

Con Ciencias 



# Estudiantil

¿Por qué el lápiz parece quebrarse?



## DIRECTORIO

### Rector

Mtro. Alfonso Esparza Ortíz

### Director de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (FCFM)

Dr. José Ramón Enrique Arrazola Ramírez

### Director del Instituto de Física Ing. Luis Rivera Terrazas (IFUAP)

Dr. Juan Francisco Rivas Silva

### Centro de Investigación en Dispositivos Semiconductores (CIDS)

Dr. Héctor Juárez Santiesteban

## COMITÉ EDITORIAL

M. C. J. Alejandro Hernández Tello  
alheran@gmail.com

M. C. Raúl Cortés Maldonado  
rcortes@ifuap.buap.mx

M. C. Verónica Borja Macías  
vero0304@gmail.com

## AGRADECIMIENTOS

La impresión de este número ha sido posible gracias al apoyo de:

Comité Editorial

FCFM

IFUAP  
PIFI 2013

CIDS

## EDITORIAL

El lanzamiento de una revista siempre es un gran desafío, pero a la vez una aventura que deja mucho aprendizaje y muchas satisfacciones. No es sencillo realizar la editorial de una revista pero aquí estamos haciendo nuestro mejor esfuerzo para que esta revista sea de su total agrado.

Estamos satisfechos con este primer número de Con-Ciencia Estudiantil ya que nos permite, a los estudiantes, transformarnos en autores intelectuales del proceso de divulgar la ciencia. Y es que en ocasiones entre estudiantes nos entendemos mejor. Gracias a la ayuda de nuestros colaboradores que se han dado a la tarea de escribir sobre lo que les gusta, sobre física, sobre matemáticas y sobre la ciencia en general, sale a la luz esta primera edición.

Así como sucede con muchos artistas que al ver su obra, no están del todo contentos; así nos sucede a nosotros porque sabemos y tenemos claro que el resultado es mejorable, que este primer número es sólo la base de un trabajo que esperamos se convierta en una obra mucho más grande y en la que todos participemos. Sabemos que número a número podemos realizar cambios para mejorar el resultado y aprovechar al máximo este espacio que gracias al apoyo de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (FCFM), del Instituto de Física Ing. Luis Rivera Terrazas (IFUAP) y del Centro de Investigación en Dispositivos Semiconductores (CIDS) se ha abierto para nosotros los estudiantes.

Año 1 Núm. 1 – Invierno 2014

Tiraje de 100 ejemplares impresos

# Contenido

	Pag.
■ Presentación .....	2
■ Con-Ciencia (La portada): La refracción en la luz .....	3
■ Una introducción geométrica a los modelos..... Rubén Octavio Vélez Salazar	5
■ La función de dispersión para un potencial constante en un sistema uni-dimensional de un canal .....	11
Antonio Alejandro Fernández Marín	
■ Con-Ciencia (Local): Dr. Gerardo Torres del Castillo .....	16
■ El misterio del número de las semillas de girasol .....	22
Fernanda López Montes y Ángeles Carranza Cisneros	
■ El método de líneas para resolver las ecuaciones de estado crítico de un superconductor tipo II anisótropo .....	26
Omar Augusto Hernández Flores y Carolina Romero Salazar	
■ Con-Ciencia (Habla de...): El encuentro con un cometa .....	31
Raúl Cortés Maldonado	
■ Los números reales $\mathbb{R}$ , aproximación previa al concepto de límite.....	35
Lucero Amezcua Gerardo y Pablo Rodrigo Zeleny Vázquez	
■ Con-Ciencia (Ilustrada): Selfie de la misión Rosetta .....	40

---

# Presentación

---

Este es el primer número de Con-Ciencia Estudiantil, esperamos que gracias a ustedes, nuestros lectores y colaboradores, y al apoyo de de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (FCFM), del Instituto de Física Ing. Luis Rivera Terrazas (IFUAP) así como del Centro de Investigación en Dispositivos Semiconductores (CIDS) existan muchos números más.

El objetivo de Con-Ciencia Estudiantil es convertirse en un espacio para la divulgación de las ciencias donde los principales protagonistas sean los estudiantes tanto de las licenciaturas como del posgrado del área de ciencias de nuestra universidad. Número a número nos encontraremos con cuatro secciones fijas:

- Con-Ciencia (La portada) que estará sujeta a concurso para que ustedes compartan con nosotros alguna foto o imagen de algún experimento o resultado que, más allá de su belleza, nos enseñe algo importante e interesante sobre la ciencia. La intención es que además de la gráfica acompañemos nuestra portada con una breve de explicación de lo que ésta nos muestra (una o dos páginas).
- Con-Ciencia (Local) nos presentará entrevistas a investigadores locales destacados, aquí trataremos de conocer un poco más sobre su vida, cómo llegaron a una carrera de ciencias, qué hacen actualmente, así como algunos de los consejos que tienen para nosotros los estudiantes.
- Con-Ciencia (Habla de...) tendrá tópicos diversos; desde un acontecimiento pasado que marcó el rumbo de la historia de la ciencia; hasta acontecimientos recientes e importantes, como es el caso del primer aterrizaje sobre un cometa que veremos en este primer número de Con-Ciencia estudiantil.
- Con-Ciencia (Ilustrada) se encargará de llevar a ustedes fotografías relevantes sobre la historia de la ciencia en general.

Con-Ciencia estudiantil le dedicará la mayor parte de su espacio a los estudiantes. Además de las secciones fijas habrá espacio para múltiples artículos cortos de divulgación elaborados por estudiantes interesados en escribir sobre lo que hacen y lo que les gusta de la ciencia. A partir de ahora estaremos en espera de sus colaboraciones para el número 2 de nuestra revista correspondiente a la primavera de este 2015. Finalmente reservaremos espacios para difundir información sobre congresos, concursos, escuelas y otras actividades relacionados con las ciencias con el interés de que cada vez participemos más en estos eventos.

Por último, no nos queda más que agradecer el tiempo que le dediquen a la lectura de este número, esperar que sea de su agrado y que nos escriban a **conciencia.buap@gmail.com** para enviarnos sus comentarios, sugerencias y aportaciones.

Comité editorial

## La refracción en la luz

### RESUMEN

La portada de este número está dedicada al fenómeno de la refracción, fenómeno ilustrado con un experimento muy sencillo, pero bastante ilustrativo que nos permite entender distintos fenómenos en la naturaleza.

### 1. INTRODUCCIÓN

En la naturaleza ocurren diversos fenómenos interesantes en los cuales está involucrada la luz. Uno de estos fenómenos es la refracción, el cual es muy importante en el aspecto científico y médico, por mencionar algunos ejemplos. Los microscopios y telescopios refractores son una herramienta bastante útil en la investigación científica. En medicina, el astigmatismo, el cual es un tipo de error de carácter refractivo en el ojo, i.e. es un problema con la forma en cómo el ojo enfoca la luz, es diagnosticado a través de un examen de refracción, en donde se determina el tipo y grado de error refractivo. Este problema es corregido mediante la prescripción médica de anteojos.

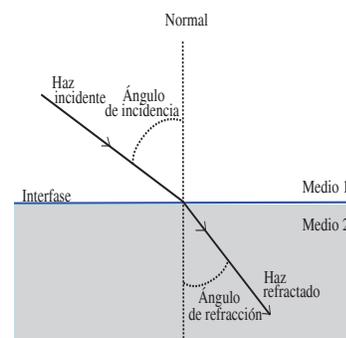
### 2. REFRACCIÓN

La refracción es el cambio de dirección que sufre un frente de ondas al atravesar de forma oblicua, i.e, con un ángulo menor a  $90^\circ$ , la interfase entre dos medios distintos en los que la velocidad de propagación es distinta. Este fenómeno ocurre en todos los tipos de onda, siendo más común con ondas de luz y en medios transparentes.

Cuando un haz de luz viaja a través del aire e incide oblicuamente sobre la superficie del agua del vaso, parte de la luz es reflejada por la superficie



**Figura 1.** Refracción de la luz en un vaso con agua.



**Figura 2.** Esquema de la refracción de la luz en el agua.

y la otra parte es absorbida. Sin embargo, debido a la transparencia del agua, la mayor parte de la luz se transmite a través de la misma. La densidad óptica del agua es mayor que la del aire, por ello la velocidad de la luz se reduce al entrar en el líquido distorsionando la apariencia de lápiz (ver Figs. 1 y 2). La refracción también ocurre cuando la luz atraviesa capas de aire a distinta temperatura, la atmósfera por ejemplo, es por eso que no vemos el sol o las estrellas en su verdadera posición, excepto cuando están sobre nuestras cabezas [1].

### 3. EL ÍNDICE DE REFRACCIÓN

El índice de refracción de una sustancia químicamente pura es una constante que define una propiedad física de la sustancia. Por consiguiente, se puede determinar la identidad de una sustancia midiendo su índice de refracción, el cual se define por el cociente entre la velocidad en el vacío ( $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ ) y la velocidad en el medio  $v$  [2]. El índice de refracción siempre es mayor que la unidad, debido a que  $v < c$ , para el agua  $n = 1,33$  ( $n = c/v = 1,33$ ). De esta manera, la velocidad de la luz en el agua es menor que en el vacío.

### 4. CONCLUSIONES

La refracción en la interfase aire-agua es la razón por la cual observamos que el lápiz pareciera quebrarse dentro del vaso con agua. Si una persona introduce sus piernas en una piscina (interfase aire-agua) se observa que éstas son más cortas y gruesas de lo que son en realidad, esto se debe a la refracción de la luz. Por la misma razón observamos que una piscina parece menos profunda de lo que es en realidad.

### REFERENCIAS

- [1]Cabrera, V. M. G., Física Fundamental (1996) Ed. Progreso
- [2]Tipler, P.A. and Mosca, G., Física para la Ciencia y la Tecnología: Luz. Vol. 2B. (2005) Ed. Reverté



**XXV Jornadas de Divulgación de la Ciencia**  
 en memoria del **Ing. Luis Rivera Terrazas**  
**Marzo 25 - 27, 2015**  
**Año Internacional de la Luz**

**Conferencias Magistrales de Divulgación**

**Miércoles 25**

"Jugando en las Playas del Océano Cósmico"  
 Dr. Omar López Cruz  
 INAOE  
 12:00 hrs.

"Explorando el Universo Invisible con el Gran Telescopio Milimétrico"  
 Dr. Miguel Chávez Dagostino  
 INAOE  
 13:00 hrs.

**Jueves 26**

"Neurociencias: Tequila y Café"  
 Dr. Jesus Carlos Ruiz Suárez  
 CINVESTAV - Monterrey  
 12:00 hrs.

"La Luz: una Buena Onda"  
 Dr. W. Luis Mochán Backal  
 ICF-UNAM  
 13:00 hrs.

**Viernes 27**

"Mil y un Años en la Historia de la Luz"  
 Dra. Ana María Cotto Kramis  
 IF-UNAM  
 13:00 hrs.

**Evento cultural**

**Grupo "Bon Aché"**  
 (Guitarras latinoamericanas)  
 16:30 hrs

Auditorio del Instituto de Física "Luis Rivera Terrazas"  
 Av. San Claudio y Blvd. 18 Sur, Edif. 110A, C.U., Puebla, Pue.

