mathbf{e}}_1|} - \frac{a}{b} \frac{q}{|\mathbf{w} - a^2\hat{\mathbf{e}}_1 / b|} \right]$$

SEGUNDO PASO: FÓRMULAS DE EULER

$$e^{i\hat{\mathbf{a}}} = \cos a + i\hat{\mathbf{a}} \operatorname{sen} a \quad (i\hat{\mathbf{a}})^2 = -1$$

$$e^{\hat{\mathbf{b}}} = \cosh b + \hat{\mathbf{b}} \operatorname{senh} b \quad \hat{\mathbf{b}}^2 = 1$$

En 3-d: $e^{\theta \hat{\mathbf{k}} \times} \mathbf{A}_{\perp} = (\cos \theta + \operatorname{sen} \theta \hat{\mathbf{k}} \times) \mathbf{A}_{\perp}$

dado que $\hat{\mathbf{k}} \times (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{A}_{\perp}) = -\mathbf{A}_{\perp}$

En general, girando $\mathbf{A}$ alrededor de $\theta \mathbf{k}$:

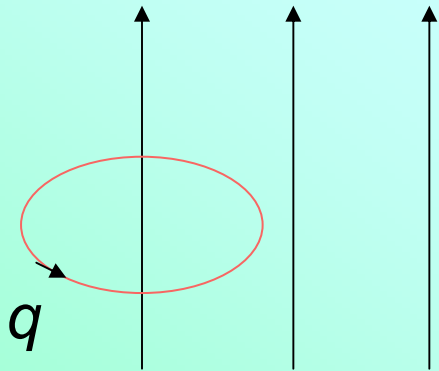
$$e^{\theta \hat{\mathbf{k}} \times} \mathbf{A} = \mathbf{A}'$$

Ejemplo 1: Ecuación de Lorentz

$$\theta = -\omega t \quad \mathbf{v}(t) = e^{-\omega t \hat{\mathbf{k}} \times} \mathbf{v}_0$$

Derivando: $\dot{\mathbf{v}}(t) = -\omega \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{v}(t)$

es solución de: $m\dot{\mathbf{v}} = -qB \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{v}$



$$\mathbf{B} = B \mathbf{k}$$

$$\hat{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{B}}{B}, \quad \omega = \frac{qB}{m}$$

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_{0\parallel} + \cos(\omega t) \mathbf{v}_{0\perp} - \sin(\omega t) \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{v}_{0\perp}$$

Ejemplo 2: Péndulo de Foucault

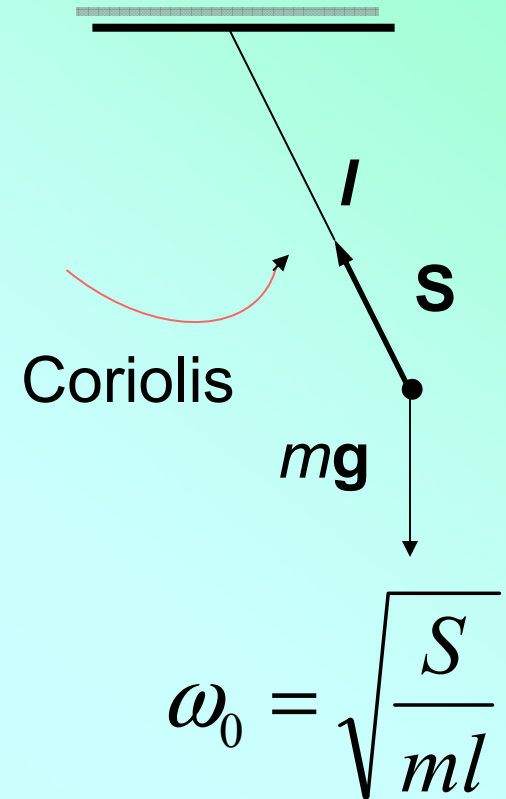
$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g} + \mathbf{S} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}$$

$$m\ddot{\boldsymbol{\rho}} \cong m\omega_0^2 \boldsymbol{\rho} - 2m\boldsymbol{\omega}_z \times \dot{\boldsymbol{\rho}}$$

