

Ferroelectricidad: una visión general

Piezoelectricidad

# Piezoelectricidad



*Pierre Curie (1851-1906)*

## 1. Introducción.

- Historia.
- ¿Qué es la Piezoelectricidad? ¿En qué cristales se evidencia?
- Aplicaciones.

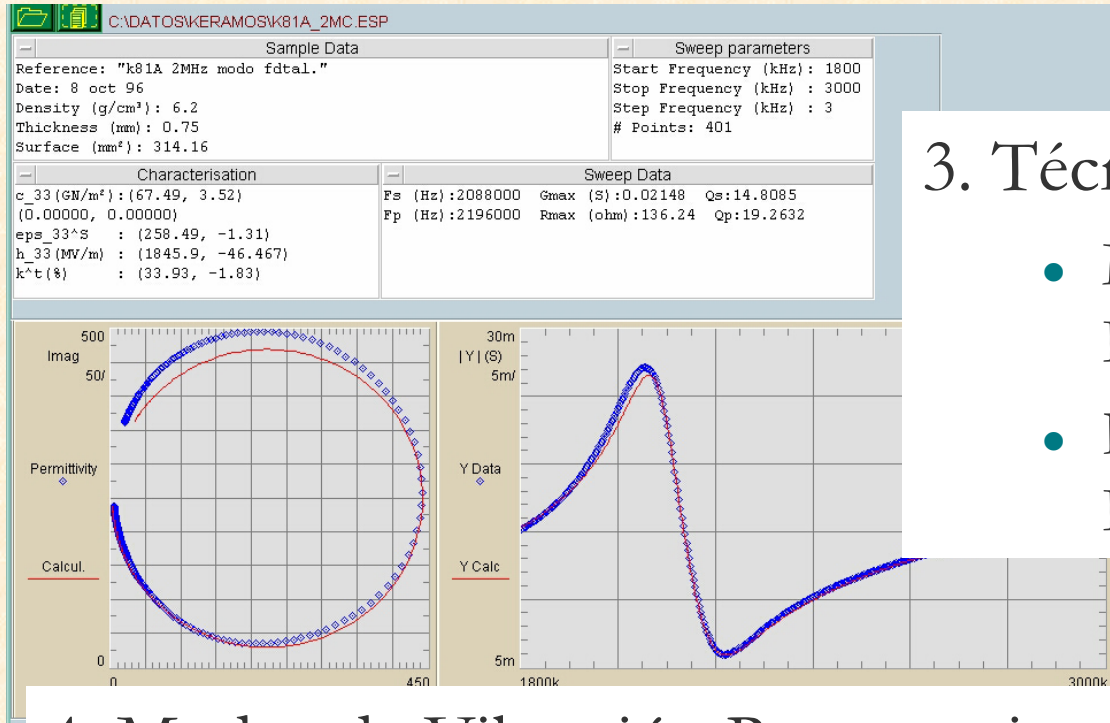
## 2. Termodinámica de la Piezoelectricidad.

- Notación: Magnitudes, Índices y Ejes.
- Ecuaciones Constitutivas. Coeficientes Piezoeléctricos.
- Factores de Acoplamiento Electromecánico.



*cuarzo*

# Piezoelectricidad



## 3. Técnicas de Caracterización.

- Método Resonante. Circuito Equivalente.
- Factor de Calidad Mecánico y Eléctrico.

## 4. Modos de Vibración. Resonancia y Antiresonancia.

- Condiciones Mecánicas y Eléctricas.

## 5. Electroestricción.

# Historia: 1880-1882

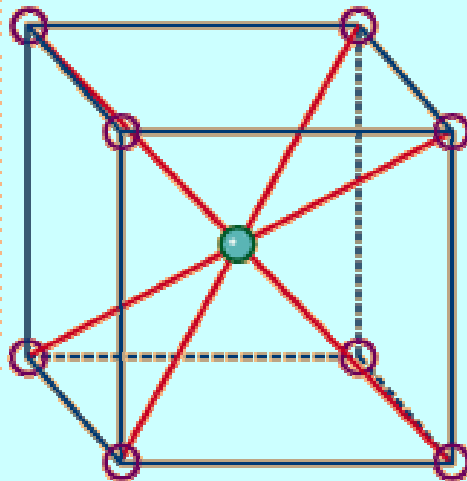


- 1880. Primera demostración experimental.
  - **piezoelectricidad** para distinguirla de la electricidad por contacto y de la piroelectricidad (Brewster 1824)
- 1881. Predicción del efecto inverso por Lippman
  - A partir sólo de principios termodinámicos.
- 1882. Confirmación de la existencia del efecto inverso

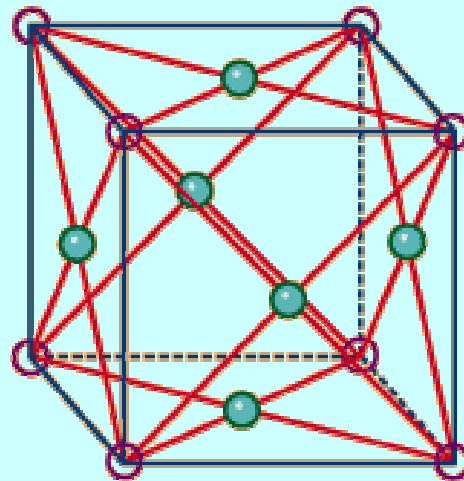


# Historia: 1882-1917

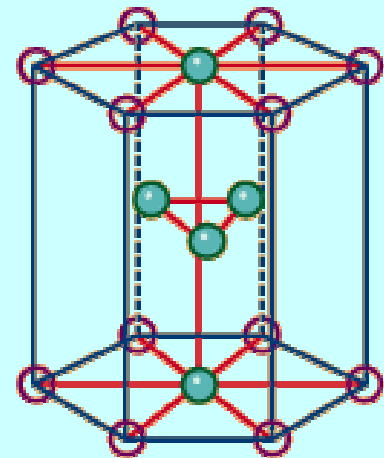
- Se manifiesta como una curiosidad de laboratorio.
- Se desarrolla la cristalografía.
- Se evidencian dificultades teóricas (tensores).



bcc



fcc



hcp

# Historia: 1917-1940

## Primera Generación de Aplicaciones

- 1917. Detector de submarinos por ultrasonidos (SONAR) Paul Langevin.
- Resonadores de cuarzo para la estabilización de frecuencias en la válvulas de vacío.
- Materiales para ecografía (detección de fallos en estructuras). Ensayos no destructivos. Holografía acústica.
- Barómetros para muy altas presiones, Medidores de vibraciones, impactos y acelerómetros.

# Historia: 1940-1965

## Segunda Generación de Aplicaciones Cerámicas Ferroeléctricas

- Avances en Materiales:
  - Cerámicas de  $\text{BaTiO}_3$  y de  $\text{PbZrO}_3$ .
  - Conocimiento de la relación estructura-propiedades.
  - Adición de dopantes para modificar las propiedades.
- Aplicaciones (mayormente bélicas):
  - Sonar (mejoras). Sistemas de detección de barcos.
  - Micrófonos y cápsulas de gramófonos.
  - Ignitores piezoeléctricos.
  - Resonadores. Diapasones sintonizables.
  - Interruptores piezoeléctricos.

# Historia: 1965-1980

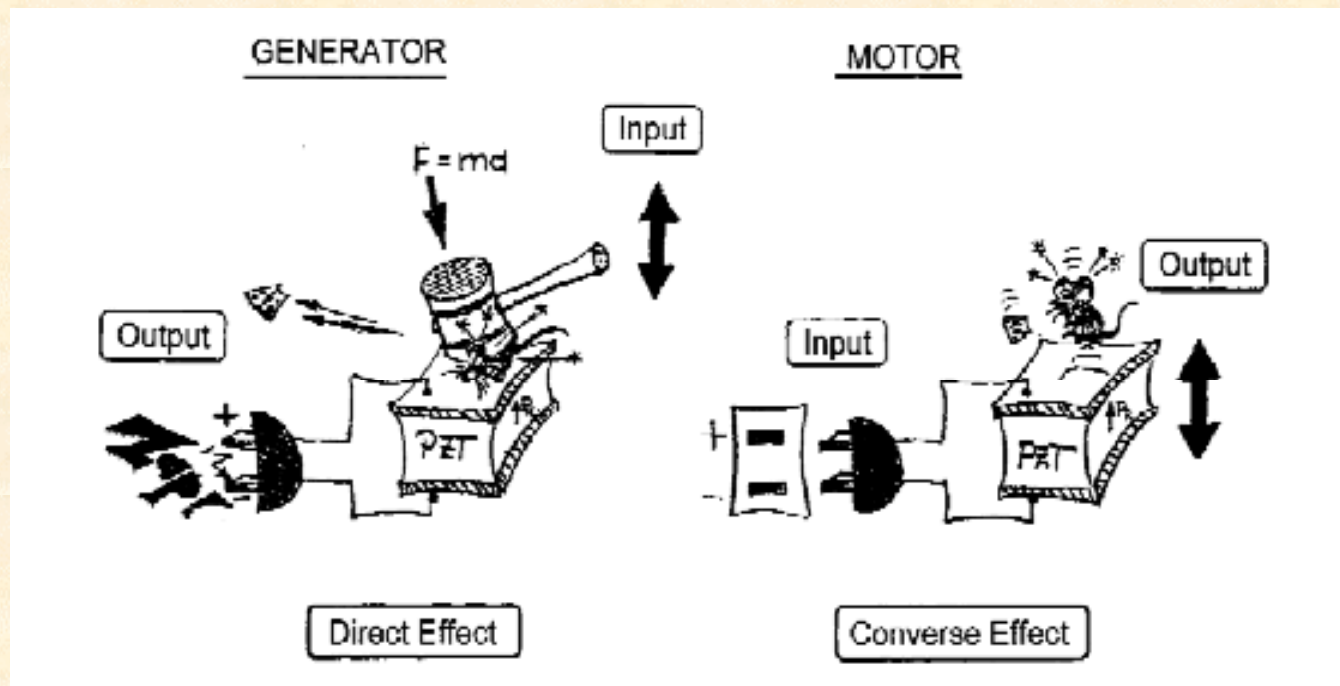
- Llegan los japoneses
  - Cambio de estrategia en E.U.A. Todos los desarrollos son secretos, en Japón se patenta y publica todo. Consecuencia: las empresas japonesas acaparan el mercado.
  - Nuevo conjunto de materiales: PZT.
  - Desarrollo de todo tipos de aplicaciones, no sólo militares.