Informes: (222) 2295610  
 Email: mctellez@ifuap.buap.mx

**Coloquio Mensual de Matemáticas**  
 Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Lugar: Auditorio de la FCFM-BUAP

Miércoles 25 de marzo, 12:00 - 14:00  
**Modelado de Propagación de Ondas en Medios Complejos Usando Diferencias Finitas Implícitas**  
 Dra. Úrsula Iturrarán  
 Facultad de Ciencias de la UNAM

Jueves 16 de abril, 12:00 - 14:00  
**Por anunciar**  
 Dr. Adam Epstein  
 University of Warwick, England

Jueves 21 mayo, 12:00 - 14:00  
**Lógica paraconsistente ¿qué es y para qué sirve?**  
 M.C. Verónica Borja Macías  
 FCFM-BUAP

Jueves 11 de junio, 12:00 - 14:00  
**No Hay Quinto Malo**  
 Dra. Elsa Puente Vázquez  
 FCFM-BUAP

Informes: (222) 2295500 Extensión: 2163  
 Correo: pdsoto@fcfm.buap.mx

## Una Introducción Geométrica a los Modelos

Rubén Octavio Vélez Salazar

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas  
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla  
C.U. Avenida San Claudio y 18 Sur,  
Colonia San Manuel, Puebla, Pue.  
C.P.72570 MEXICO  
ruvelsa@yahoo.com

### RESUMEN

En este trabajo analizamos el concepto de *modelo de un sistema axiomático* y lo ejemplificamos por medio de la geometría de incidencia.

### 1. INTRODUCCIÓN

Cuando uno lee las palabras *punto*, *línea*, *plano*, uno puede imaginar manchas (los puntos) y trazos largos (las líneas) sobre una hoja de papel (el plano), pues es lo que corresponde más fielmente a nuestra intuición. Más aun, si uno lee la frase *por cualesquiera dos puntos distintos en el plano pasa un única recta*, uno puede remitirse nuevamente al papel, las manchas y los trazos largos. Sin embargo, según David Hilbert, “uno debe poder intercambiar las palabras ‘punto’, ‘línea’ y ‘plano’, por las palabras ‘mesa’, ‘silla’ y ‘tarro de cerveza’,” pues cualquier propiedad que cumplan estos entes deberá demostrarse sin mencionar características que pudieran tener, más allá de las características dadas en los axiomas.

Al trazar puntos y rectas en el papel o el pizarrón, estamos *interpretando* el significado de estos entes matemáticos. Algo parecido ocurre cuando uno lee *espacio vectorial* o *campo*: uno puede imaginarse inmediatamente a  $\mathbb{R}^2$  o a  $\mathbb{R}$ , los cuales también son *interpretaciones* de las definiciones respectivas.

En Matemáticas, existe una definición formal de lo que es una interpretación y en la práctica estaremos interesados en interpretaciones “buenas”, es decir, interpretaciones que satisfagan cualquier propiedad que pueda emanar de nuestra teoría, llámese Geometría, Álgebra Lineal, Teoría de Campos, Teoría de Conjuntos, etc. A estas interpretaciones les llamamos *modelos*. En este trabajo, analizaremos la definición formal de *modelo de un sistema axiomático* y la ejemplificaremos con conceptos geométricos.

En sus inicios, las matemáticas se desarrollaban de manera empírica: muchos conocimientos matemáticos se daban por ensayo y error, o bien, generalizando resultados específicos, más no de una manera que se haya sistematizado formalmente. De hecho, fueron los griegos, empezando por Tales de Mileto, los primeros que se exigieron formalizar el estudio de las matemáticas por medio del razonamiento deductivo. Esta idea la continuó Pitágoras y su escuela. Todas las primeras formalizaciones culminaron con la obra *Elementos*, escrita por Euclides, en la cual el autor recopila el conocimiento matemático que tenía hasta entonces y que abarcaba la Geometría y la Teoría de Números, entre otros temas. En este trabajo, Euclides

estableció además un sistema formal que hasta hoy seguimos usando y el cual está basado puramente en el razonamiento deductivo: los cálculos numéricos y los experimentos físicos son innecesarios en la verificación de los enunciados dados por Euclides. Este sistema establece términos geométricos indefinidos y axiomas geométricos, y por medio de una lógica infiere propiedades geométricas, las cuales están dadas en términos de *teoremas*. Hoy en día, a este tipo de sistemas les llamamos *sistema axiomático*. Una forma de interpretar la Geometría de Euclides es por medio de construcciones con regla y compás. Estas construcciones *validan* los resultados de Euclides, por lo que consideramos que tales construcciones constituyen un modelo de la Geometría de Euclides.

El hecho de que Euclides haya podido elegir sólo cinco enunciados (axiomas) simples, con los cuales sus lectores podrían estar de acuerdo, y de los cuales se deducen más de 400 proposiciones, es algo que ha maravillado e inspirado a la mayoría de las personas interesadas en Matemáticas. Entre estas personas estuvo David Hilbert, quien presentó una alternativa al trabajo de Euclides, desglosando el sistema de Euclides en sistemas más pequeños: la incidencia, el orden, la congruencia, la continuidad y el paralelismo. En este trabajo nos enfocaremos en la Geometría de Incidencia para mostrar formalmente como modelar un sistema axiomático.

## 2. SISTEMA AXIOMÁTICO

**Definición.** Una Sistema Axiomático Formal se define cuando las siguientes condiciones se cumplen:

1. Un alfabeto para construir expresiones formales que incluye:
  - un conjunto de símbolos para conectivos lógicos, incluyendo cuantificadores;

- un conjunto de símbolos para designar variables;
  - un conjunto de símbolos para constantes;
  - un conjunto de símbolos que serán interpretados como funciones;
  - un conjunto de símbolos que serán interpretados como relaciones.
2. Una gramática formal que incluirá:
    - reglas de buena formación, que reproducen la “morfología” del lenguaje formal;
    - reglas de inferencia que permitirán deducir unas proposiciones de otras, estas reglas reproducen la “sintaxis” del lenguaje formal.
  3. Un conjunto de expresiones bien formadas llamadas axiomas.

Nótese que los cinco postulados de Euclides están descritos en la definición anterior en el apartado 3. Por otro lado, Hilbert sugirió evitar definir el significado de expresiones como “punto”, “línea”, “el punto  $A$  está sobre la línea  $l$ ”, “el punto  $A$  está entre los puntos  $B$  y  $C$ ” y “es congruente con”, lo cual tiene una ganancia doble: 1) tener un punto de partida; y 2) no caer en diferencias de opiniones sobre tales definiciones (originalmente, Euclides propuso 23 definiciones).

Nótese también que cuando hacemos trazos largos que pasan por manchas en una hoja de papel o en un pizarrón, lo que estamos haciendo es *asignar* una definición a los términos indefinidos con la intención de formalizar la Geometría de Euclides. Esta idea es la que define lo que es una interpretación de un sistema axiomático.

**Definición.** Una interpretación de un Sistema Axiomático es una asignación de un significado a cada uno de los términos indefinidos. Si bajo esta asignación los axiomas se verifican entonces decimos que tal interpretación es un modelo del

sistema axiomático.

Notemos que si una interpretación verifica (modela) los axiomas de un sistema axiomático, lo hará también con cualquier propiedad que se deduzca de los axiomas, es decir, la interpretación modelará cualquier teorema. Resulta que una proposición es un teorema si es verificada por cualquier modelo del sistema axiomático. Esta afirmación equivale a decir que si existe un modelo que no satisface alguna proposición entonces tal proposición no es teorema del sistema axiomático.

### 3. LA GEOMETRÍA DE INCIDENCIA

La Geometría de Incidencia es el sistema axiomático definido a partir de considerar como únicos términos indefinidos “punto”, “línea” y una relación entre puntos y líneas que llamamos “incidencia”, junto con los siguientes axiomas.

- AI 1 Para cualesquiera dos puntos distintos,  $P$  y  $Q$ , existe una única línea  $l$  tal que  $l$  es incidente con  $P$  y con  $Q$ .
- AI 2 Para cada línea existen al menos dos puntos distintos con los cuales es incidente.
- AI 3 Existen al menos tres puntos distintos para los cuales no existe una línea incidente simultáneamente con tales tres puntos.

El primero de estos axiomas coincide con el primer axioma de Euclides. El segundo axioma es bastante explícito. El tercero establece dos cosas: por un lado, la existencia de al menos tres puntos distintos; y por otro, que cada línea no incide con al menos uno de los puntos anteriores (es decir, estos puntos son *no colineales*). Enseguida enunciamos algunas propiedades (teoremas) satisfechas por la Geometría de Incidencia.

- Dos líneas distintas inciden simultáneamente con a lo más un punto (es decir, si no son *paralelas* entonces *se intersectan* en un único punto).
- Existen tres líneas distintas que inciden simultáneamente con ningún punto (es decir, tales líneas no son *concurrentes*).
- Para cada línea existe al menos un punto con el que no incide.
- Por cada punto existe al menos una línea que no incide con tal punto.
- Para cada punto existen al menos dos líneas que inciden con tal punto.

### 4. ALGUNOS MODELOS DE LA GEOMETRÍA DE INCIDENCIA

Damos ahora interpretaciones de la Geometría de Incidencia.

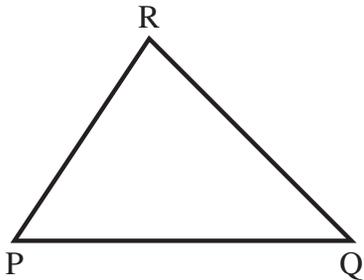
**Ejemplo 1.** Consideremos el conjunto de tres letras  $\{A, B, C\}$ . Llamémosle *punto* a cada letra y *línea* a cada subconjunto con exactamente dos letras. Por último, llamémosle *incidencia* a la relación de pertenencia  $\in$ .

Observemos que con esta interpretación tenemos tres puntos y seis líneas. Además, tenemos lo siguiente.

- Cualquiera dos puntos distintos determinan un único subconjunto de dos elementos al cual pertenecen, es decir, una única línea incidente con tales dos puntos.
- Cada línea es un subconjunto de (al menos) dos letras, las cuales pertenecen a dicho subconjunto, es decir, existen al menos dos puntos distintos con los cuales es incidente.
- Los tres puntos distintos,  $A, B$  y  $C$ , tienen la característica de que no existe una línea incidente simultáneamente con tales tres puntos.

Así que esta interpretación valida a los tres axiomas de incidencia, por lo que es un modelo de la Geometría de Incidencia. Además, no es difícil verificar que las cinco propiedades de la Geometría de incidencia enunciadas anteriormente también se cumplen.

**Ejemplo 2.** Consideremos el siguiente diagrama.



Los *puntos* son los vértices del triángulo y sus lados son las *líneas*. La *incidencia* es  $\in$ . No es difícil argumentar que esta interpretación también es un modelo de la Geometría de Incidencia y que las cinco propiedades de la Geometría de incidencia enunciadas anteriormente también se cumplen.