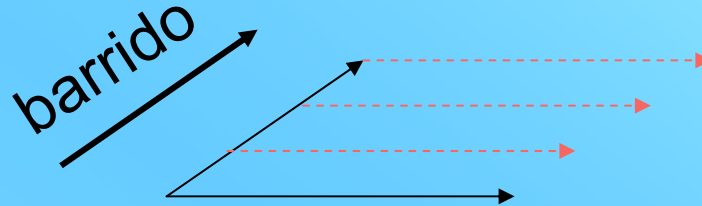
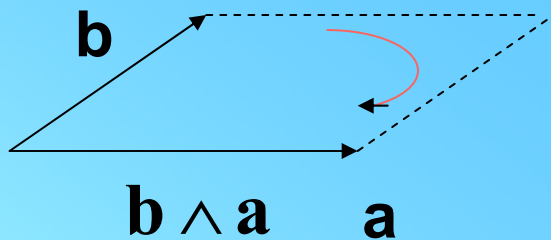
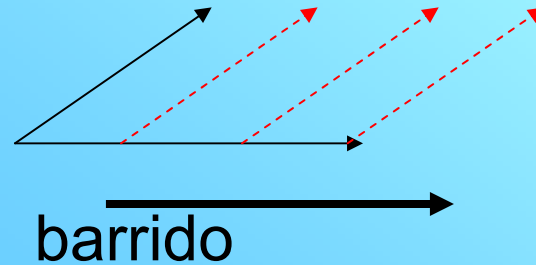
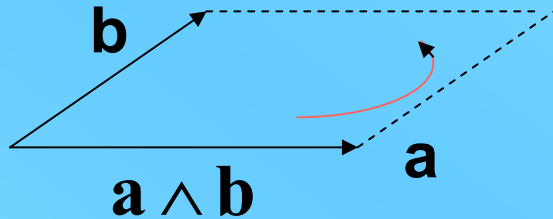
$$\alpha = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_z^2} \quad \omega_z = \omega \sin \lambda$$

$$\beta = -\omega_z \quad \omega = \frac{2\pi}{24h} \approx 7 \times 10^{-5} \text{ s}$$

$$\boldsymbol{\rho}(t) = e^{i\alpha t} e^{-\beta t \hat{\mathbf{k}} \times} \boldsymbol{\rho}_0$$



TERCER PASO: PRODUCTO ANTISIM.



- anticonmutativo
- asociativo
- distributivo
- valor absoluto = área

Producto geométrico o matricial

$$\mathbf{ab} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$$

$$\mathbf{ba} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$$

$$\mathbf{aa} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2$$

$$\mathbf{a}^{-1} = \frac{\mathbf{a}}{a^2}$$

- no conmutativo
- asociativo
- distributivo
- cerradura:
extender espacio vect.
- unidad 1
- inverso (condicional)

Ejemplos de álgebras de Clifford

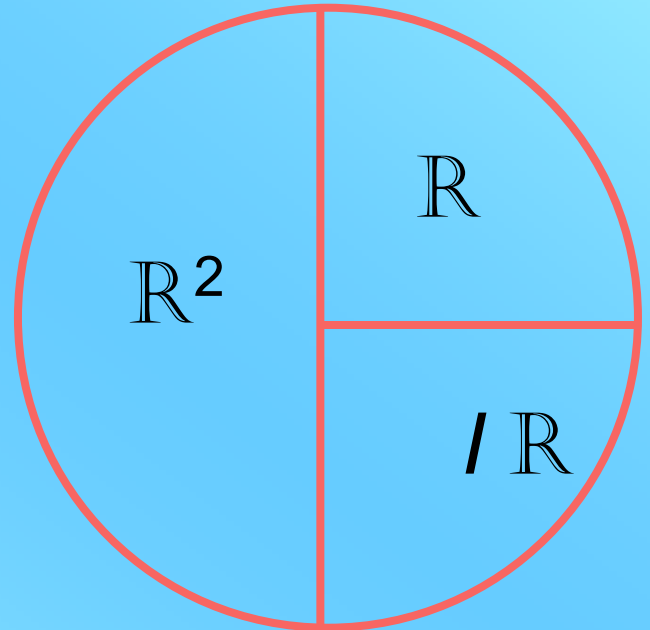
Notación	Geometría	Dim.
Cl_2	plano	4
$Cl_{0,1}$	complejos	2
$Cl_{0,2}$	cuaterniones	4
Cl_3	Pauli	8
$Cl_{1,3}$	Dirac	16
$Cl_{m,n}$	signatura (m,n)	2^{m+n}

1		escalar
$\hat{\mathbf{e}}_1$	$\hat{\mathbf{e}}_2$	vector
$\hat{\mathbf{e}}_1 \wedge \hat{\mathbf{e}}_2 = \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 = I$		bivector