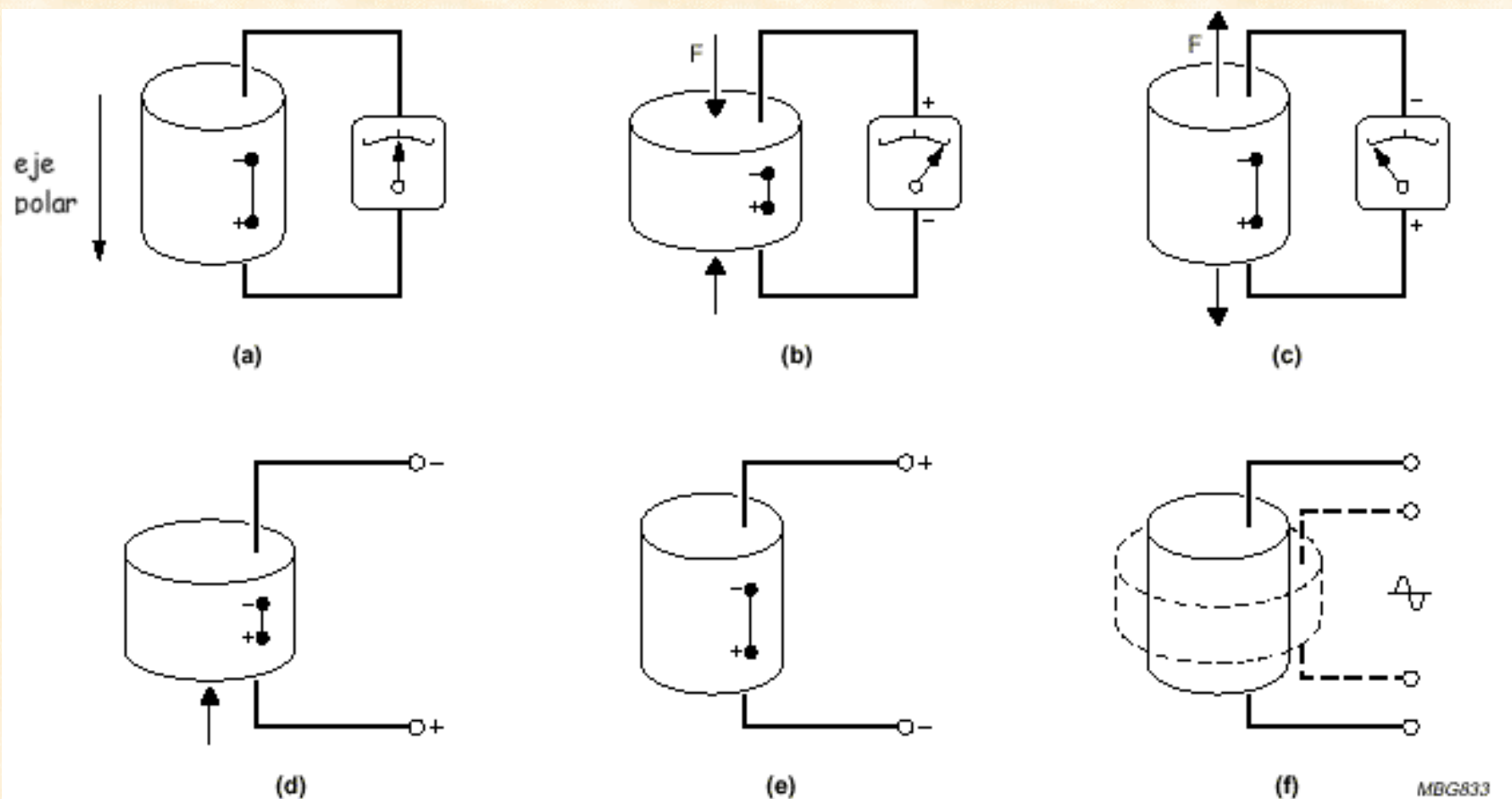
# Historia: 1980-...

- Desarrollo de nuevos tipos de materiales
  - Polímeros (PVDF, ...)
  - Composites.
- Nuevas aplicaciones
  - Micromáquinas

# ¿Qué es la Piezoelectricidad?



# ¿Qué es la Piezoelectricidad?



**Efecto piezoeléctrico sobre una muestra cilíndrica**

(de: Piezoelectric Ceramics, Introduction, Data Sheet of Philips Components, 1996)

# ¿En qué cristales se evidencia?

SISTEMA CRISTALINO	GRUPOS PUNTUALES
Triclínico $c < a < b; \alpha, \beta > 90^\circ$	1 (SCS) $\bar{1}$
Monoclínico $c < a; \beta > 90^\circ; \alpha = \gamma = 90^\circ$	2 (SCS) $m$ (SCS) $2/m$
Ortorrómbico $c < a < b; \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	222 (SCS) $mm2$ (SCS) $mmm$
Tetragonal $a = b; \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	4 (SCS) $\bar{4}$ (SCS), $4/m$ , 422 (SCS) $4mm$ (SCS), $\bar{4}2m$ (SCS), $4/mmm$
Trigonal $a = b = c; \alpha = \beta = \gamma \neq 90^\circ$	3 (SCS) $\bar{3}$ , 32 (SCS) $3m$ (SCS), $\bar{3}m$
Hexagonal $a = b \neq c; \alpha = \beta = 90^\circ; \gamma = 120^\circ$	6 (SCS) $\bar{6}$ (SCS), $6/m$ 622 (SCS), $6mm$ (SCS) $\bar{6}m2$ (SCS), $6/mmm$
Cúbico $a = b = c; \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	23 (SCS), $m\bar{3}$ 432 (SCS) $\bar{4}3m$ (SCS), $m\bar{3}m$



# Aplicaciones

## *Clasificación en función del efecto y de la forma temporal del estímulo*

<i>Forma del estímulo</i>	<i>Efecto directo</i>	<i>Efecto inverso</i>	<i>Ambos</i>
<b>Continuo</b>	Sensores de presión	Posicionadores	
<b>Periódico</b>	Micrófonos	Emisores de US	Transformadores
<b>Cuasiestático</b>	Ignitores, acelerómetros	Fusibles	

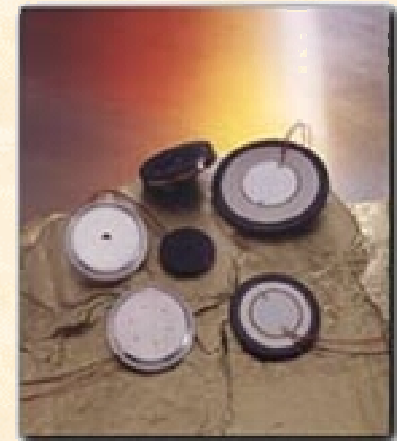
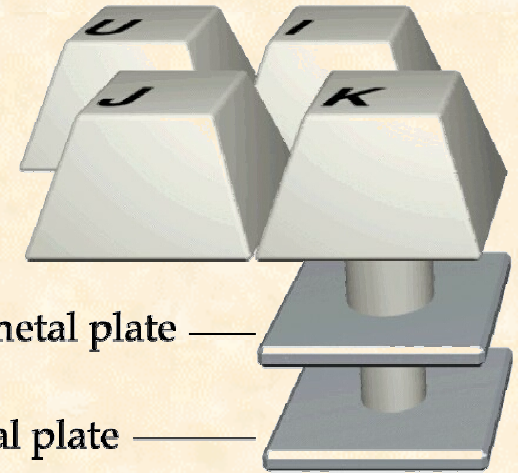
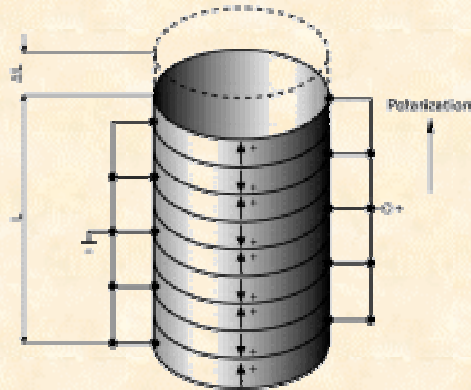
# Aplicaciones

- Generadores de alto voltaje
  - Ignitores de gas, encendedores, detonadores, lámparas de flash, transformadores piezoeléctricos
- Generadores ultrasónicos de alta potencia
  - Limpiadoras de US, sonar, ecolocalizadores, soldadura por US, taladradoras y cortadoras de US, pulverizadores
- Transductores de sonido y ultrasonidos en aire
  - Micrófonos, alarmas de intrusos, controles remotos, altavoces, generadores de audio en dispositivos de señales
- Sensores
  - Toca-discos, acelerómetros, sistemas de detección para maquinaria, equipamiento médico, vehículos