Más aún, entre los puntos del Ejemplo 1 y los puntos del Ejemplo 2 y entre las líneas del Ejemplo 1 y las líneas del Ejemplo 2, existen las biyecciones

$$\begin{aligned} A &\leftrightarrow P & \text{y} & \{A, B\} &\leftrightarrow PQ \\ B &\leftrightarrow Q & & \{B, C\} &\leftrightarrow QR \\ C &\leftrightarrow R & & \{A, C\} &\leftrightarrow PR \end{aligned}$$

que satisfacen que el punto  $X$  incide con la línea  $l$  si y sólo si la imagen del punto  $X$  incide con la imagen de la línea  $l$ . De aquí que decimos que estos dos modelos son esencialmente el mismo, o bien, que son *isomorfos*.

**Definición.** Si tenemos dos modelos de un sistema axiomático tales que existe una biyección  $P \leftrightarrow P'$  entre sus puntos y otra biyección  $l \leftrightarrow l'$  entre sus líneas, entonces decimos que tales modelos son

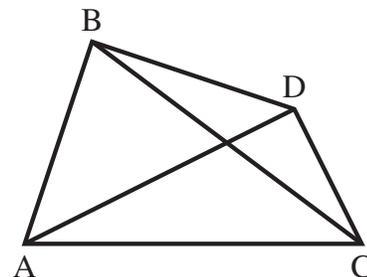
isomorfos si se cumple que  $P$  incide con  $l$  si y sólo si  $P'$  incide con  $l'$ .

Enunciamos el **Postulado Euclidiano de las Paralelas** de la siguiente manera: *para todo punto  $P$  y para toda línea  $l$  que no incide con  $P$  existe una única línea que incide con  $P$  y que es paralela a  $l$*  y notamos que los modelos isomorfos de los ejemplos anteriores no validan este Postulado (pues en estos modelos no existen líneas paralelas). Esto implica que este Postulado no es una consecuencia lógica de los Axiomas de Incidencia.

Por otro lado, este modelo satisface el **Postulado Elíptico de las Paralelas**: *cualesquiera dos líneas tienen un punto en común*, es decir, no hay líneas paralelas.

**Ejemplo 3.** Interpretemos los “puntos” como puntos sobre una esfera, “líneas” como circunferencias de radio máximo sobre la esfera e “incidencia” como  $\in$ . En esta interpretación no existen líneas paralelas. Por otro lado, esta interpretación no es un modelo de la Geometría de Incidencia: el axioma A1 no se cumple, pues por cualesquiera dos puntos antipodales pasa una cantidad infinita de líneas.

**Ejemplo 4.** Consideremos el siguiente diagrama.

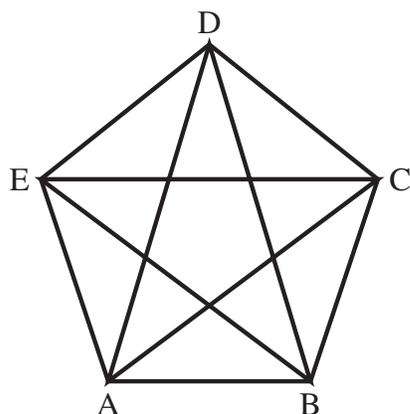


Los *puntos* son los vértices marcados con  $A, B, C$  y  $D$  y los seis segmentos entre estos puntos son las *líneas*. La *incidencia* es  $\in$ . Nótese que la intersección entre los segmentos  $AD$  y  $BC$  no es

un punto en esta interpretación. No es difícil argumentar que esta interpretación también es un modelo de la Geometría de Incidencia y que en este modelo se cumple el Postulado Euclidiano de las Paralelas (aunque no así el Postulado Elíptico de las Paralelas). Así, la negación del Postulado Euclidiano de las Paralelas tampoco es una consecuencia de los Axiomas de Incidencia.

Cuando un enunciado y su negación no son consecuencias lógicas de un conjunto de axiomas, decimos que tal propiedad es *independiente* de los axiomas. Un Sistema Axiomático es *completo* si en él no hay enunciados independientes. Así, la Geometría de Incidencia es un sistema *incompleto*.

**Ejemplo 5.** Consideremos el siguiente diagrama.

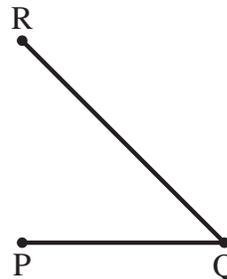


En esta interpretación, los *puntos* son los cinco vértices marcados con  $A, B, C, D$  y  $E$  y los diez segmentos entre estos puntos son las *líneas*. La *incidencia* es  $\in$ . No es difícil argumentar que esta interpretación también es un modelo de la Geometría de Incidencia y que en este modelo se cumple el **Postulado Hiperbólico de las Paralelas**: *para todo punto  $P$  y para toda línea  $l$  que no incide con  $P$ , existen por lo menos dos líneas que inciden con  $P$  y que son paralelas a  $l$ .*

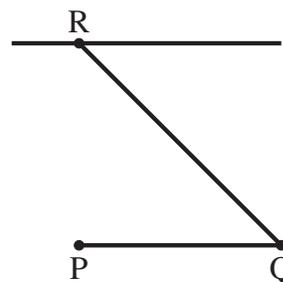
**Ejemplo 6.** Consideremos el conjunto de tres letras  $\{a, b, c\}$ , que son las líneas de esta interpretación. Los puntos son los tres subconjuntos de este conjunto que tienen exactamente dos elementos:  $\{a, b\}, \{a, c\}$  y  $\{b, c\}$ . La incidencia es  $\in$ . Por ejemplo,  $\{a, b\}$  es incidente con la línea  $a$  y con la línea  $b$ , más no con la línea  $c$ . Esta interpretación es un modelo de la Geometría de Incidencia. Más aún, es isomorfa a los modelos de los ejemplos 1 y 2, como lo hacen evidente las siguientes biyecciones:

$$\begin{array}{lcl} A \leftrightarrow \{a, b\} & \text{y} & \{A, B\} \leftrightarrow b \\ B \leftrightarrow \{b, c\} & & \{B, C\} \leftrightarrow c \\ C \leftrightarrow \{a, c\} & & \{A, C\} \leftrightarrow a \end{array}$$

**Ejemplo 7.** Por último, demostramos que los tres Axiomas de Incidencia son independientes. Para esto, mostramos tres modelos, en cada uno de los cuales se cumplen dos Axiomas de Incidencia y no el tercero.



En esta interpretación se cumplen AI 2 y AI 3, pero no AI 1.



En esta interpretación se cumplen AI 1 y AI 3, pero no AI 2.



En esta interpretación se cumplen AI 1 y AI 2, pero no AI 3.

## 5. CONCLUSIONES

Los modelos pueden demostrar la independencia de un enunciado de los axiomas dados en el sistema, es decir, pueden demostrar la imposibilidad de demostrar o refutar un enunciado de los axiomas. Además, si un Sistema Axiomático tiene modelos no isomorfos, como en nuestros ejemplos, entonces tal sistema tiene mayor versatilidad en cuanto a aplicaciones. La aplicabilidad de la Geometría de Incidencia toma forma con los *Planos Afines* y los *Planos Proyectivos*, los cuales son modelos de la Geometría de Incidencia que cumplen diferentes postulados de las paralelas.

Por otro lado, cuando todos los modelos de un Sistema Axiomático son isomorfos, decimos que los axiomas son *categoricos* y describen todas las propiedades del modelo. Un ejemplo de axiomas categoricos son los Axiomas de Euclides.

Por último, la **Teoría de Modelos** es el estudio de las clases de estructuras matemáticas (como los grupos, los campos, etc.) desde el punto de vista de la Lógica Matemática. La intención de este trabajo es “modelar” lo que significa la Teoría de Modelos por medio de la Geometría de Incidencia.

## REFERENCIAS

[1]Greenberg, M.J. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries. Development and History*, Tercera

Edición, W.H. Freeman and Company, 1993.  
[2]Mendelson, E. *Introduction to Mathematical Logic*, Cuarta Edición, Chapman & Hall, 1997.



Dr. Rubén Octavio Vélez Salazar

Realizó sus estudios de licenciatura, maestría y doctorado en matemáticas en la FCFM-BUAP, concluyendo en noviembre de 2014. Actualmente es Profesor en la FCFM-BUAP y en el Bachillerato 5 de mayo de la BUAP. Sus líneas de investigación son lógica y programación lógica.



---

## La función de dispersión para un potencial constante en un sistema uni-dimensional de un canal

Antonio Alejandro Fernández Marín

Instituto de Física  
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla  
Apartado Postal J-48, Puebla, Pue.  
C.P.72570 MEXICO  
antoniofdzm@gmail.com

---

### RESUMEN

En este trabajo obtendremos la función de dispersión para un potencial constante, que puede ser un pozo o una barrera. También describiremos algunas de las propiedades de esta función.

### 1. INTRODUCCIÓN

La dispersión (resonante) se encuentra en muchas áreas de la física que van desde la física nuclear [1] a las microondas [2]. La teoría de la dispersión junto con los datos de resonancia han permitido a los investigadores a entender los fenómenos de resonancia.

En este trabajo describimos la dispersión cuántica no relativista e independiente del tiempo en una dimensión para un potencial constante que se encuentra localizado en una cierta región del espacio. En general, físicamente un potencial dispersivo puede deberse a un potencial de interacción electrostática de partículas cuánticas, potenciales atómicos, o arreglos de pozos cuánticos, por ejemplo. La herramienta principal en la teoría de dispersión cuántica es la matriz de dispersión (introducida por Wheeler en 1937 [3]), debido a que contiene toda la información posible que se puede

extraer de un sistema dispersivo [4, 5, 6].

Siendo un potencial constante el que trataremos, obtendremos su función de dispersión en forma analítica. Sin embargo, en caso de tener un potencial arbitrario, la función de dispersión no se puede obtener analíticamente y por lo tanto es necesario recurrir a otros métodos. Por ejemplo, usando propagadores (métodos perturbativos como el de Lippmann Schwinger) [6], el método de la función de Green [4, 6] y el método de la Matriz de Transferencia [4, 7]. Por otro lado, tenemos aquellos que separan el espacio completo de Hilbert: el método de los operadores de proyección de Feshbach [8], el método de la matriz  $T$  [6, 9] y el método de la Teoría de la Matriz de Reacción [1, 10, 11, 12, 13]. Este último método (que fue introducida en la década de los 40's por E. P. Wigner y L. Eisenbud [12, 13] para el estudio de las reacciones nucleares basándose en la idea original de Kapur y Peierls [14]) ha sido ampliamente utilizado (desde su concepción) en la física nuclear así como en la física atómica [1, 10, 15, 16]. En la última década, la Teoría de la Matriz de Reacción también ha sido utilizada para estudiar transporte en sistemas caóticos cuánticos [11] y transporte en sistemas mesoscópicos [4].