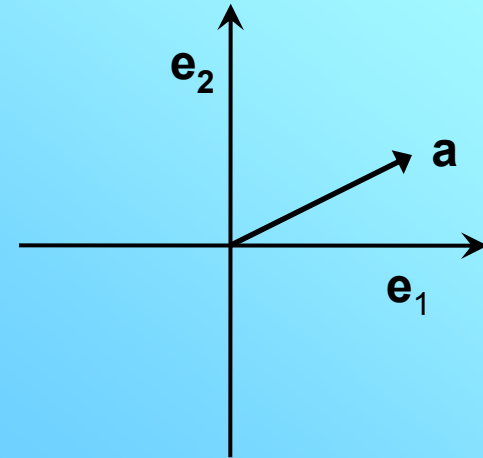
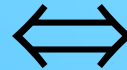
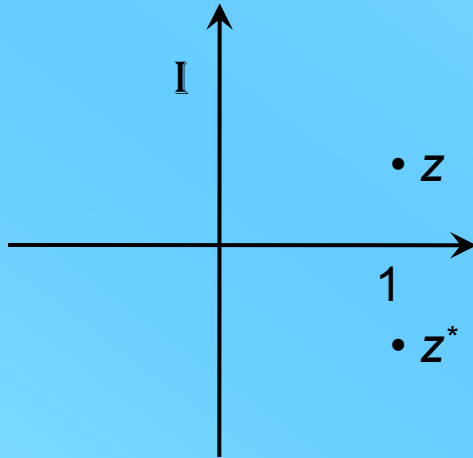
$$\{\hat{\mathbf{e}}_i, \hat{\mathbf{e}}_k\} = \hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_k + \hat{\mathbf{e}}_k \hat{\mathbf{e}}_i = 2\zeta_{ik}$$

$$I^2 = -1 \qquad I \mathbf{a} = -\mathbf{a} I$$

$\mathbb{C}$ = álgebra par = espinores



$\mathbb{C}$ isomorfo a $\mathbb{R}^2$



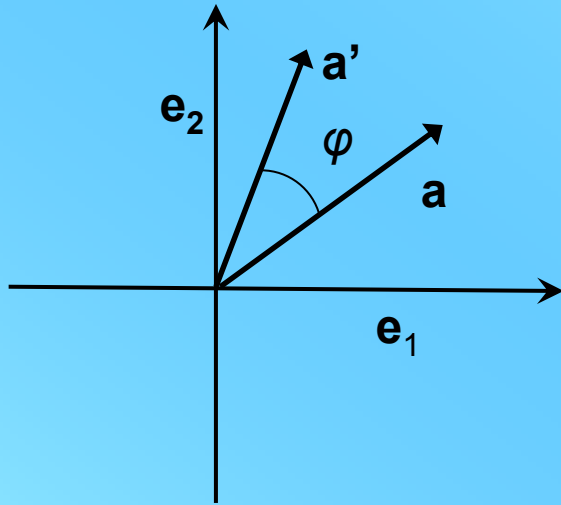
$$z = \hat{e}_1 a$$
$$\hat{e}_1 z = a$$

Reflexión: $z \rightarrow z^*$

$$a \rightarrow a' = \hat{e}_1 z^* = \hat{e}_1 a \hat{e}_1$$

En general, $a' = n a n$, con $n^2 = 1$

Rotaciones en $\mathbb{R}^2$



$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} e^{I\varphi} = e^{-I\varphi} \mathbf{a}$$

$$\mathbf{a}' = e^{-I\varphi/2} \mathbf{a} e^{I\varphi/2}$$

Euler:

$$e^{(\hat{e}_1 \hat{e}_2) \varphi} = \cos \varphi + \hat{e}_1 \hat{e}_2 \sin \varphi$$

Inverso de un multivector en Cl_2

Conjugado:

$$A = \alpha + \mathbf{a} + \beta I \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{A} = \alpha - \mathbf{a} - \beta I$$

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A \quad \text{escalar}$$

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{\tilde{A}A} = \frac{\tilde{A}}{A\tilde{A}}$$