# Aplicaciones

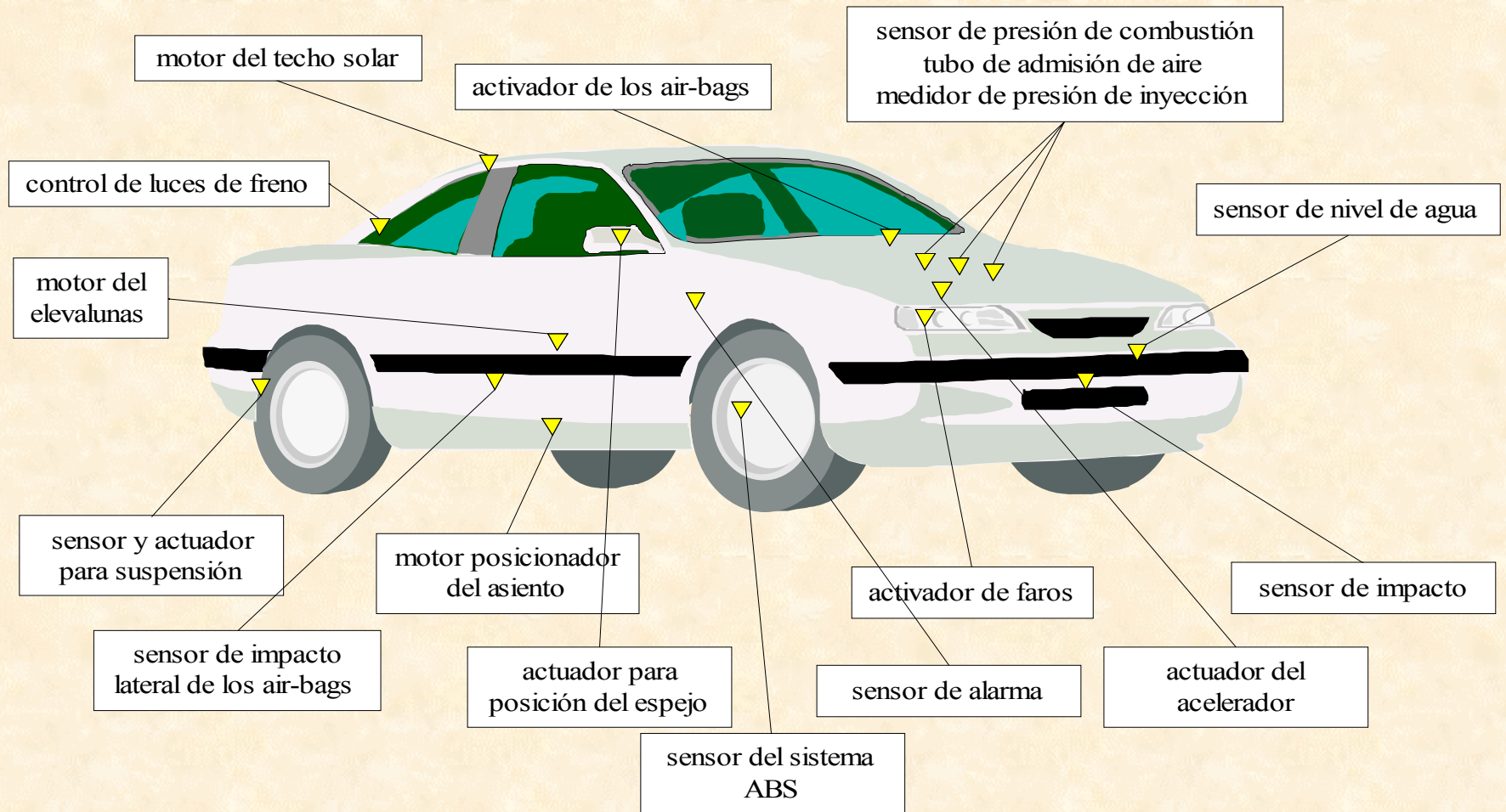
- Resonadores y filtros
  - Relojes, diapasones, filtros para radio y televisión, telecomunicaciones
- Líneas de retardo
  - Aparatos de televisión en color
- Pulsadores y teclados
  - Teléfonos, impresoras, máquinas de juegos, calculadoras, ordenadores
- Varios
  - Microposicionadores, cartuchos para impresoras de inyección, medidores de flujo

# Aplicaciones: Ilustraciones





# Ejemplo de aplicaciones



# Notación: Magnitudes

- Magnitudes involucradas:

- **Mecánicas:**  $T$ ,  $S$ ,  $c$ ,  $s$ ,  $\sigma^E$ .
- **Térmicas:**  $\theta$ ,  $\sigma$ .
- **Eléctricas:**  $E$ ,  $D$ ,  $P$ ,  $\epsilon_0$ ,  $\epsilon$ ,  $\beta$ .
- **Magnéticas:**  $B$ ,  $H$ ,  $\mu$ ,  $\lambda$ ,  $m$ .
- **Piezoeléctricas:**  $d$ ,  $g$ ,  $e$ ,  $h$ ,  $k$

# Notación: Magnitudes

Tipo	Denominación	Símbolo	Unidades
Mecánicas	Tensión	T (T-2)	Nm <sup>-2</sup> o Jm <sup>-3</sup>
	Deformación	S (T-2)	-
	Rigidez	c (T-4)	m <sup>2</sup> N <sup>-1</sup>
	Compliance elástica	s (T-4)	Nm <sup>2</sup>
	Módulo de Poisson	$\sigma^E$ (E)	-
Eléctricas	Campo Eléctrico	E (V)	Vm <sup>-1</sup>
	Desplazamiento Eléctrico	D (V)	Cm <sup>-2</sup>
	Polarización	P (V)	Cm <sup>-2</sup>
	Permitividad Dieléctrica	$\epsilon$ (T-2)	CN <sup>-1</sup> m <sup>-2</sup>
	Impermeabilidad Dieléctrica	$\beta$ (T-2)	C <sup>-1</sup> Nm <sup>2</sup>



# Notación: Magnitudes

Tipo	Denominación	Símbolo	Unidades
Térmicas	Temperatura	$\theta$ (E)	K
	Entropía	$\sigma$ (E)	$\text{JK}^{-1}\text{m}^{-3}$
Piezo- Eléctricas	Coef. Piezo de deformación	$d$ (T-3)	$\text{CN}^{-1}$ o $\text{mV}^{-1}$
	Coef. Piezo de tensión	$g$ (T-3)	$\text{m}^2\text{C}$ o $\text{VmN}^{-1}$
	Coef. Piezoelectrónico	$e$ (T-3)	$\text{NV}^{-1}\text{m}^{-1}$ o $\text{m}^2\text{C}^{-1}$
	Coef. Piezoelectrónico	$h$ (T-3)	$\text{NC}^{-1}$ o $\text{Vm}^{-1}$
	Factor de Acopl. E-M	$k$ (T-2)	-
Magnéticas	Inducción Magnética	$B$ (V)	T
	Campo Magnético	$H$ (V)	$\text{Am}^{-1}$
	Permeabilidad Magnética	$\mu$ (T-2)	$\text{TmA}^{-1}$
	Coef. Piezomagnético	$\lambda$ (T-3)	$\text{Tm}^2\text{N}^{-1}$
	Coef. Magnetodieléctrico	$m$ (T-3)	$\text{TmV}^{-1}$



# Notación: Índices

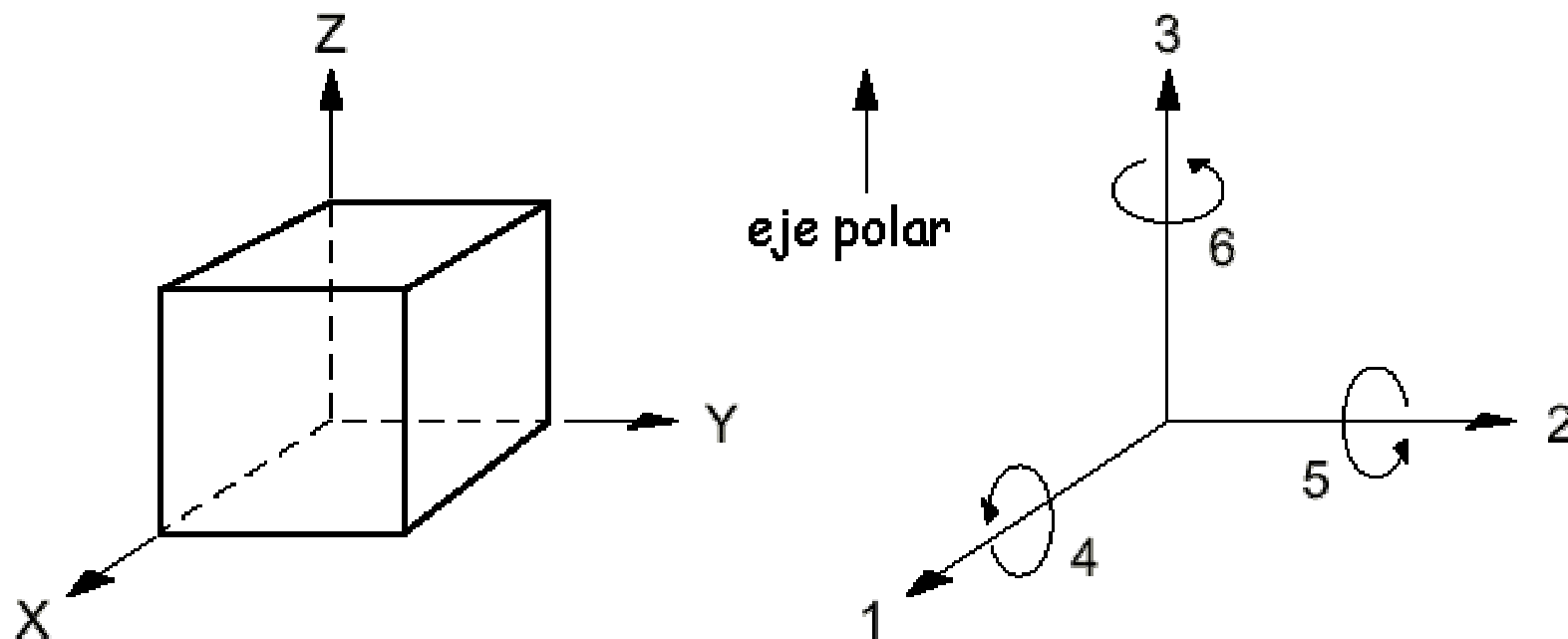
## ■ Subíndices.