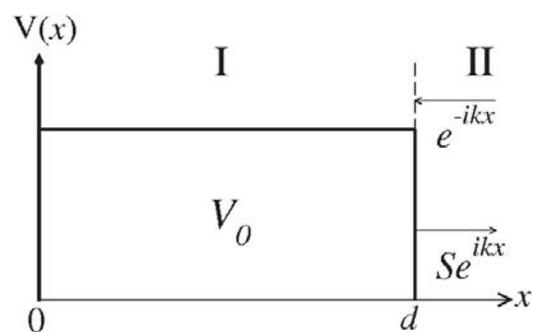
Nuestro trabajo está organizado de la siguiente manera. En primer lugar, en la Sec. 2 definimos los canales de dispersión, concepto fundamental en los fenómenos dispersivos. Posteriormente (Sec. 3) introduciremos la función de dispersión. En seguida, Sec. 4, deduciremos de una forma simple, pero formal, la función de dispersión para un potencial constante. Finalmente, en la Sec. 5 daremos nuestras conclusiones.

## 2. DEFINICIÓN DE CANAL

En la descripción de los fenómenos dispersivos se requiere de la definición de los llamados canales de dispersión (*Scattering channels*). Cada canal se identifica por un posible estado en la región asintótica, antes o después de la interacción con el potencial. Para sistemas nucleares, un canal puede corresponder a un grupo de partículas en un cierto estado definido por sus momentos angular, spinorial, etc.. En cambio, para una guía de ondas cuasi-unidimensional con dos terminales, el número de canales está dado por los modos de propagación en cada terminal.

El caso más simple es el de un solo canal o sistema semi-infinito. Esto ocurre en un sistema unidimensional donde el potencial dispersivo sólo permite reflexión. Si el sistema unidimensional permite la transmisión, entonces el sistema es de dos canales, el canal de reflexión y el de transmisión.

Un caso importante es el de sistemas dispersivos con simetría esférica, común en sistemas nucleares y atómicos. Esta simetría implica que la solución a la ecuación de Schrödinger es separable, en donde para cada momento angular se satisface su ecuación radial sujeta a la condición de frontera de Dirichlet en el origen. Es decir, para cada momento angular  $l$ , el sistema es efectivamente unidimensional con un solo canal, el canal de re-



**Figura 1.** Sistema dispersivo unidimensional que consiste de una barrera de potencial constante.  $x = d$  es la interfase donde se demanda continuidad de las funciones de onda entrante y saliente.

flexión y la matriz de dispersión  $S$  es entonces diagonal de tamaño  $l \times l$ .

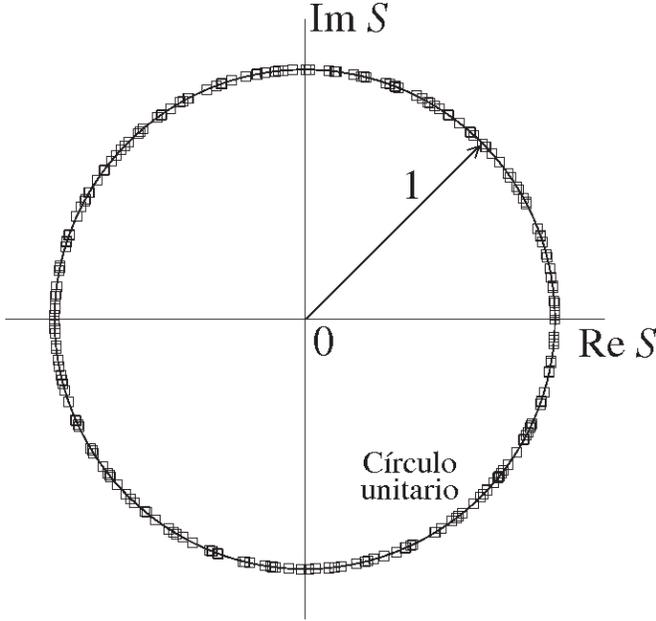
## 3. LA FUNCIÓN DE DISPERSIÓN

La función (matriz para muchos canales) de dispersión  $S$  [4, 5] es una herramienta fundamental en fenómenos de dispersión, esto debido a que, además de proporcionarnos *toda* la información posible en fenómenos de dispersión, es una cantidad que se puede medir experimentalmente. Matemáticamente, la  $S$  se puede representar a través de un operador que relaciona ondas que entran con ondas que salen en la región de interacción:

$$\beta = S\alpha, \quad (1)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son, en general, vectores cuyos elementos son los coeficientes de la onda entrante y saliente, respectivamente.

En general, cuando el sistema dispersivo conserva corriente, entonces la matriz (o función como en nuestro caso) de dispersión es unitaria ( $SS^\dagger = S^\dagger S = 1$ ). Si además, el potencial dispersivo es hermítico, entonces, el sistema tiene la propiedad de ser invariante bajo simetría inverso-temporal y consecuentemente, la matriz  $S$  es simétrica ( $S =$



**Figura 2.** Distribución de la fase de la función de dispersión en el plano complejo de la energía. En este caso hemos considerado un pozo [barrera] de potencial constante con  $d=2.5$  y  $V_0 = -9$  [ $V_0 = 9$ ] cuyos resultados son representados por una curva continua [símbolos abiertos].

$S^T$ ). La condición de la unitariedad de  $S$ , implica que sus eigenvalores son distribuidos sobre un círculo de radio uno (ver Fig. 2), por lo tanto, éstos pueden ser representados en términos de una fase, como  $e^{2i\xi_j}$ , con  $\xi_j$  real,  $j = 1, 2, \dots, M$  ( $M$  número de canales).

#### 4. SOLUCIÓN EXACTA

Vamos a suponer que la partícula (masa  $\mu$ ) no tiene espín, el cual interactúa con un potencial unidimensional dispersivo constante, como se muestra en la Fig. 1. Sin pérdida de generalidad escogemos incidencia por la derecha y que en  $x = 0$  se encuentra una pared impenetrable tal que la partícula es reflejada nuevamente a la derecha por dicha pared. El potencial dispersivo será  $V_0 \neq 0$  en la región  $0 \leq x \leq d$  y  $V_0 = 0$  en otro lado. Aquí,  $d$  (rango del potencial) denota el punto a partir del cual el potencial se anula y por consiguiente, a la

derecha de  $d$  la partícula es libre (ver Fig. 1). Supondremos además, que la partícula incide con una energía  $E$  y vector de onda  $k = \sqrt{2\mu E}/\hbar$  y  $\hbar$  es la constante de Planck.

Entonces, la ecuación de Schrödinger que satisface la función de onda es

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_0 \right] \Phi(k; x) = E\Phi(k; x). \quad (2)$$

La solución de (2) se puede separar en dos; una correspondiente a la región I (comúnmente llamada región interna o de reacción) y otra en la región II (comúnmente llamada región externa o asintótica), ver Fig. 1. Entonces, en la región interna la solución se puede escribir como

$$\Phi_I(k; x) = B \sin(qx), \quad (3)$$

cumpliendo con la condición de frontera de Dirichlet en el origen:  $\Phi_I(k; 0) = 0$ . Aquí,  $B$  es una constante de normalización que depende de la energía y  $q = \sqrt{k^2 - 2\mu V_0/\hbar^2}$ .

En la región asintótica, en cambio, la partícula es completamente libre y por lo tanto su función de onda es una combinación lineal de ondas planas (ver Fig. 1)

$$\Phi_{II}(k; x > d) = e^{-ikx} + S e^{ikx}, \quad (4)$$

donde  $S$  es la función de dispersión.

A continuación vamos a obtener la función  $S$ . Para ello demandamos continuidad en la interfase,  $x = d$ , entre la función de onda interna (3) y la función de onda asintótica (4):

$$\frac{\Phi_I(k, d)}{\partial_x \Phi_I(k, d)} = \frac{B \sin(qd)}{Bq \cos(qd)} = \frac{e^{-ikd} + S e^{ikd}}{ik(-e^{-ikd} + S e^{ikd})}. \quad (5)$$

Resolviendo para  $S$  en esta última ecuación, obte-

nemos

$$S = -e^{-2ikd} \frac{1 + ik \tan(qd)/q}{1 - ik \tan(qd)/q}. \quad (6)$$

Así mismo,  $B = (e^{-ikd} + S e^{ikd}) / \sin(qd)$ .

De (6) es fácil ver que  $S$  es unitaria ( $SS^* = 1$ ) y entonces, la podemos escribir en términos de una fase:  $S = -e^{2i\theta}$ , en donde, después de un poco de trabajo algebraico, obtenemos  $\theta = -kd + \arctan(\frac{k}{q} \tan(qd))$ .

La importancia de conocer la fase  $\theta$ , radica en que en ella se encuentra casi toda la información física accesible a la medición experimental. Por ejemplo, una de las cantidades de mayor interés en la física nuclear (y otras áreas de la física) es el **tiempo de demora**,  $\tau(E)$ , el cual fue introducido por Eisenbud y Wigner en el sistema de un canal [17, 18]. Ellos definieron el tiempo de demora como

$$\tau(E) = \hbar \frac{d\theta}{dE}. \quad (7)$$

Notemos que la expresión (7) indica que el tiempo de demora es proporcional a la rapidez con que cambia la fase de  $S$  con la energía. Por otro lado, este tiempo se interpreta como el tiempo *típico* gastado por una partícula dispersada en la región de reacción. El tiempo de demora lo podemos entender de la siguiente manera: sea  $t_i$  el tiempo que *demora* una partícula (de masa  $\mu$ ) en cruzar la región de interacción cuando existe un potencial y sea  $t_0$  el tiempo que *demora* en cruzar la misma región de interacción pero ahora sin ningún potencial. La diferencia  $\tau \equiv t_i - t_0$  es el tiempo de demora o de retraso. Este tiempo puede ser positivo o negativo. Un tiempo de retraso positivo nos indica que la partícula interactuante es *detenida* en la región de interacción. Un tiempo de demora

negativo indica que la partícula interactuante es acelerada durante la interacción. Físicamente se espera que  $t_i - t_0 \rightarrow 0$  cuando  $E \rightarrow \infty$ , esto debido a que la partícula/onda gradualmente dejará de sentir la presencia del potencial conforme aumenta su energía, y por lo tanto no sufrirá ya ninguna demora en cruzar la región de interacción.

## 5. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos tratado el problema de la dispersión de una partícula por un potencial constante en el sistema semi-infinito o de un canal. En primer lugar hemos definido el concepto de canal, fundamental en la descripción y comprensión de los fenómenos dispersivos. También hemos descrito la función de dispersión  $S$  así como las simetrías que satisface cuando el sistema conserva corriente y es invariante ante simetría inverso-temporal. Además hemos obtenido la función de dispersión para un potencial constante y hemos introducido la definición del tiempo de demora. Este tiempo es muy importante ya que está directamente relacionado con la anchura de las resonancias como  $\Gamma \propto 1/\tau(E_0)$ , donde  $E_0$  denota la posición de la energía resonante.

## REFERENCIAS

- [1] A. M. Lane y R. G. Thomas, *Rev. Modern Phys.* **30**, 257 (1958).
- [2] S. Barkhofen, T. Weich, A. Potzuweit, H.-J. Stöckmann, U. Kuhl, y M. Zworski, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 164102 (2013).
- [3] John A. Wheeler, *Phys. Rev.* **17**, 1107 (1937).
- [4] Pier A. Mello y Narendra Kumar, eds., *Quantum Transport in Mesoscopic Systems: Complexity and Statistical Fluctuation*, OXFORD University Press, OXFORD (2004).
- [5] R. G. Newton, *Scattering Theory of Waves and Particles* (Springer-Verlag, New York, 1982), segunda edición.