Generalizando

$$\mathbf{a}^{-1} = \frac{\mathbf{a}}{a^2}$$

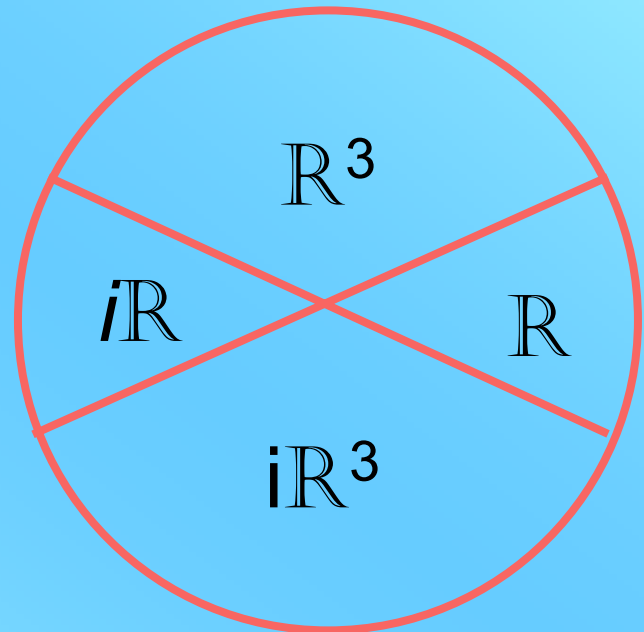
1			1	escalar
$\hat{\mathbf{e}}_1$	$\hat{\mathbf{e}}_2$	$\hat{\mathbf{e}}_3$	3	vector
$\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$	$\hat{\mathbf{e}}_3\hat{\mathbf{e}}_1$	$\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2$	3	bivector
$\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3 = i$			1	pseudoescalar

$$\{\hat{\mathbf{e}}_i, \hat{\mathbf{e}}_k\} = \hat{\mathbf{e}}_i\hat{\mathbf{e}}_k - \hat{\mathbf{e}}_k\hat{\mathbf{e}}_i = 2\mathcal{E}_{ik}$$

$$i^2 = -1 \quad \quad \quad i\mathbf{a} = \mathbf{a}i$$

$$\mathbb{H} = \mathbb{R} + i\mathbb{R}^3 =$$

= álgebra par = espinores



En Cl_3 , el producto geométrico:

$$\mathbf{ab} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = i \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -i \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$$

Rotaciones:

$$\mathbf{a} = \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}}\mathbf{a}) = \mathbf{a}_{\parallel} + \mathbf{a}_{\perp}$$
$$\mathbf{a}'_{\perp} = \mathbf{a}_{\perp} e^{i\hat{\mathbf{n}}\varphi} = e^{-i\hat{\mathbf{n}}\varphi} \mathbf{a}_{\perp}$$
$$\mathbf{a}' = e^{-\frac{1}{2}i\hat{\mathbf{n}}\varphi} \mathbf{a} e^{\frac{1}{2}i\hat{\mathbf{n}}\varphi}$$

$e^{B/2}$ genera rotaciones respecto al plano B ,
para el bivector B

Espinores

2-d	$\mathbb{C}$
3-d	$\mathbb{C} \times \mathbb{C}$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad \text{con matriz Pauli, } \boldsymbol{\sigma}$$

Pauli	Cl_3
$()$	$p_0 + i \mathbf{p} = p$
$\boldsymbol{\sigma}_k ()$	$\hat{\mathbf{e}}_k p \hat{\mathbf{e}}_3$
$j ()$	$i p \hat{\mathbf{e}}_3$
$j \boldsymbol{\sigma}_k ()$	$i \hat{\mathbf{e}}_k p$

Interacción de spin con campo magnético $\mathbf{B}$

- Hamiltoniano cuántico de Pauli:

$\mathbf{A}$ potencial vectorial

$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - q \mathbf{A}$, acoplamiento mínimo,

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 - \frac{q}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} + V$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

momento magnético: $\boldsymbol{\mu} = \gamma \mathbf{S} = \hbar\gamma \boldsymbol{\sigma}/2$

Precesión de spin con $\mathbf{B}$ uniforme:

En Cl_3 , espinor (cuaternión) Ψ ,

$$\dot{\Psi} = \frac{1}{2} \gamma B_k i \hat{\mathbf{e}}_k \Psi = \frac{1}{2} i \gamma \mathbf{B} \Psi$$