- En las acciones y efectos indican dirección:
  - Magnitudes Eléctricas  $i, j = 1 \dots 3$  (dirección)
  - Acciones Mecánicas  $p, q = 1 \dots 6$  (para incluir cizallas)
- En los parámetros piezoeléctricos dos índices:
  - El primero indica la dirección de  $E$  o  $D$ .
  - El segundo las direcciones de  $T$  o  $S$ .

## ■ Superíndices.

- Indican condiciones de contorno:
  - $T$  = Tensión constante = Libre mecánicamente.
  - $S$  = Deformación constante = Bloqueo mecánico.
  - $E$  = Campo constante = Cortocircuito.
  - $D$  = Desplazamiento eléctrico constante = Circuito abierto.

# Notación: Ejes



Notación para los ejes en piezocerámicas

# Termodinámica de la Piezoelectricidad

- Reducción de índices

Manipular objetos de 4 índices es demasiado complejo.

Podemos comprimir la notación

$$ij \equiv i$$

$$ij \text{ ó } ji \equiv i$$

$$11 \equiv 1$$

$$23 \text{ ó } 32 \equiv 4$$

$$22 \equiv 2$$

$$31 \text{ ó } 13 \equiv 5$$

$$33 \equiv 3$$

$$12 \text{ ó } 21 \equiv 6$$



# Termodinámica de la Piezoelectricidad

$$W = S_{ij}T_{kl} + D_m E_n + B_m H_n$$

$i,j,k,l=1,\dots,6$        $m,n=1,\dots,3$

$$G = A - \theta\sigma = U - W - \theta\sigma$$

$$G = U - S_{ij}T_{kl} - D_m E_n - B_m H_n - \theta\sigma$$



# Ecuaciones Constitutivas

## Coeficientes Piezoeléctricos

Consideración: Variables independientes: T, E, H,  $\theta$ .

$$dG = -S_{ij}dT_{kl} - D_m dE_n - B_m dH_n - \sigma d\theta$$

Consideraciones:

- 1.- No existen efectos magnéticos en el fenómeno piezoeléctrico.
- 2.- Reducción de índices.

$$S_i = -\left(\frac{\partial G}{\partial T_i}\right)_{E,\theta} \quad D_m = -\left(\frac{\partial G}{\partial E_m}\right)_{T,\theta} \quad \sigma = -\left(\frac{\partial G}{\partial \theta}\right)_{T,E}$$

# Ecuaciones Constitutivas

## Coeficientes Piezoeléctricos

En forma diferencial:

$$dS_i = \sum_j \left( \frac{\partial S_i}{\partial T_j} \right)_{E,\theta} dT_j + \sum_n \left( \frac{\partial S_i}{\partial E_n} \right)_{T,\theta} dE_n + \left( \frac{\partial S_i}{\partial \theta} \right)_{T,E} d\theta$$

$$dD_m = \sum_j \left( \frac{\partial D_m}{\partial T_j} \right)_{E,\theta} dT_j + \sum_n \left( \frac{\partial D_m}{\partial E_n} \right)_{T,\theta} dE_n + \left( \frac{\partial D_m}{\partial \theta} \right)_{T,E} d\theta$$

$$d\sigma = \sum_j \left( \frac{\partial \sigma}{\partial T_j} \right)_{E,\theta} dT_j + \sum_n \left( \frac{\partial \sigma}{\partial E_n} \right)_{T,\theta} dE_n + \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \right)_{T,E} d\theta$$

# Ecuaciones Constitutivas

## Coeficientes Piezoeléctricos

$$s_{ij} = \left( \frac{\partial S_i}{\partial T_j} \right)$$

Complianza elástica

$$\varepsilon_{mn} = \left( \frac{\partial D_m}{\partial E_n} \right)$$

Permitividad dieléctrica

$$d_{mj} = \left( \frac{\partial D_m}{\partial T_j} \right) = \left( \frac{\partial S_j}{\partial E_m} \right)$$

Coeficiente piezoeléctrico

$$p_m = \left( \frac{\partial D_m}{\partial \theta} \right) = \left( \frac{\partial \sigma}{\partial E_m} \right)$$

Coeficiente piroeléctrico

$$\alpha_i = \left( \frac{\partial S_i}{\partial \theta} \right) = \left( \frac{\partial \sigma}{\partial T_i} \right)$$

Coeficiente de expansión térmica

$$c = \frac{\theta}{\rho} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \right)$$

Calor específico,  $\rho$ -densidad



# Ecuaciones Constitutivas

## Coeficientes Piezoeléctricos

$$S_i = \sum_j s_{ij}^{E,\theta} T_j + \sum_n d_{in}^{\theta} E_n + \alpha_i^E d\theta$$

$$D_m = \sum_j d_{mj}^{\theta} T_j + \sum_n \varepsilon_{mn}^{T,\theta} E_n + p_m^T d\theta$$

$$dQ = \theta d\sigma = \theta \sum_i \alpha_i^E T_i + \theta \sum_n p_m^T E_m + \rho c_p^E d\theta$$

$dQ=0$  - Caso isotérmico

Implicación:  $d\theta=0$  - Caso adiabático (supraíndice  $\sigma$ ). Se obtienen las Ecuaciones tipo D.

$$S_i = s_{ij}^E T_j + d_{in} E_n$$

$$D_m = d_{mj} T_j + \varepsilon_{mn}^T E_n$$



# Ecuaciones Constitutivas

## Coeficientes Piezoeléctricos

Consideración: Variables independientes:  $S$ ,  $D$ ,  $\sigma$ .

$$T_j = c_{ji}^D S_i + h_{jm} D_m$$

$$E_n = -h_{ni} S_i + \beta_{mn}^S D_m$$

Ecuaciones tipo H

$$c_{ij} = \left( \frac{\partial T_j}{\partial S_i} \right)$$

Rigidez

$$h_{jm} = - \left( \frac{\partial T_j}{\partial D_m} \right) = - \left( \frac{\partial E_n}{\partial S_i} \right)$$

Coeficiente piezoeléctrico

$$\beta_{nm} = \left( \frac{\partial E_n}{\partial D_m} \right)$$

Impermeabilidad dieléctrica

# Ecuaciones Constitutivas

## Coeficientes Piezoeléctricos

Consideración: Variables independientes:  $T$ ,  $D$ ,  $\sigma$ .

$$S_i = s_{ij}^D T_j + g_{im} D_m$$

$$E_n = -g_{nj} T_j + \beta_{nm}^T D_m$$

Ecuaciones tipo G

$$g_{im} = \left( \frac{\partial S_i}{\partial D_m} \right) = - \left( \frac{\partial E_n}{\partial T_j} \right) \quad e_{jn} = - \left( \frac{\partial T_j}{\partial E_n} \right) = \left( \frac{\partial D_m}{\partial S_i} \right)$$

Coeficientes piezoeléctricos

# Ecuaciones Constitutivas

## Coeficientes Piezoeléctricos

Consideración: Variables independientes:  $S$ ,  $E$ ,  $\sigma$ .

$$T_j = c_{ji}^E S_i - e_{jn} E_n$$

$$D_m = e_{mi} S_i + \epsilon_{mn}^T E_n$$

Ecuaciones tipo E



# Ecuaciones Constitutivas

## Coeficientes Piezoeléctricos

$$d_{nj} = \sum_m \varepsilon_{nm}^T g_{mj} = \sum_i e_{ni} s_{ij}^E$$

$$e_{nj} = \sum_m \varepsilon_{nm}^S h_{mj} = \sum_i d_{ni} c_{ij}^E$$

$$g_{nj} = \sum_m \beta_{nm}^T d_{mj} = \sum_i h_{ni} s_{ij}^D$$

$$h_{nj} = \sum_m \beta_{nm}^S e_{mj} = \sum_i g_{ni} c_{ij}^D$$



# Ecuaciones Constitutivas

## Coeficientes Piezoeléctricos

Cuando se considera la componente magnética:

$$B_m = - \left( \frac{\partial G}{\partial H_n} \right)_{E, T, \theta}$$

En la forma diferencial:

$$S_i = \sum_j s_{ij}^{E, \theta} T_j + \sum_n d_{in}^{\theta} E_n + \sum_n \lambda_{in}^{\theta} H_n + \alpha_i^E d\theta$$

$$D_m = \sum_j d_{mj}^{\theta} T_j + \sum_n \epsilon_{mn}^{T, \theta} E_n + \sum_n m_{in}^{\theta} H_n + p_m^T d\theta$$

$$dQ = \theta \sum_i \alpha_i^E T_i + \theta \sum_m p_m^T E_m + \theta \sum_n i_n H_n + \rho c_p^E d\theta$$

# Ecuaciones Constitutivas

## Coeficientes Piezoeléctricos

$$\lambda = \left( \frac{\partial B_m}{\partial T_j} \right) = \left( \frac{\partial S_i}{\partial H_n} \right)$$

Coeficiente piezomagnético

$$m = \left( \frac{\partial D_m}{\partial H_n} \right) = \left( \frac{\partial B_m}{\partial E_n} \right)$$

Coeficiente magnetodieléctrico

$$i = \left( \frac{\partial B_m}{\partial \theta} \right) = \left( \frac{\partial \sigma}{\partial H_n} \right)$$

Coeficiente piromagnético

$$\mu = \left( \frac{\partial B_m}{\partial H_n} \right)$$

Permeabilidad magnética

# Factores de Acoplamiento Electromecánico

$$k^2 = \frac{\text{Energía – Almacenada(Mecánica / Eléctrica)}}{\text{Energía – Su ministrada(Eléctrica / Mecánica)}}$$

$$k^2 = \frac{U_p^2}{U_E U_D}$$



# Factores de Acoplamiento Electromecánico

Para un sistema lineal:

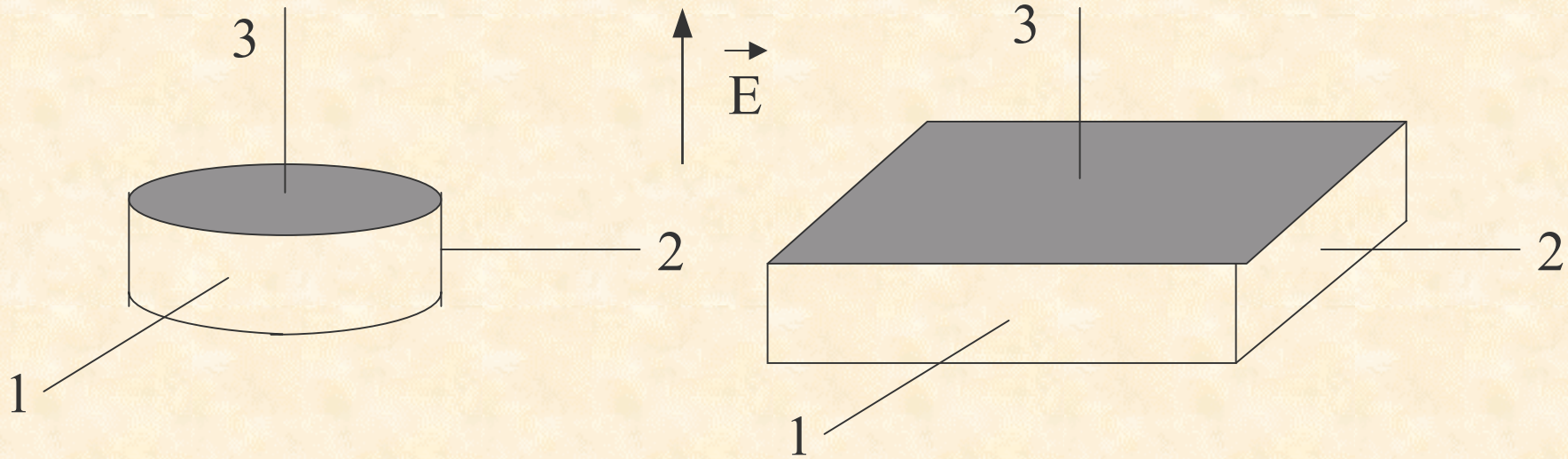
$$U = \frac{1}{2} S_i T_i + \frac{1}{2} D_m E_m$$

Utilizando las ecuaciones piezoeléctricas tipo D:

$$U_p = \frac{1}{2} T_i d_{mi} E_m \quad U_E = \frac{1}{2} T_i s_{ij}^E T_j \quad U_D = \frac{1}{2} E_m \epsilon_{mn}^T E_n$$



# Factores de Acoplamiento Electromecánico



Oscilación en la dirección 1 (Radial en la simetría cilíndrica)

$$k_p = \frac{2d_{31}}{\sqrt{\epsilon_{33}^T (s_{11}^E + s_{12}^E)}}$$

$$k_{31} = \frac{2d_{31}}{\sqrt{\epsilon_{33}^T s_{11}^E}}$$

$$k_p = \sqrt{\frac{2}{1 - \sigma^E}} k_{31} \quad \left( \sigma^E = -\frac{s_{12}^E}{s_{11}^E} \right)$$

# Técnicas de caracterización

## ■ Tipos de respuesta.

Respuesta a un estímulo continuo.

- Actuadores, Posicionadores.

Respuesta a un pulso.

- Ignitores de gas, Detonadores.

Respuesta a un estímulo armónico.

- Altavoces, Micrófonos, Ecógrafos.

# Tipos de medida

## Medidas eléctricas.

- Medidas dieléctricas.

Respuesta a campos eléctricos pequeños.  
(trabajo en la zona lineal)

- Medidas ferroeléctricas.

Respuesta a altos campos eléctricos.  
(región no lineal)

## Medidas mecánicas.

- Medidas de respuesta elástica.

Acción eléctrica o mecánica, para  
provocar el efecto piezoeléctrico

- Rigidez.

Módulos de rigidez: durometría.

## Medidas en función de la temperatura.

- Influencia de la temperatura en las características del material.

Modificación de la polarización con la temperatura.

- Efecto piroeléctrico, despolarización térmica.

Modificación de las propiedades piezoeléctricas con la temperatura.

- Influencia de la temperatura en los sistemas de medida.

Errores sistemáticos.

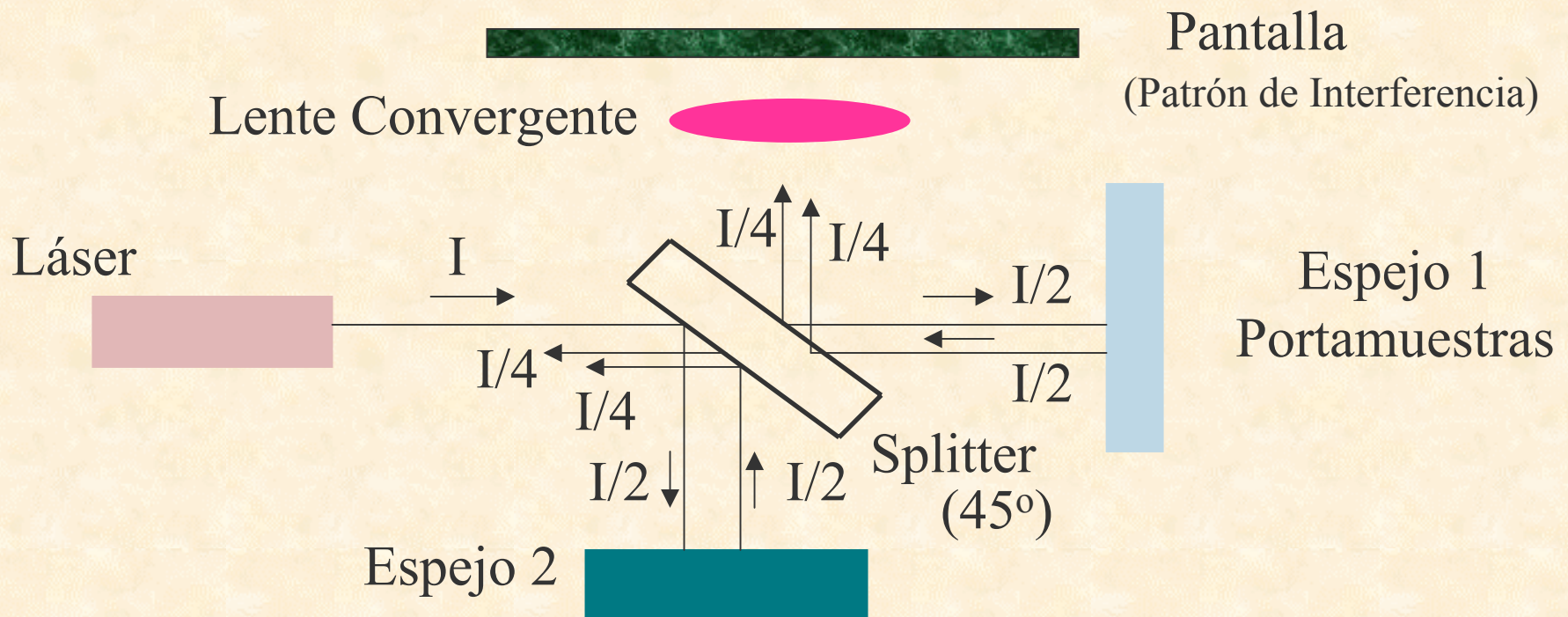


# Medida de Respuesta Elástica

## *Piezoelectricidad inversa*

### Medición óptica: Interferómetro de Michelson

- ❖ Se aplica campo eléctrico sobre el piezoeléctrico.
- ❖ Se evalúa deformación mecánica en factores de  $\lambda$  a partir de un patrón de interferencia.



# Métodos IEEE

IEEE-UFFC. IEEE Standard on Piezoelectricity, Std 176-1987. New York, 1988.

- Permitividad Dieléctrica.
  - “Libre” ( $\epsilon^T$ ) y “bloqueada” ( $\epsilon^S$ ).
- Medidas estáticas y cuasiestáticas.
  - Medida directa de parámetros piezoeléctricos.
- Medidas resonantes.
  - Circuitos equivalentes.
  - Espectroscopía de impedancias complejas.
- Medidas de velocidades de ondas planas.
  - Métodos pulso-eco.

# Medidas de permitividad

- Medidas directas de capacidad para frecuencias alejadas de las de resonancia

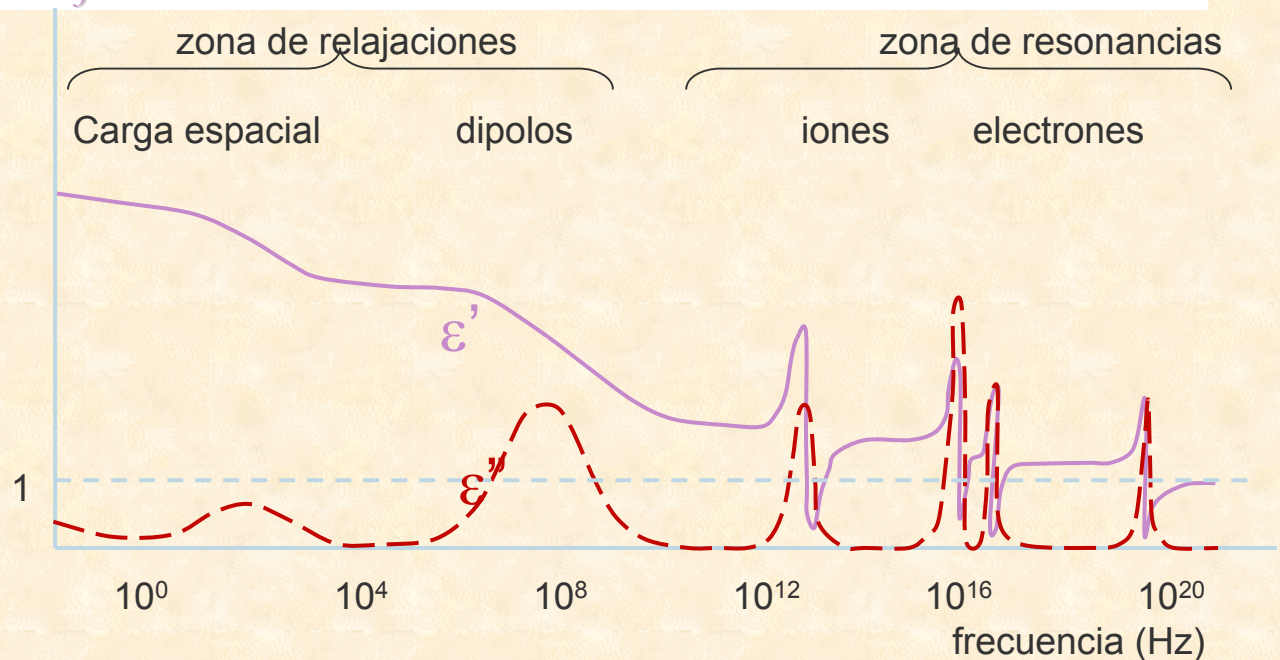
$\epsilon^T \Leftarrow f < 0.01 f_1$ , permitividad dieléctrica libre