- [6]J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics* (Addison-Wesley, 2010), segunda edición.
- [7]P. Markoš y C. M. Soukoulis, *Wave Propagation. From Electrostatics to Photonic Crystals and Left-Handed Materials* (Princeton, New Jersey, 2008).
- [8]H. Feshbach, *Ann. Phys.* **5**, 357 (1958). *Ann. Phys.* **19**, 287 (1962). *Rev. Mod. Phys.* **36**, 1076 (1964).
- [9]A. Messiah, *Quantum Mechanics*, Vol. 1, John Wiley and Sons, New York (1962).
- [10]P. Descouvemont y D. Baye, *Rep. Prog. Phys.* **73**, 036301 (2010).
- [11]Linda E. Reichl, *The Transition to Chaos, Conservative Classical Systems and Quantum Manifestations, 2a Ed.*, Springer, (2004).
- [12]E. P. Wigner, *Phys. Rev.* **70**, 15 (1946). *Phys. Rev.* **70**, 606 (1946).
- [13]E. P. Wigner y L. Eisenbud, *Phys. Rev.* **72**, 29 (1947).
- [14]P. L. Kapur y R. Peierls, *Proc. Roy. Soc. London A* **166**, 227 (1938).
- [15]P. G. Burke, C. J. Noble y V. M. Burke, *Adv. At. Mol. Opt. Phys.* **54**, 237 (2007).
- [16]P. G. Burke, *R-Matrix Theory of Atomic Collisions: Application to Atomic, Molecular and Optical Processes* (Berlin: Springer, 2011).
- [17]L. E. Eisenbud, Ph.D thesis, Princeton University, (1948). E. P. Wigner, *Phys. Rev.* **98**, 145 (1955).
- [18]Felix. T. Smith, *Phys. Rev.* **118**, 349 (1960).



Dr. Antonio Alejandro Fernández Marín

Realizó sus estudios de licenciatura en la FCFM-BUAP, posteriormente obtuvo el grado de Maestro y de Doctor en ciencias (física) en el IF-BUAP. Actualmente realiza una estancia posdoctoral con el cuerpo académico “Fenómenos Ópticos y de Transporte en la Materia” de la UAM-I. Su línea de investigación es el transporte electrónico de sistemas dispersivos cuánticos y clásicos



XI ESCUELA DE MATEMÁTICAS DE AMÉRICA LATINA Y EL CARIBE

DEL 15 AL 26 DE JUNIO DE 2015 PUEBLA, MÉXICO.

<http://www.fcfm.buap.mx/ema2015/>

## Dr. Gerardo Francisco Torres del Castillo



El Doctor Gerardo Torres del Castillo nació en Guadalajara, Jalisco, en 1956. Es físico egresado de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemrita Universidad Autónoma de Puebla en 1976. Obtuvo sus grados de maestría y doctorado en ciencias (física) en el Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional en 1979 y 1982 respectivamente, en los que realizó tesis bajo la asesoría del Dr. Jerzy Plebański. Becado por el gobierno británico realizó una estancia posdoctoral, 1986-1987, en la Universidad de Oxford con el grupo de física matemática del profesor Penrose. Desde 1981 es Profesor investigador en la BUAP. Ha obtenido diversas distinciones: la Medalla Académica de la Sociedad Mexicana de Física en 1991, el Premio de Investigación en el área de ciencias exactas de la Academia Mexicana de Ciencias en 1996, la Medalla Francisco Javier Clavijero por parte de la Universidad Autónoma de Puebla en 1996, el Premio Estatal de Ciencias Naturales y Exactas del Consejo Estatal de Ciencia y Tecnología de Puebla en 2000, el premio Gilberto Castellanos Tenorio al mérito docente de educación superior otorgado por la SEP del Gobierno del Estado de Puebla en 2008, se creó por parte de la Universidad Politécnica de Puebla (UTP) el reconocimiento “Dr. Gerardo Torres del Castillo” para reconocer el desempeño de sus profesores y alumnos en 2008 y se le asignó el nombre “Dr. Gerardo Torres del Castillo” al Aula Magna del Laboratorio de Tecnologías de la Información y Comunicación de la UTP en 2010 entre otras distinciones.

### ¿Qué lo motivó a estudiar una carrera científica?

Cuando yo estaba en la secundaria ni idea de que existía una profesión como la física o las matemáticas, realmente no sé qué pensaba en aquel momento. Lo tradicional era pensar en médicos, en ingenieros, en cosas muy tradicionales. La secundaria y buena parte de la preparatoria la estudié en Guanajuato, en aquellos tiempos el panorama educativo y cultural era demasiado limitado. Yo me enteré en el libro de física de tercero de secundaria. Al final de éste, curiosamente, venían unas páginas con información sobre las carreras relacionadas con física y venía información sobre los programas de física de la UNAM. Fue entonces que me enteré que existía una carrera de ese tipo,

pero me pareció lejano e irrealizable, yo viviendo con mi familia en León ir a estudiar a la UNAM parecía imposible. Desde esa época me interesó el estudio de la física, pero de la misma manera en la que uno puede ser bueno en inglés o en alguna otra materia sin que uno piense realmente en dedicarse a ello. Quizás estudiar ingeniería que sonaría más conocido y mi panorama era más bien en ese sentido, incluso ahí en Guanajuato creo que no había posibilidad de estudiar ingeniería, la gente se iba al Poli a estudiar en esos tiempos, estamos hablando de 1971, realmente no sé en que momento surgió la idea de una carrera científica. Cuando vine a estudiar a Puebla el segundo año de la preparatoria, entonces solo eran dos años los que se tenían que cursar, se fue definiendo más mi interés por la astronomía, algunos años antes me había encontrado

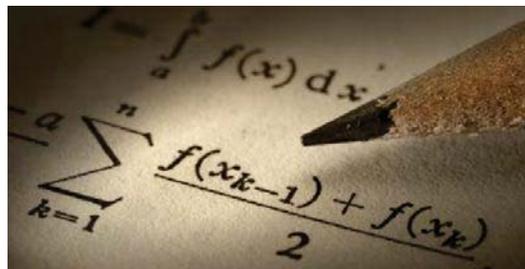
un libro de divulgación y me había interesado y luego al enterarme que aquí en Puebla había una carrera en física todo se unió de tal forma que pudiera efectivamente seguir esa línea. Entonces cuando yo entre a la escuela de física fue con la intención de dedicarme a la astronomía pero ya en el camino hubo otras cosas que me llamaron la atención. Pero yo diría que fue en la preparatoria cuando, gracias a la afición por el conocimiento de la astronomía, pensé en dedicarme a eso.

### ¿Hay alguna anécdota que recuerde con gusto sobre su época de estudiante?

Cuando estaba en primer año de preparatoria me enteré que existía algo que se llamaba el doctorado, es decir no sé si en Guanajuato en aquellos tiempos era algo raro o solamente en mi medio era extraño oír algo acerca de una maestría o de un doctorado. No sé por qué razón un día un maestro de electricidad en una clase empezó a hablar de esas posibilidades que uno podía hacer una carrera profesional y después seguir estudiando hasta obtener un doctorado, entonces fue para mí como si a un niño le dijeran hay un lugar donde tienes juegos y dulces a tu antojo, yo no vi cual fue mi reacción pero lo cierto es que el profesor empezó a incomodarse porque yo estaba contentísimo, extasiado de escuchar lo que él decía. Él empezó a acomodarse el cabello porque pensaba que me estaba burlando de él o algo así. Ya cuando terminó la clase me llamó para ver qué pasaba, le dije que no era nada, pero tampoco le explique qué me había emocionado porque jamás había sospechado que hubiera una cosa como eso. Fue una revelación en cierta forma, no era que pensara en estudiar el doctorado en ese momento, pero saber que existen esas posibilidades fue una revelación, era algo nuevo que sonaba muy interesante continuar estudiando mucho más tiempo.

### ¿Es verdad que el estudio de la ciencia está destinado sólo a unos pocos?

Depende de en qué grado lo veamos, es decir, yo creo que todos tenemos alguna capacidad o aptitud para algunas cosas y para otras en cambio no las tenemos. Yo creo que un conocimiento básico acerca de la ciencia es algo que cualquier persona puede llegar a manejar, es como si uno hablara de conceptos de medicina, uno puede estar familiarizado con síntomas de alguna enfermedad o cosas así sin que uno tenga que ser médico o mucho menos un especialista. Yo creo que en principio sí, todo mundo estaría en capacidad de comprender muchos conceptos físicos, matemáticos o de la ciencia y yo creo que es la educación la que hace que mucho de esto no se logre. Es decir, regresando a mi época de secundaria o preparatoria, yo creo que la forma como se enseñó en mí, lo cual creo por desgracia es algo común y termina haciendo que uno odie muchas materias que pudieran ser muy interesantes. Por ejemplo yo no recuerdo un gusto por las clases de biología que podrían haber sido más interesantes o más informativas y yo no creo que haya sido falta de capacidad sino más bien no fue una presentación adecuada de estas cosas. Ya una cosa diferente es dedicarse de manera profesional a las ciencias, ahí es donde pudiera haber muchas diferencias. Que bueno que no todos son científicos, existen muchas otras actividades en la vida que son necesarias para que la sociedad se desarrolle.



---

## ¿Cuál es su área de investigación y en qué consiste?

Tratando de resumirlo en pocas palabras lo que trato de hacer es ver que aplicaciones interesantes de las matemáticas se pueden dar dentro de la física y cuando digo interesantes me refiero a que en la física o casi en cualquier otra ciencia del conocimiento, las matemáticas siempre se emplean, quizá algunas herramientas de la estadística, o cosas así. Pero en el caso de la física hay muchos temas avanzados de las matemáticas que ahí se aplican, se desarrollan y se motivan para que la matemática se siga desarrollando, entonces lo que a mí me ha interesado es eso, esencialmente, ver problemas de física en donde las matemáticas sofisticadas (matemáticas no elementales, cosas como los grupos de Lie, geometría Riemanniana, cosas que se hayan desarrollado en las últimas etapas del desarrollo de las matemáticas) se pueden emplear, en términos generales esa sería la idea de lo que hago. En ocasiones tiene que ver con mecánica cuántica, con electromagnetismo, o sea no hay desde el punto de vista de la física algo muy definido, sino más bien cualquier cosa en donde las matemáticas se puedan emplear de forma interesante.

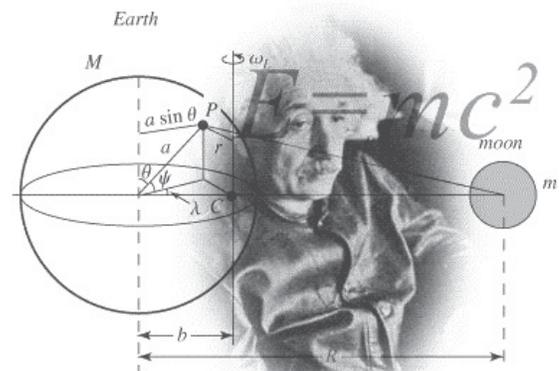
## ¿Cómo decidió especializarse en esta área?