Solución en Cl_3 $\Psi(t) = e^{\frac{1}{2} i \gamma \mathbf{B} t} \Psi_0$

El spin precesde en el plano $i \mathbf{B}$ con frec. angular:

$$\omega_0 = \frac{1}{2} \gamma B \quad ; \text{ independiente de } \hbar !$$

1						1	
γ_0		γ_1		γ_2		γ_3	4
$\gamma_0 \gamma_1$	$\gamma_1 \gamma_2$	$\gamma_2 \gamma_3$	$\gamma_0 \gamma_2$	$\gamma_0 \gamma_3$	$\gamma_1 \gamma_3$	6	
$\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2$		$\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$		$\gamma_2 \gamma_3 \gamma_0$		$\gamma_0 \gamma_1 \gamma_3$	4
$\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$						1	

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu} \quad g = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$$

$$I = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \quad I^2 = -1 \quad I \gamma_\mu = -\gamma_\mu I$$

Los 6 bivectores se dividen en:

$$\hat{\mathbf{e}}_i = \gamma_i \gamma_0 \quad \text{e} \quad I \hat{\mathbf{e}}_k = \gamma_i \gamma_j$$

Relatividad especial y paravectores en Cl_3

- Paravector $p = p_0 + \mathbf{p}$

Ejemplos de paravectores:

x	$ct + \mathbf{r}$
u	$\gamma + \mathbf{u}$
p	$E + \mathbf{p}$
A	$\varphi + \mathbf{A}$
j	$\rho + \mathbf{j}$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}$$

Transformaciones de Lorentz

$$B = e^{\frac{1}{2}\mathbf{w}} = \cosh(\tfrac{1}{2} w) + \hat{\mathbf{w}} \sinh(\tfrac{1}{2} w)$$

$$R = e^{-\frac{1}{2}i\boldsymbol{\theta}} = \cos(\tfrac{1}{2} \theta) - i \hat{\boldsymbol{\theta}} \sin(\tfrac{1}{2} \theta)$$

transforman el paravector

$$p = p_0 + \mathbf{p} = p_0 + \mathbf{p}_= + \mathbf{p}_\perp \quad \text{en:}$$

$$B p B = B^2 (p_0 + \mathbf{p}_=) + \mathbf{p}_\perp$$

$$R p R^\dagger = p_0 + \mathbf{p}_= + R^2 \mathbf{p}_\perp$$

Cálculo Geométrico

∇ es un operador diferencial vectorial

$\varphi(\mathbf{r})$ – campo escalar

$\mathbf{E}(\mathbf{r})$ – campo vectorial

$$\begin{aligned}\nabla(\varphi + \mathbf{E}) &= \nabla \varphi + \nabla \cdot \mathbf{E} + \nabla \wedge \mathbf{E} = \\ &= \nabla \varphi + \nabla \cdot \mathbf{E} + i \nabla \times \mathbf{E}\end{aligned}$$

Funciones de Green de primer orden

$$\nabla^{-1} = \frac{\nabla}{\nabla^2}$$

$$\nabla^2 \left(-\frac{1}{4\pi r} \right) = \delta(\mathbf{r})$$

Para espacios euclidianos:

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{\Omega} \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} \quad \text{es solución de}$$

$$\nabla g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta^{(n)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

Inverso de paravectores diferenciales

$$\partial = \frac{\partial}{\partial t} + \nabla, \quad \partial^{-1} = \frac{\frac{\partial}{\partial t} - \nabla}{\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2}$$

Helmholtz:

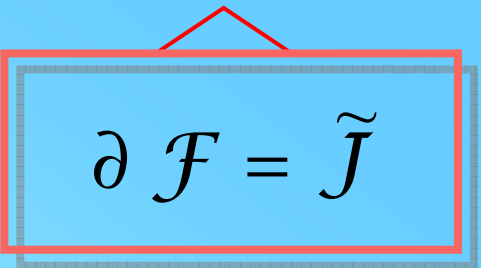
$$(\nabla - jk)^{-1} = \frac{\nabla + jk}{\nabla^2 + k^2}, \quad G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{-1}{4\pi} \frac{e^{\pm jkr}}{r}$$

onda esférica (saliente o entrante)

Ecuación de Maxwell

- Multivector de Maxwell $\mathcal{F} = \mathbf{E} + i c \mathbf{B}$
- paravector corriente $J = (\epsilon_0 c)^{-1}(c\rho + \mathbf{j})$

La ecuación de Maxwell se escribe como:


$$\partial \mathcal{F} = \tilde{J}$$

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \nabla \right) (\mathbf{E} + i c \mathbf{B}) = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho - c \mathbf{j})$$

Electrostática

Ley de Gauss. Solución usando la función de Green de primer orden

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad \mathbf{E} = \nabla^{-1} \left(\frac{1}{\epsilon_0} \rho \right) = \nabla \frac{1}{\nabla^2} \left(\frac{1}{\epsilon_0} \rho \right)$$