$\epsilon^S \Leftarrow f > 100 f_n$ , permitividad bloqueada, recomendada la medida iterativa

$$\epsilon_{ij}^T - \epsilon_{ij}^S = d_{iq} e_{jq}$$

- Discos con polarización axial:

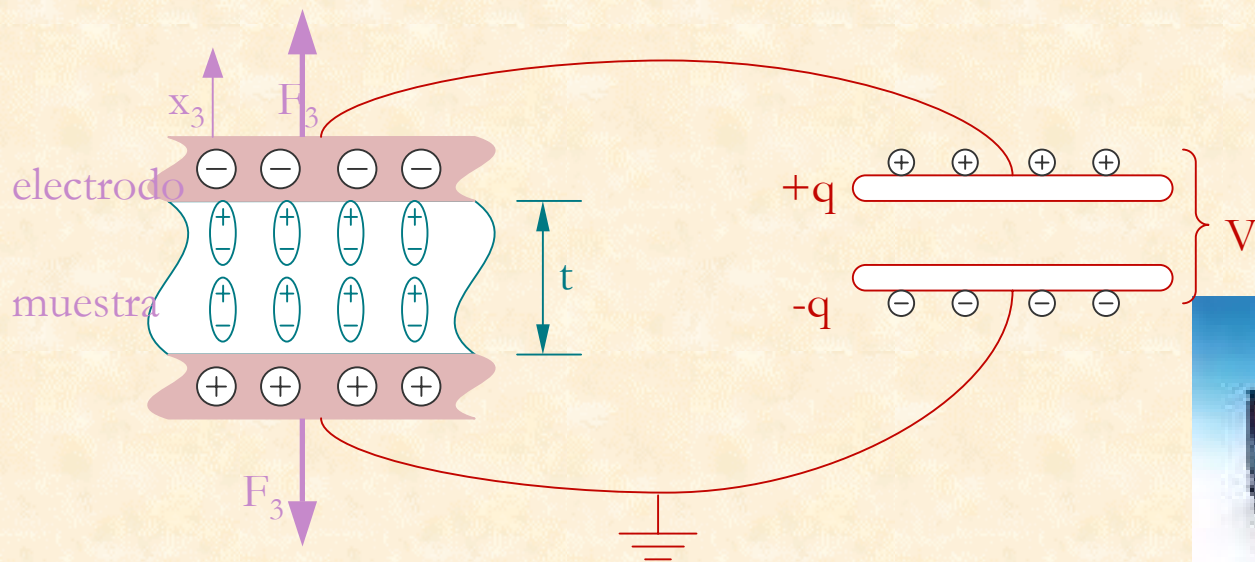
$$\epsilon_{ij}^S = (1 - k_p^2)(1 - k_t^2) \epsilon_{ij}^T$$





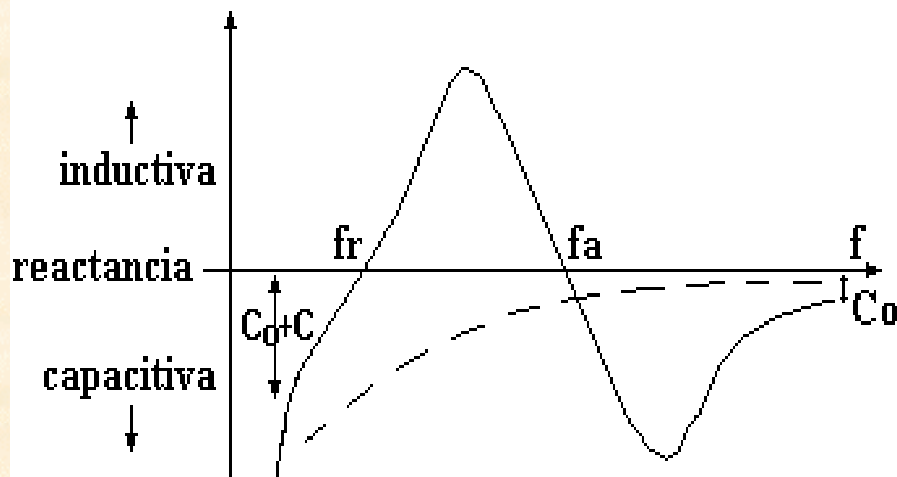
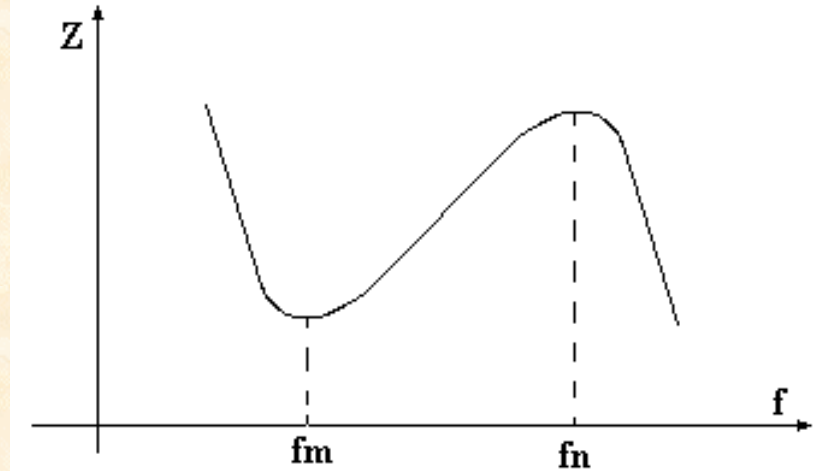
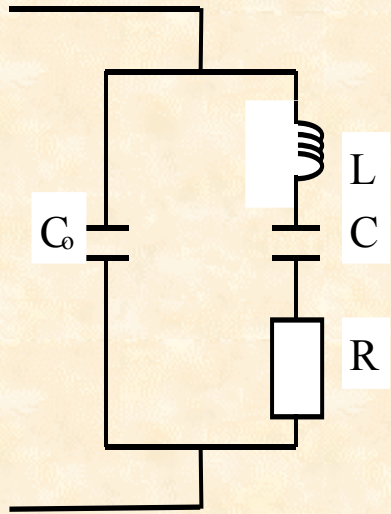
# Medidas estáticas y cuasiestáticas

- Primeras medidas realizadas.
- Problemas con las condiciones de contorno y la definición de los sentidos positivos de los ejes.
- Tensión uniaxial e hidrostática.