Lo que ocurrió cuando estuve en la licenciatura es que al mismo tiempo que me olvidaba un poquito de la astronomía, que fue mi principal motor, fui conociendo más de la física y de las matemáticas, entonces me intereso conocer más cosas de matemáticas que un físico regularmente no lleva como topología, geometría diferencial, teoría de grupos, etc. Entonces eso fue lo que desarrollo en mí ese interés, esa cuestión de en donde se podría ver en forma más palpable la aplicación de las matemáticas, no como algo abstracto, sino como algo

ya más aplicado por lo menos en ese sentido.

## ¿Qué aspectos de su trabajo son los que más le agradan y cuáles no?

Quizá de lo que uno regularmente más se queja es de las cuestiones burocráticas, eso de estar llenando informes no resulta muy atractivo. De ahí en más creo que es bastante agradable lo que hago, es decir que por desgracia o por fortuna tengo que dormir unas cuantas horas al día, de lo contrario me podría parar las 24 hrs. alrededor de lo mismo, leyendo, tratando de escribir, dando clase y todo esto es bastante agradable y recompensante y todo está ligado. Uno puede ver los aspectos en donde la enseñanza y la investigación se pueden reforzar entre sí, entonces para mí continuamente el estar en clase me sirve para entender y explicar conceptos y las dos cosas pueden llevarse maravillosamente y creo que a mí me han funcionado muy bien.



## ¿Cuáles son sus proyectos actuales?

El proyecto que más me ocupa o me preocupa es terminar un libro sobre mecánica clásica analítica que lleva más de un año en proceso, esperaba que en un plazo de un año se llevaría a cabo, pero

parece que va a tomarme mucho más. En cuanto a metas bien definidas, este sería el único, las demás investigaciones que hago son cosas que van surgiendo sobre la marcha, es decir, en muchas ocasiones de repente por ahí en clase sale alguna idea, a lo mejor leyendo algún artículo se me ocurre algo y puede desarrollarse y posiblemente presentar un artículo en un plazo de dos meses o algo así, pero son cosas que van surgiendo en forma no planeada. La única meta bien definida es la de terminar el libro sobre mecánica clásica analítica que es medianamente elemental, está planeado para la segunda mitad de la licenciatura en física a diferencia de los tres textos que me han publicado que están dedicados a investigadores o posgrado.

### **¿Cuáles son las posibles aplicaciones de su línea de investigación?**

Aquí las aplicaciones serían dentro de la misma teoría, es decir, lo que hago yo, por desgracia, no se ve una trascendencia a corto plazo o clara, no es una cosa que la gente pueda ver o palpar; digo por desgracia porque sería muy agradable que uno pudiera hacer cosas que tengan ese carácter. Pero creo que lo que se hace en el campo teórico también tiene su valor fundamental, porque finalmente lo que se haga en áreas un poquito más aplicables debe tener su base en cuestiones teóricas. Las aplicaciones en este caso estarían dentro de la misma física y matemática; es como en la topología algebraica que una aplicación pudiera ser la demostración del teorema fundamental del álgebra, entonces la aplicación no se sale de la matemática fundamentalmente, pero si una cosa puede servir para otra cosa diferente y es en ese sentido que espero que el trabajo que yo haga pueda servir.

### **¿Sólo la ciencia que se aplica sirve?**

Depende de que se entienda por servir, es como decir que de un árbol lo único que sirve son los frutos, suponiendo que sí, de todos modos no vamos a tener los frutos ahí volando en el aire, necesitamos una raíz y de muchas cosas para que se pueda desarrollar. Entonces las cosas muy aplicadas que pudieran tener que ver con la tecnología y cosas así requieren de conocimientos básicos y es algo que desde hace mucho tiempo se ha reconocido, sobre todo en los países más desarrollados, por ejemplo en Francia en la época de la revolución, la idea era crear escuelas politécnicas en donde gente muy preparada como Lagrange o Cauchy o gente así que estaba haciendo matemática fundamental, pero quizá enseñando a ingenieros para que tuvieran una preparación sólida para que finalmente pudieran hacer aplicaciones. Dudo que se pudiera hacer algo aplicable sin esta parte fundamental yo creo que tiene su profundo interés en cuanto a lo que de forma global la humanidad requiere en cierta forma el conocimiento.

### **¿Por qué es importante hacer ciencia en México?**

Para comenzar no estoy tan seguro de que se le ha impulsado debidamente, lo que yo creo que ha hecho más falta tiene que ver con lo que mencionaba hace rato, que hubiera una mejor preparación desde los niveles básicos para que más gente descubriera sus aptitudes y las pudiera desarrollar. El hecho es que hasta ahora la gente que tiene o que ha tenido interés por estudiar las ciencias lo ha logrado. Digamos si yo desde la licenciatura hubiese tenido que pagar los estudios o los estudios de posgrado, difícilmente lo habría logrado, afortunadamente tenemos universidades públicas hay becas para los estudios, el CONACYT tiene por lo menos unos 30 o 40 años entonces hay apoyo para que la gente pueda estudiar. Más bien lo que ha faltado es la oportunidad para que la gente que se

---

ha formado tanto en el extranjero como aquí pueda ser aprovechada para aplicar sus conocimientos y ahí la pregunta es de donde viene esa falta, de que ha dependido que no tengamos una ciencia propia que finalmente pueda desarrollar cosas aplicadas como ocurren en los países desarrollados, que por eso son desarrollados. Creo que por un lado la ciencia en México es algo relativamente joven, es decir, muchas carreras se han venido desarrollando en las últimas décadas, hasta hace 30 o 40 años casi todo estaba concentrado en la UNAM, en el POLI en el DF en general. La situación ha cambiado en los últimos años, ya hay carreras de ciencias químicas, biología, física en muchos lugares del país y digamos que apenas estamos en una etapa de consolidación en cuanto al material básico, la diferencia es que en otros países la física o la matemática tienen 300 o 400 años que se han venido cultivando cosa que difícilmente podríamos decir del caso de México, quizá es cosa de tiempo que la idea misma vaya extendiéndose en la población de nuestro país para que la gente que estamos en este medio vayamos pensando en un paso adicional, en el pasado se cuestionaba que la iniciativa privada no buscaba nuestro conocimiento como para generar una industria nacional y la pregunta es si tenemos que esperar a que vengan a buscarnos o nosotros tenemos que salir a mostrar lo que sabemos. Si lo vemos del lado de los industriales a lo mejor no se ve muy redituable el invertir en una investigación. Más bien lo que hace falta es que cuando una vez que se llegue a una masa crítica la gente preparada tendrá que salir. Ahorita lo tradicional era que la gente que estudiaba física o matemáticas debía pensar en dar clases o investigar en alguna universidad o en algún centro de este tipo. Pero llega el momento en que todo eso se empieza a saturar y es necesario que la gente salga de las universidades y busque otras ocupaciones otros ámbitos de trabajo, cuando eso ocurra poco a poquito se va a ir extendiendo esta preparación

que finalmente puede llegar a donde se requiere para que las cosas se desarrollen, es decir, lo aplicado puede ser hasta algo muy elemental, no se requieren grandes conocimientos de estadística o de topología para hacer un desarrollo industrial, lo que se requiere es la habilidad para ver qué es lo que se puede hacer. Si uno piensa en los avances, en las patentes y cosas así, hay de todo, no necesariamente las patentes son ideas muy complicadas, por ejemplo ponerle ruedas a una maleta es algo que es motivo de una patente que deja mucho dinero, poner limpiadores en los automóviles para los parabrisas que se puedan regular en cuanto a la velocidad, es algo que se patenta y deja mucho dinero y no parece gran ciencia. Entonces precisamente la preparación que la gente tiene al momento de ir expandiendo, esto va a poder llegar a donde se necesita para lograr este desarrollo que hasta ahora ha estado ausente en nuestro país.

**¿Cuál es su perspectiva del desarrollo científico en la BUAP y en el estado? ¿Cuáles son los principales desafíos que se deben enfrentar?**

Es lo mismo que mencionaba hace rato, es decir, no creo que la universidad en particular o el estado difiera mucho de lo que se requiere en general en el país, como dije antes es importante que mejore la educación desde los niveles más básicos porque de otra manera están echando a perder el talento que por ahí está. Pensemos en el caso del deporte, no habrá entre los jóvenes gente con capacidad para destacar en atletismo o en alguna otra cosa, yo pensaría que sí, pero no hay las condiciones para que se desarrolle. Lo mismo pasa con la ciencia. Si desde muy temprana edad en los jóvenes se da una adecuada preparación y formación en todos los temas, es decir, precisamente para dar opciones, para que la gente busque lo que le llama la atención y para lo que es bueno, podemos mejorar muchísimo en todo el país y en todos los

ámbitos.

## ¿Cuál es su mayor satisfacción a nivel profesional?

Es difícil decir algo que me llene más que otras cosas, no discriminaría. Lo que he podido hacer es bastante satisfactorio. Cuando llego a leer cosas que escribí hace 20 o 30 años a veces resulta sorprendente decir, yo hice eso. Pero en general es bastante satisfactorio lo que uno hace en este trabajo.



## ¿Cuáles son sus proyectos a futuro?

Seguir explorando el terreno de la mecánica clásica y ver qué otras cosas se puede ir descubriendo en ese terreno, a muy corto plazo eso es lo que me atrae más. Quizá en algún tiempo la cosa vaya modificándose, digo por ejemplo durante un tiempo durante mi maestría y mi doctorado mi línea de investigación fue la Relatividad General, la Teoría de Einstein de la gravitación y durante algunos años en mis principios como investigador la mayor parte de mi trabajo tenía que ver con esa línea, después han ido surgiendo otras cosas que me atraen más y ha habido resultados que me parecen más interesantes así es que no descartaría que en 6 meses o un año me dedicara a otra cosa ligeramente diferente por lo menos.

## ¿Qué mensaje les daría a los jóvenes investigadores y estudiantes que se están iniciando en el mundo de la ciencia?

La recomendación general es que hay que aprovechar todo el tiempo, eso no significa que hay que estar estudiando 10 horas diarias, sino que hay muchísimas cosas que dependiendo de cada quien nos pueden interesar o que pueden ayudar a desarrollarnos y en eso hay que concentrarnos. La lectura es algo fundamental y el enemigo más grande es la falta de interés, la apatía, la falta de entusiasmo. Siempre es importante que uno haga lo que haga hay que buscar el desarrollo personal. Eso es fundamental independientemente de en qué termine la vida de cada joven; es importante desarrollar el potencial, reconocer para que es bueno cada quien y que ojalá que tuviera cada uno las facilidades para que se puedan desarrollar. Por ejemplo, gracias a estar aquí en Puebla y que aquí existía la carrera de Física y Matemáticas, puede encontrar algo que me gusta muchísimo y a lo que me puedo dedicar desde las 7 de la mañana hasta las 12 de la noche. Ojalá que todo mundo encuentre lo que le atrae y que haga su esfuerzo por no estancarse y todos los días es mucho lo que podemos hacer, aprender y demás.