Explícitamente:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{x}') \mathbf{r}}{r^3} d\tau' \quad \text{con} \quad \mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$$

Magnetostática

Ley de Ampère. Solución usando la función de Green de primer orden:

$$\nabla \mathbf{B} = i\mu_0 \mathbf{j} \quad \mathbf{B} = i\mu_0 \frac{1}{\nabla^2} \nabla \mathbf{j} = -\mu_0 \nabla \times \frac{1}{\nabla^2} \mathbf{j}$$

Explícitamente:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}') \times \mathbf{r}}{r^3} d\tau' \quad \text{con} \quad \mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$$

Teorema Fundamental del Cálculo

- Caso Euclidiano:

dX = volumen orientado, p.ej. $\hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3$

dS = superficie orientada, p.ej. $\hat{e}_1 \hat{e}_2 = i\hat{e}_3$

$\mathcal{F}$ – multivector, ∂V – frontera de V

$$\int_V \mathcal{F} \dot{\nabla} dX = \oint_{\partial V} \mathcal{F} dS \qquad \int_V \dot{\nabla} dX \dot{G} = \oint_{\partial V} dS G$$

Caso general: proyección tangente, $\partial = P(\nabla)$

Ejemplo: teorema de Gauss

- $dX = d^3 x = i d\tau$, donde $d\tau = |d^3 x|$
- $dS = d^2 x = i \mathbf{n} da$, donde $da = |d^2 x|$
- $G = \mathbf{v}(\mathbf{r})$

$$\int_V \nabla \mathbf{v} i d\tau = \oint_{\partial V} \hat{\mathbf{n}} \mathbf{v} i da$$

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{v} d\tau = \oint_{\partial V} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} da$$

Teorema de Green (caso Euclidiano)

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}) = \frac{(-)^{n+1}}{I(\mathbf{x})} \int_V g(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dX' \nabla' \mathcal{F}(\mathbf{x}') + \\ - \frac{(-)^{n+1}}{I(\mathbf{x})} \oint_{\partial V} g(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dS' \mathcal{F}(\mathbf{x}')$$

- donde la función de Green de primer orden está dada por:

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{\Omega_n} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^n}$$

Teorema de Cauchy en n dimensiones

- Caso particular: $\mathcal{F} = f$ y $\nabla f = 0$

$$f(\mathbf{x}) = \frac{(-)^n}{I(\mathbf{x})} \oint_{\partial V} \frac{1}{\Omega_n} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^n} d^{n-1}\mathbf{x}' f(\mathbf{x}')$$

donde $f(\mathbf{x})$ es un campo multivectorial monogénico

Difracción electromagnética

- Ecuación de Helmholtz de primer orden:

$$\nabla \mathcal{F} = \tilde{\mathbf{J}} + jk\mathcal{F}$$

- Principio de Huygens exacto:

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}) = -\oint_S G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \hat{\mathbf{n}} \mathcal{F}(\mathbf{x}') da' \quad \text{para} \quad \mathcal{F} = \mathbf{E} + ic\mathbf{B}$$

para el caso homogéneo $\mathbf{J} = 0$

Ecuación de Dirac en $Cl_{1,3}$

- Vector en espacio de Minkowski:

$$\not{p} = p^0 \gamma_0 - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma}, \quad \text{con} \quad \not{p} \not{p} = (p^0)^2 - |\mathbf{p}|^2$$

- Cuantización:

$$\not{p} = j\hbar (\gamma_0 \partial_t - \boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla)$$

Propagador – función de Green 1er orden

- El propagador representa la amplitud de probabilidad condicional

$$(p - m) S_F(x - x') = \delta^{(4)}(x - x')$$

- Transformada de Fourier:

$$S_F(p) = \frac{1}{p - m + j\varepsilon}, \quad \lim(\varepsilon \rightarrow 0)$$

- Incluyendo campo externo A la ecuación de Dirac se escribe como:

$$(\not{p} - q\not{A} - m) S_F(x - x'; A) = \delta^{(4)}(x - x')$$

- y el propagador:

$$S_F(x, x') = \langle x | \frac{1}{\not{p} - q\not{A} - m + j\epsilon} | x' \rangle$$

da origen a la polarización del vacío

-

- **Referencias:**

- www.clifford.org

www.mrao.cam.ac.uk/~clifford

- modelingnts.la.asu.edu

-