# Método Resonante

## Circuito equivalente

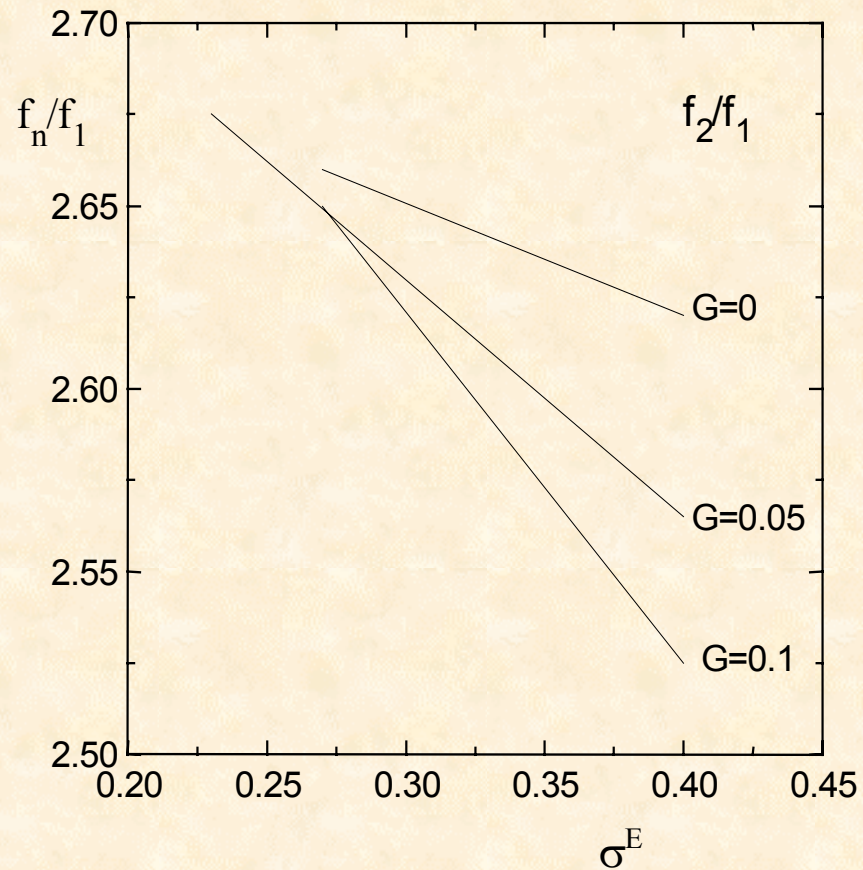


$$(f_n - f_m) > (f_p - f_s) > (f_a - f_r)$$

$$(f_n - f_m) = \text{constante} \cdot (f_a - f_r)$$

# Método Resonante

## Circuito equivalente



$$\left( \sigma^E = -\frac{s_{12}^E}{s_{11}^E} \right)$$



# Factor de Calidad Mecánico y Eléctrico

$$Q_m = \frac{f_p^2}{2\pi f_s (C + C_o) R (f_p^2 - f_s^2)}$$

$$Q_m = \frac{1}{4\pi C_o Z_{\min} \Delta f}$$

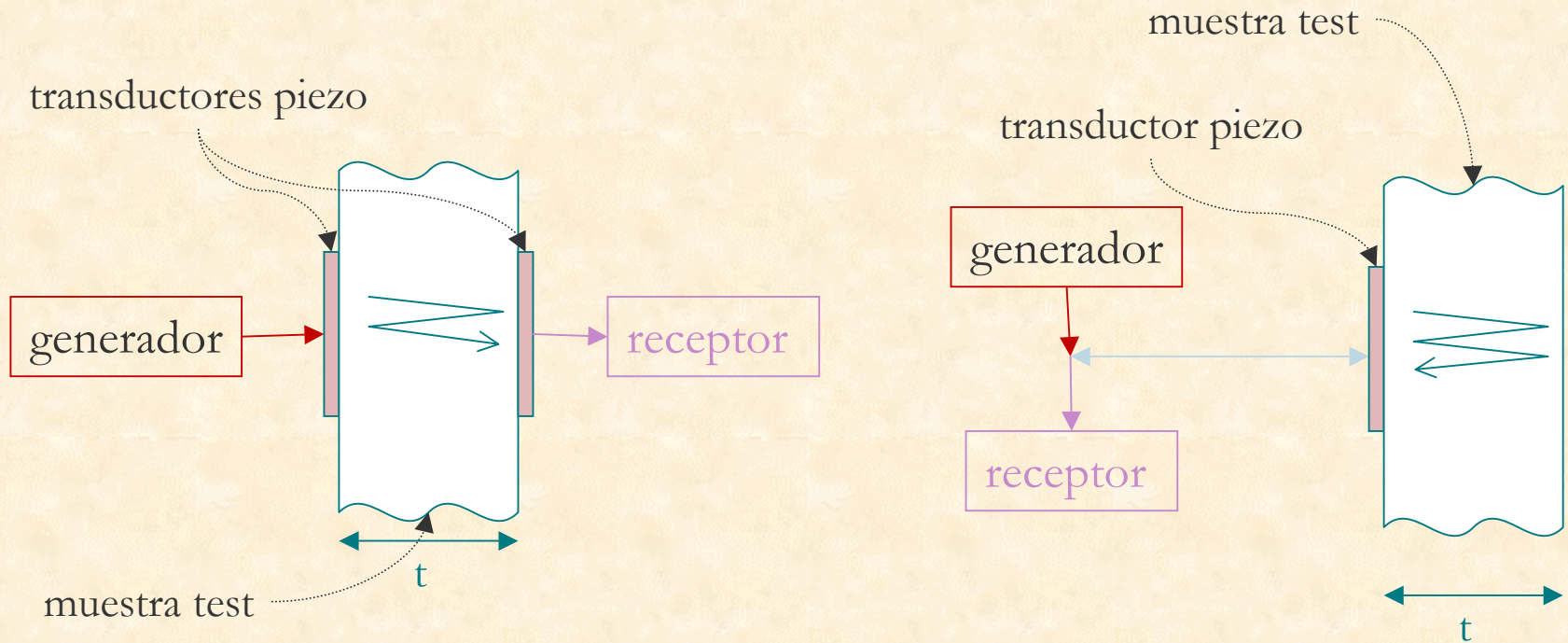
$$\Delta f = f_a - f_r$$

$$Q_e = 2\pi \frac{\text{Energía – Almacenada}}{\text{Energía – Perdida – en – un – Período}} = \frac{\frac{1}{2} CV^2}{\frac{1}{2} RTI^2}$$

$$Q_e = \omega CR = \frac{1}{\tan \delta}$$

# Métodos de velocidad de onda

## Método pulso-eco.



# Modos de Vibración

## Condiciones Mecánicas y Eléctricas

$$S_{ij} = \frac{1}{2} [u_{ij} + u_{ji}] \quad u_{ij} = \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad v_i = \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} \right)$$

$$F_i = m \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right) = \int_V f_i \cdot dV = \oint T_{ij_n} \cdot dS_j$$

Por Teorema de Gauss:

$$F_i = \int_V \left( \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \right) \cdot dV$$

Ecuación de Movimiento

$$\left( \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \right) = \rho \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right)$$



# Modos de Vibración

## Condiciones Mecánicas y Eléctricas

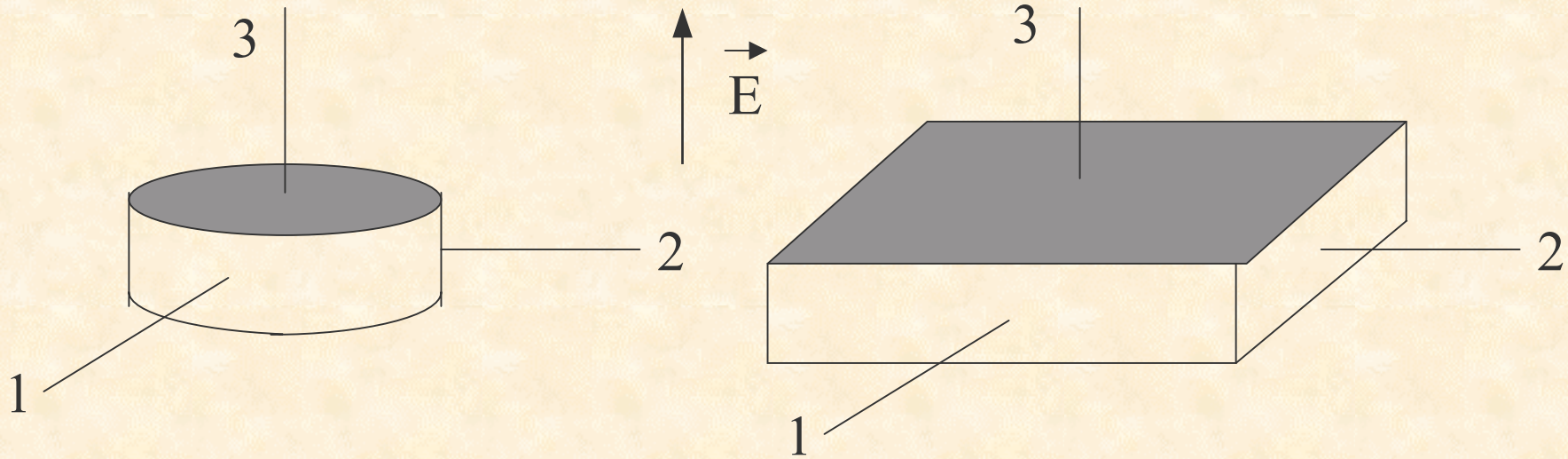
$$\mathbf{D}_i = \epsilon_0 \mathbf{E}_i + \mathbf{P}_i$$

$$\mathbf{E}_i = -\nabla \phi_i$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}_i = 0$$

# Modos de Vibración

## Condiciones Mecánicas y Eléctricas



Oscilación en la dirección 1 (Radial en la simetría cilíndrica)

$$S_1 = s_{11}^E T_1 + d_{31} E_3$$

$$S_1 = \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)$$

$$\rho \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \right) = \frac{1}{s_{11}^E} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \right)$$

Ecuación de mov.

# Modos de Vibración

## Resonancia y Antiresonancia

$$(S_i)_{6 \times 1} = (s_{ij}^E)_{6 \times 6} (T_j)_{6 \times 1} + (d_{ij})_{6 \times 3} (E_j)_{3 \times 1}$$

$$(D_i)_{3 \times 1} = (d_{ij})_{3 \times 6} (T_j)_{6 \times 1} + (\epsilon_{ij}^T)_{3 \times 3} (E_j)_{3 \times 1}$$

$$\begin{pmatrix} s_{11}^E & s_{12}^E & s_{13}^E & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & d_{31} \\ s_{12}^E & s_{11}^E & s_{13}^E & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & d_{32} \\ s_{13}^E & s_{13}^E & s_{33}^E & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & d_{33} \\ \cdot & \cdot & \cdot & s_{44}^E & \cdot & \cdot & \cdot & d_{15} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & s_{44}^E & \cdot & d_{15} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & s_{66}^E & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & d_{15} & \cdot & \epsilon_{11}^T & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & d_{15} & \cdot & \cdot & \cdot & \epsilon_{22}^T & \cdot \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \epsilon_{33}^T \end{pmatrix}$$



# Modos de Vibración

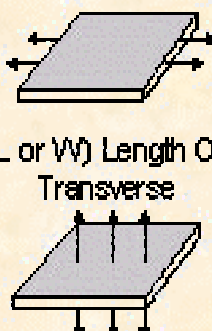
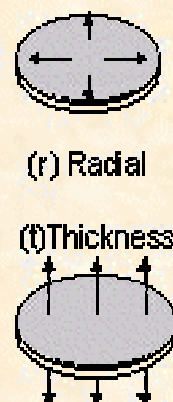
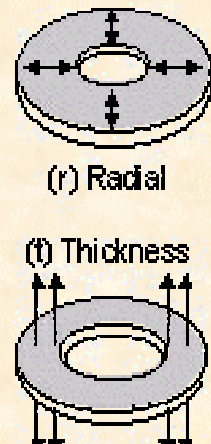