El comité editorial agradece al Dr. Torres del Castillo la amabilidad que ha tenido al dedicar parte de su valioso tiempo a esta entrevista.



## El misterio del número de las semillas de girasol

Fernanda López Montes<sup>1</sup> y Ángeles Carranza Cisneros<sup>2</sup>

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas  
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla  
C.U. Avenida San Claudio y 18 Sur,  
Colonia San Manuel, Puebla, Pue.  
C.P.72570 MEXICO

<sup>1</sup> falzms.91@gmail.com

<sup>2</sup> macarranza96@hotmail.com

### RESUMEN

En este artículo, invitamos al lector a realizar con nosotros una visita rápida al fascinante mundo de la sucesión de Fibonacci que es una de esas historias que merece una mirada fresca, de vez en cuando, para recordarnos la inagotable belleza que encierran las matemáticas. Uno de los aspectos más relevantes de la sucesión es que se presenta muy a menudo y probablemente sin que nos demos cuenta, en la aparición constante de la naturaleza, en particular en los girasoles, desde la forma en que sus pétalos siguen el sol, hasta el secreto matemático que encierran sus espirales.

### 1. INTRODUCCIÓN

El número de Fibonacci es una sucesión de cifras que ha dado lugar a no pocas teorías, demostrándose que esta sucesión está presente en la naturaleza de forma estable, ya sea en la organización de los panales de las abejas, o incluso en la descendencia de los zánganos.

**Leonardo de Pisa**, más conocido en el mundo de las matemáticas como *Fibonacci*, es el protagonista principal de esta historia. Fue un calculista que nació y murió en la ciudad de Pisa, Italia, del 1175 a 1240. Dedicó su vida a recopilar todas las

enseñanzas que recogió en sus numerosos viajes al mundo árabe, de quienes difundió sus principios de cálculo en el mundo occidental. A esta presentación agregó una explicación de procedimientos algebraicos y aplicaciones a numerosos problemas.

Era hijo de Bonaccio, de ahí su nombre **Fibonacci** que significa "hijo de Bonaccio". De su padre aprendió todo lo referente a los números, ya que era director de una aduana en Argelia. Bonaccio, necesitaba que su hijo supiese de números, por lo que le obligó a estudiar aritmética posicional hindú.

### 2. SUCESIÓN DE FIBONACCI

**Fibonacci** es uno de los nombres más evocadores en el mundo de las matemáticas, pero sin duda por lo que más se le conoce es por idear la sucesión de números que lleva su nombre, la cual fue dada a conocer en su libro *Liber Abaci* o Libro del ábaco, publicado en 1202, donde introducía de forma efectiva la notación posicional y los números hindú-arábigos en la aritmética europea. Fibonacci no fue el primero en adoptar las ventajas de esta numeración, sin embargo, contribuyó con su prestigio a que fuera adoptada de forma generalizada

por los matemáticos occidentales.

El libro se basaba en los conocimientos sobre la aritmética y el álgebra que Fibonacci había acumulado durante sus viajes. Sin embargo, fue **Édouard Lucas** quien describió varias propiedades de esta sucesión y es el responsable de haberla denominado como se le conoce en la actualidad.

Como sucede muchas veces en la historia de las matemáticas, el principio de todo es un humilde problema en apariencia bastante trivial que, en este caso, dice así:

“Cierta pareja tenía una pareja de conejos en un lugar cerrado y deseaba saber cuántos se podrían reproducir en un año a partir de la pareja inicial, teniendo en cuenta que de forma natural tienen una pareja en un mes y suponiendo que ninguno muere, y que a partir del segundo se empiezan a reproducir”.

Si consideramos los primeros meses es fácil notar que al término de cada mes los números de pares van formando la siguiente sucesión infinita de números naturales: 1,1,2,3,5,8,13,21,34,... donde cada número, como el propio Fibonacci hizo notar, resultan de sumar los dos que le anteceden. Esta sucesión sigue una fórmula sencilla:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Haciendo uso de esta fórmula, podemos calcular de forma recursiva cualquier número de Fibonacci.

En 1753 Robert Simson, profesor de la Universidad de Glasgow, se dió cuenta de que aunque los números de la sucesión crecían ilimitadamente, el cociente entre dos números consecutivos de la sucesión parecía aproximarse mas y mas a lo que hoy conocemos como **razón áurea**, lo que podemos

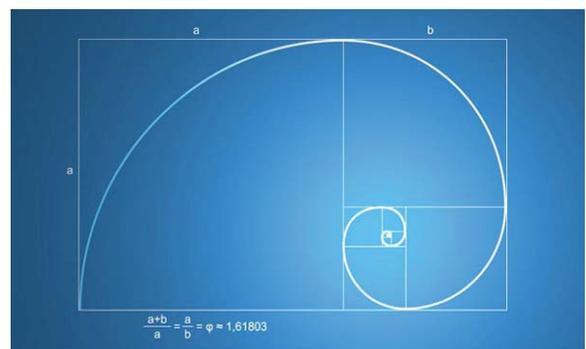
expresar como:

$$\phi = \lim_{n \rightarrow \infty} (F_{n+1}/F_n)$$

A partir de dicha sucesión podemos construir un rectángulo áureo de la siguiente manera, empezamos con un cuadrado de lado 1, los dos primeros términos de la sucesión, construimos otro igual sobre él del cual tenemos ya un primer rectángulo Fibonacci de dimensiones  $2 \times 1$ , sobre el lado de dos unidades construimos un cuadrado y tenemos un nuevo rectángulo de  $3 \times 2$ , sobre el lado mayor construimos otro cuadrado, tenemos ahora un rectángulo  $5 \times 3$ , luego uno  $8 \times 5$ ,  $13 \times 8$ ,  $21 \times 13$ ... podemos llegar a rectángulos de  $34 \times 21$ , de  $55 \times 34$  cuanto más avancemos en este proceso más nos aproximamos al rectángulo áureo.

Hemos construido así una sucesión de rectángulos, cuyas dimensiones partiendo del cuadrado  $1 \times 1$ , pasan al rectángulo de dimensiones  $2 \times 1$ , al de  $3 \times 2$ , y avanzan de forma inexorable hacia el rectángulo áureo.

Si unimos los vértices diagonales de los cuadrados dibujados por medio de cuartos de circunferencia, obtendremos la siguiente figura:



A la espiral que resulta se le denomina *Espiral de Durero*, donde el radio se incrementa en un factor  $\phi$  cada cuarto de vuelta. Los rectángulos áureos

se ven bien proporcionados, y producen un efecto estético, por lo general, estos objetos también son funcionales, por lo que muchos de nuestros objetos rectangulares, tales como libros, cajas de fósforos, tarjetas de crédito, tienen esta forma particular.

### 3. LA SUCESIÓN DE FIBONACCI EN LA NATURALEZA Y EN OTRAS APLICACIONES

En el mundo de la ciencia se destaca la famosa teoría de la evolución de Darwin en la cual se detalla el proceso de selección natural. Sin embargo, a pesar de sus muchos atributos, tal teoría no explica por qué los organismos tienen la forma que tienen y no otra. A finales del siglo XVII y a principios del siglo XIX en la escuela conocida como la de *Morfología racional*, varios biólogos, naturistas y pensadores estudiaron dicho caso. De acuerdo a *Hans Driesch* (1894): "...buscaron construir aquello que era lo típico (genérico) en las variedades de las formas vivas mediante un sistema que no fuera determinado históricamente, si no que debería ser inteligible desde un punto de vista racional."

Los números de Fibonacci como ya hemos mencionado aparecen de forma curiosa en la estructura de la distribución de las semillas de algunas plantas, en las corolas de muchas flores, en la disposición de las espinas de algunos cactus, e incluso en la estructura de ramificación de muchas plantas.

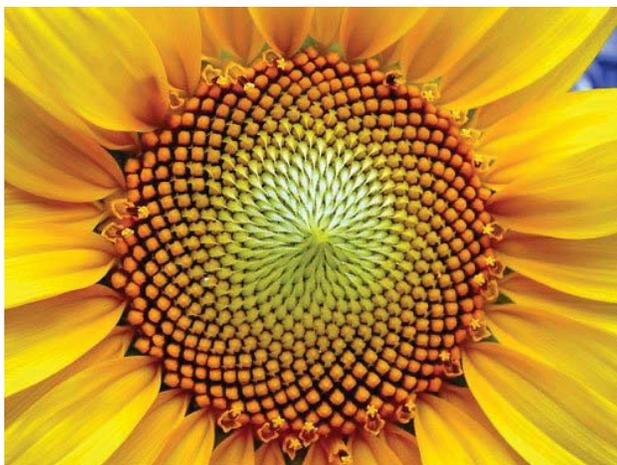
El *Helianthus annulus*, un tipo de girasol, es el ejemplo más llamativo del primer caso. Si miramos con detenimiento, podemos ver que sus pipas siguen una distribución ordenada, formando líneas espirales que parten de la zona central y se abren hacia fuera. Se pueden distinguir dos tipos de espirales, unas levógiras y otras dextrógiras, y ambas están imbricadas de tal forma que producen un empaquetamiento regular de las semillas.

Si contamos las espirales de cada tipo, casi siempre obtenemos, sorprendentemente, dos números de Fibonacci consecutivos: 13 y 21, 21 y 34, o 34 y 55. Este no es un hecho aislado, podremos comprobar que la misma distribución aparece en las semillas de muchas flores, y también en las piñas de algunas coníferas.

Ahora nos podemos preguntar, ¿Cómo hace el girasol para disponer de tal manera las semillas? Cuando nace una semilla, parte del punto central del girasol va siendo empujada hacia el exterior por las nuevas semillas. Al nacer la semilla "elige" una trayectoria radial como un ángulo determinado. La planta produce sucesivas generaciones de semillas, que aparecen desplazadas por un periodo de  $1/\phi$  respecto a las anteriores. El ángulo entre dos semillas consecutivas resulta ser igual al ángulo dorado.

La razón de que las semillas se distribuyan con el patrón descrito obedece a un principio extremal, a los que la naturaleza es tan aficionada para regular sus leyes. La distribución así formada constituye una forma óptima de empaquetar semillas de tamaño semejante, de forma que se distribuyan uniformemente con independencia de la extensión del cáliz. Una semilla determinada, al cabo de varias generaciones seguirá formando el ángulo original, aunque su distancia al centro habrá aumentado al crecer la planta.

Este comportamiento tan interesante no sólo aparece en las semillas del girasol; hojas, ramas y pétalos también pueden crecer en espiral. De esta manera las hojas nuevas no bloquean el sol a las hojas antiguas y la mayor cantidad de lluvia llega a las raíces. La distribución de las espinas de muchos tipos de cactus se ajusta también al mismo patrón, y es muy fácil distinguir las espirales levógiras y dextrógiras.