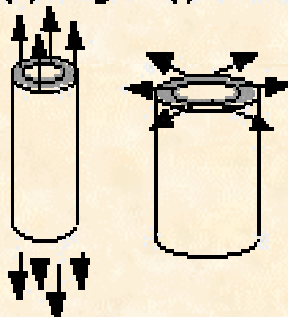
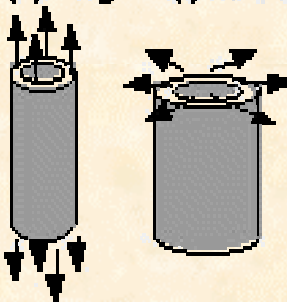
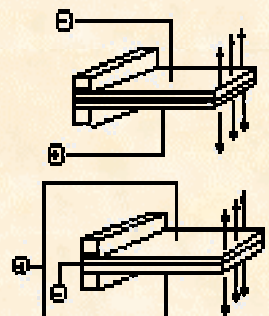
## Resonancia y Antiresonancia

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11}^E T_1 + s_{12}^E T_2 + s_{13}^E T_3 + d_{31} E_3 \\ s_{12}^E T_1 + s_{11}^E T_2 + s_{13}^E T_3 + d_{32} E_3 \\ s_{13}^E T_1 + s_{13}^E T_2 + s_{33}^E T_3 + d_{33} E_3 \\ s_{44}^E T_4 + d_{15} E_2 \\ s_{44}^E T_5 + d_{15} E_1 \\ 2(s_{11}^E - s_{12}^E) T_6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{15} T_5 + \epsilon_{11}^T E_1 \\ d_{15} T_4 + \epsilon_{22}^T E_2 \\ d_{31} T_1 + d_{32} T_2 + d_{33} T_3 + \epsilon_{33}^T E_3 \end{pmatrix}$$

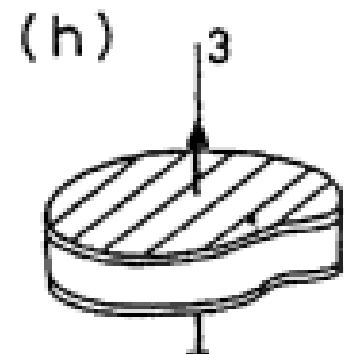
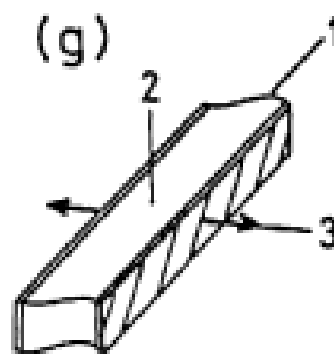
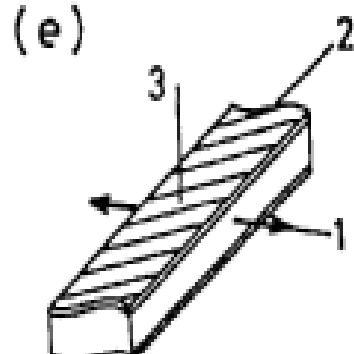
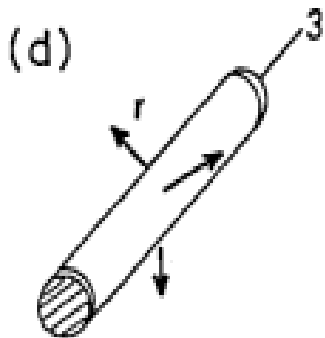
# Modos de Vibración

## Modos característicos de algunas simetrías

 <p>(L or W) Length Or Transverse</p> <p>(t) Thickness</p>	 <p>(r) Radial</p> <p>(t) Thickness</p>	 <p>(r) Radial</p> <p>(t) Thickness</p>	<p>(L) Length</p> 
	<p>(L) Length (r) Radial</p> 	<p>(L) Length (r) Radial</p> 	

# Modos de Vibración

	Condición Mecánica	Condición Eléctrica	Coefficiente Electromecánico	Constante Elástica
<b>d</b>	$S_3=0$	$\frac{\partial E_3}{\partial r} = 0$	$k_p^2 = \frac{2}{c_{11}^E + c_{12}^E} \frac{e_{31}^2}{\epsilon_{33}^{LS}}$	$c_{11}^E$
<b>e</b>	$S_2=0$ $T_3=0$	$\frac{\partial E_3}{\partial x_1} = 0$	$k_{31}^2 = s_{11}^E (1 - \sigma^E) \frac{e_{31}^2}{\epsilon_{33}^{LS}}$	$\frac{1}{s_{11}^E (1 - \sigma^E)}$
<b>g</b>	$S_1=0$ $T_2=0$	$\frac{\partial D_3}{\partial x_3} = 0$	$k_{33}^2 = \left( e_{33} - e_{31} \frac{c_{13}^E}{c_{11}^E} \right)^2 \left( c_{33}^E - \frac{c_{13}^E{}^2}{c_{11}^E} \right)^{-1} \frac{1}{\epsilon_{33}^{LS}}$	$c_{33}^D - \frac{c_{13}^D{}^2}{c_{11}^D}$
<b>h</b>	$S_1=0$ $S_2=0$	$\frac{\partial D_3}{\partial x_3} = 0$	$k_t^2 = \frac{e_{33}^2}{c_{33}^D \epsilon_{33}^S}$	$c_{33}^D$





# Modos de Vibración

## Parámetros Característicos

### ■ Disco

- Espesor:  $c_{33}$ ,  $\epsilon_{33}$ ,  $h_{33}$ ,  $e_{33}$ ,  $k_t$
- **Radial**:  $s_{11}$ ,  $s_{12}$ ,  $s_{66}$ ,  $\epsilon_{33}$ ,  $d_{31}$ ,  $g_{31}$ ,  $e_{33}$ ,  $k_p$ ,  $k_{31}$

### ■ Barrita

- **Longitudinal**:  $s_{33}$ ,  $\epsilon_{33}$ ,  $g_{33}$ ,  $d_{33}$ ,  $k_{33}$
- Transversal:  $s_{11}$ ,  $\epsilon_{33}$ ,  $g_{31}$ ,  $d_{31}$ ,  $k_{31}$

### ■ Placa

- **Cizalla**:  $s_{55}$ ,  $c_{55}$ ,  $\epsilon_{11}$ ,  $h_{15}$ ,  $e_{15}$ ,  $d_{15}$ ,  $g_{15}$ ,  $k_{15}$

### ■ Cálculo combinado

- $s_{13}$ ,  $c_{13}$ ,  $c_{11}$ ,  $c_{12}$

$s_{11}$	$s_{12}$	$s_{13}$	.	.	.	.	.	$d_{31}$
$s_{12}$	$s_{11}$	$s_{13}$	.	.	.	.	.	$d_{31}$
$s_{13}$	$s_{13}$	$s_{33}$	.	.	.	.	.	$d_{33}$
.	.	.	$s_{44}$	.	.	.	$d_{15}$	.
.	.	.	.	$s_{44}$	.	$d_{15}$	.	.
.	.	.	.	.	$s_{66}$	.	.	.
.	.	.	.	$d_{15}$	.	$\epsilon_{11}$	.	.
.	.	.	$d_{15}$	.	.	.	$\epsilon_{11}$	.
$d_{31}$	$d_{31}$	$d_{33}$	.	.	.	.	.	$\epsilon_{33}$

# Electroestricción

## Consideraciones:

- 1.- Energía Libre de Helmholtz como función de estado.
- 2.- Variables independientes: S y P.
- 3.- Deformación elástica pequeña.

$$A(S, P) = \frac{1}{2} \sum \beta_{ij}^S P_i P_j + \frac{1}{2} \sum c_{ijkl}^P S_{ij} S_{kl} + \frac{1}{2} \sum q_{ijkl} S_{ij} P_k P_l$$

$$T_{ij} = \frac{\partial A(S, P)}{\partial S_{ij}} = c_{ijkl}^P S_{kl} + q_{ijkl} P_k P_l$$

Ecuación de la Electroestricción

# Electroestricción

## Consideraciones:

1.- Variables independientes por pares: T y P, S y E, T y E.

$$S_{ij} = s_{ijkl}^P T_{kl} + Q_{ijkl} P_k P_l$$

$$T_{ij} = c_{ijkl}^E S_{kl} + m_{ijkl} E_k E_l$$

$$S_{ij} = s_{ijkl}^E T_{kl} + M_{ijkl} E_k E_l$$

Ecuaciones

de la

Electroestricción

Q, q, M, m: Coeficientes Electrostrictivos (T-4).



# Electroestricción

## Consideraciones:

- 1.- Reducción de índices.
- 2.- Cristales simétricos y cerámicas despolarizadas.

Resultado: Reducción del tensor de 81 a 36 componentes.

$$\begin{array}{cccccc} Q_{11} & Q_{12} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{12} & Q_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{44} \end{array}$$

# Electroestricción

## Mediciones en ac y dc

$$S_{ij} = s_{ijkl}^E T_{kl} + d_{ijk} E_k + M_{ijkl} E_k E_l$$

Consideración:  $T_{kl}=0$  y  $E=E_{dc}+E_o \cos \omega t$

$$S_{ij} = d_{ijk} E_{dc} + M_{klij} E_{dc}^2 + d_{ijk} E_o \cos \omega t + M_{klij} E_o^2 \cos^2 \omega t + 2E_o E_{dc} M_{klij} \cos \omega t$$

$$d_{33} = 2Q_{11} P_3 \epsilon_{33}$$

$$d_{31} = 2Q_{12} P_3 \epsilon_{33}$$

# Electroestricción

## Ventajas de los Electrostrictivos respecto a los Piezoeléctricos

- 1.- Histéresis en la dependencia  $S$  vs  $E$  mínima o despreciable en un determinado rango de temperatura.
- 2.- Deformación más estable y comparable con los mejores piezoeléctricos.
- 3.- No requieren ser polarizados.

## Desventajas de los Electrostrictivos respecto a los Piezoeléctricos

- 1.- El rango de temperatura para su uso es limitado debido a la fuerte dependencia de efecto electrostrictivo con la temperatura.
- 2.- Pequeña deformación con bajos campos eléctricos ( $S \propto E^2$ ).