Los números de Fibonacci vuelven a aparecer en las flores, con otro disfraz. Y es que son muchas las plantas con flores cuyo número de pétalos resulta ser un número de Fibonacci. Este hecho se presenta con diversos grados de precisión, es decir, hay especies cuyas flores tienen un número fijo de pétalos siempre, mientras que en otras especies es el promedio de pétalos el que resulta ser un número de Fibonacci.

Así encontramos que la mayor parte de los geranios, las violetas, el heliotropo, algunos tipos de azaleas, y muchas orquídeas tienen 5 pétalos. El delphinium tiene 8 pétalos. Las margaritas 21, 34, 55. No existe una evidencia empírica que apoye definitivamente el significado de la presencia de los números de Fibonacci en las flores, sin embargo no deja de ser llamativa su reiterada preferencia por éstos a la hora de formar los pétalos. Pareciera que el mundo vegetal tiene programado en sus códigos genéticos el crecimiento de la sucesión de Fibonacci.

Sin embargo, esta sucesión tuvo popularidad en el siglo XX especialmente en el ámbito musical, en el que compositores con tanto renombre como Béla Bartók, Olivier Messiaen, la banda Tool y Delia Derbyshire la utilizaron para crear acordes y nuevas estructuras de frases musicales.

En realidad, nunca se sabe... las matemáticas siempre nos guardan hermosas sorpresas. ¡Y seguro que la sucesión de Fibonacci nos espera de nuevo escondida en el lugar más insospechado!

## REFERENCIAS

- [1] Miramontes, P. La geometría de las formas vivas. *Ciencias*, (042).
- [2] Alonso, Á., & Bermúdez, T. (2002). De conejos y números. La sorprendente sucesión de Fibonacci. *La gaceta de la RSME*, 175-196.
- [3] Bonell, C. (1999). *La divina proporción: las formas geométricas*. Edicions UPC.



### Fernanda López Montes

Nacida en Tapachula Chiapas. Cursó la primaria y secundaria en el Colegio Constanza y Trabajo, posteriormente concluyó la preparatoria en la Preparatoria Tapachula No. 1. En 2009 ingresó a la BUAP donde actualmente está cursando sus últimos semestres de la Licenciatura en Matemáticas en la FCFM.

### Ángeles Carranza Cisneros

Es originaria de la comunidad de San Pedro Benito Juárez, en el municipio de Atlixco. Comenzó su formación académica en dicho lugar y posteriormente se mudó al extranjero en donde concluyó secundaria y bachillerato. En 2009 regresó al país y actualmente estudia la Licenciatura en Matemáticas en la FCFM.



## El método de líneas para resolver las ecuaciones de estado crítico de un superconductor tipo II anisótropo

Omar Augusto Hernández Flores<sup>1</sup> y Carolina Romero Salazar<sup>2</sup>

Escuela de Ciencias  
Universidad Autónoma “Benito Juárez” de Oaxaca  
Apdo. Post. No. 76, Oaxaca de Juárez, Oaxaca  
C.P. 68120 MÉXICO

<sup>1</sup> omar22121972@gmail.com

<sup>2</sup> cromero@uabjo.com

### RESUMEN

Empleando una descripción macroscópica para un material superconductor anisótropo, se plantea la metodología numérica para hallar curvas de inducción magnética. Particularmente, se emplea un modelo elíptico de estado crítico para describir un superconductor tipo II anisótropo en la geometría paralela.

### 1. INTRODUCCIÓN

El modelo de estado crítico elíptico describe el comportamiento de los campos electromagnéticos en una placa infinita superconductora en la geometría paralela [1]. Ha sido exitoso al cotejar sus resultados con curvas experimentales de materiales anisótropos estructuralmente.

Básicamente, el modelo consiste en un sistema de ecuaciones diferenciales parciales con dos puntos fijos a la frontera. Sin embargo, soluciones analíticas no están disponibles, por lo que se emplea una metodología numérica para hallar soluciones. En este trabajo se expone la metodología empleada así como un ejemplo numérico.

El sistema de estudio es una placa infinita superconductora tipo II con anisotropía definida en el dominio  $x \in [0, d]$ ,  $|y| > \infty$ ,  $|z| > \infty$ , en la geometría paralela, esto es, un campo magnético externo  $\mathbf{H}_e = H_{ey}\hat{y} + H_{ez}\hat{z}$  incide sobre la placa únicamente en el plano  $yz$ , de esta manera los campos electromagnéticos dependen únicamente de la variable  $x$ . Las ecuaciones de Maxwell son

$$\mu_0 j_y = -\partial_x B_z \quad \mu_0 j_z = \partial_x B_y, \quad (1)$$

$$\partial_t B_y = \partial_x E_z \quad \partial_t B_z = -\partial_x E_y, \quad (2)$$

donde se ha considerado que la variación del desplazamiento eléctrico es despreciable y que  $\mu_0 \mathbf{H} = \mathbf{B}$ . El corazón del modelo es la relación constitutiva  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{j})$ , que para nuestros propósitos tendrá la forma explícita  $\mathbf{E} = E\tilde{\mathcal{J}}_c \cdot \mathbf{j}$ , donde  $(\tilde{\mathcal{J}}_c)_{ik} = j_{ci}(B)\delta_{ik}$ , con  $i, k = y, z$ . De esta manera, las ecuaciones (1) y (2) quedan en términos únicamente de la inducción magnética. Las componentes del tensor  $\tilde{\mathcal{J}}_c$  están definidas por las expresiones

$$j_{cy}(B) = \frac{j_{0y}}{\left(1 + \frac{B}{B_y^*}\right)^{n_y}}, \quad j_{cz}(B) = \frac{j_{0z}}{\left(1 + \frac{B}{B_z^*}\right)^{n_z}}, \quad (3)$$

donde  $n_y, n_z, B_y^*, B_z^*$  son parámetros de ajuste. Por otra parte, la magnitud del campo eléctrico se modela con la ley vertical:

$$E(j) = \begin{cases} 0 & j < j_c, \\ \rho(j - j_c) & j \geq j_c. \end{cases} \quad (4)$$

donde  $j_c$  es la densidad de corriente crítica, misma que se obtiene de la relación constitutiva y tiene la forma

$$\frac{1}{j_c^2} = \left( \frac{\cos\phi}{\mathfrak{J}_{cy}} \right)^2 + \left( \frac{\sin\phi}{\mathfrak{J}_{cz}} \right)^2, \quad (5)$$

aquí  $\phi$  es el ángulo que sustenta la densidad de corriente crítica respecto al eje  $y$ . Las ecuaciones (1), (2) y (5) más las ecuaciones auxiliares (4) y (3) definen el modelo elíptico de estado crítico para estados cuasiestacionarios.

Para obtener un estado crítico se resuelven las ecuaciones de Maxwell en estado estacionario, por otra parte, el modelo elíptico postula que el campo eléctrico en estado crítico es nulo. Este último hecho es relevante en vista de que el procedimiento numérico requiere un *criterio de paro* basado en el valor del campo eléctrico. En este trabajo nos enfocamos a monitorear el campo eléctrico para asegurar que esté muy cercano a cero.

## 2. METODOLOGÍA NUMÉRICA

De forma global las ecuaciones de Maxwell (1) y (2) constituyen un sistema de dos ecuaciones en derivadas parciales, para resolverlo se utilizó el método de líneas (MOL, [3]). Esta metodología numérica consiste en discretizar el dominio espacial tomando un conjunto de  $N$  puntos  $x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_N$  equidistantes con tamaño de paso  $\Delta x = x_{k+1} - x_k, k = 1, N$ . Las derivadas espaciales se aproximan con una fórmula de diferenciación numérica  $D_x F(x_k)$  que transformará el sistema de dos ecuaciones a uno

de  $2N$  ecuaciones diferenciales ordinarias. Para este trabajo se utilizaron tres fórmulas de diferenciación numérica con error de truncamiento de orden  $\mathcal{O}(h^2)$ . Las ecuaciones de Maxwell, tras la discretización, toman la forma

$$\partial_t B_y(x_k) = +D_x E_z(x_k), \quad \partial_t B_z(x_k) = -D_x E_y(x_k).$$

Para simplificar la notación se definen las funciones evaluadas en los puntos  $x_k$  como sigue:  $F(x_k) = F^k$ . Explícitamente, el sistema anterior luce como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \partial_t B_y^1 &= + \frac{-E_z^3 + 4E_z^2 - 3E_z^1}{2\Delta x}, \\ \partial_t B_y^{k+1} &= + \frac{E_z^{k+2} - E_z^k}{2\Delta x}, \quad k = 1, N-2, \\ \partial_t B_y^N &= + \frac{3E_z^N - 4E_z^{N-1} + E_z^{N-2}}{2\Delta x}, \\ \partial_t B_z^1 &= - \frac{-E_y^3 + 4E_y^2 - 3E_y^1}{2\Delta x}, \\ \partial_t B_z^{k+1} &= - \frac{E_y^{k+2} - E_y^k}{2\Delta x}, \quad k = 1, N-2, \\ \partial_t B_z^N &= - \frac{3E_y^N - 4E_y^{N-1} + E_y^{N-2}}{2\Delta x}. \end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias se resolvió usando las bibliotecas estándar de MATLAB para ese propósito [2]. Particularmente se utilizaron las rutinas *ode23s* y *ode45*, ya que el sistema es de los denominados *Stiff*: se utilizó *ode23s* para dar una solución gruesa y después se refinó con *ode45*.

La distribución inicial de la inducción magnética al tiempo  $t = t_0$  es  $\mathbf{B}(x, t_0) = \mathbf{0}$ . Para calcular las densidades de corriente  $\mathbf{j}$  se emplean las mismas fórmulas de diferenciación numérica para preservar el error de truncamiento. El paso de tiempo  $\Delta t$  se aproximó con un análisis dimensional de la ecuación de Faraday. El criterio empleado es  $\Delta t <$

$t_0 = B_0 x_0 / \rho j_{c0}$ , donde  $B_0$ ,  $x_0$ ,  $\rho j_{c0}$  son cantidades características de la inducción magnética, la longitud y el campo eléctrico. Dichas cantidades se determinan según la situación física específica que se aborde.

Las componentes del campo eléctrico se calculan usando la relación constitutiva:

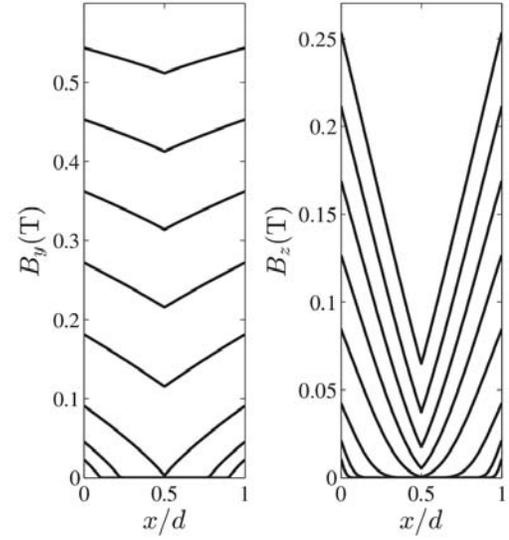
$$E_y^k = E^k \mathfrak{J}_{cy} (B^k) j_y^k,$$

$$E_z^k = E^k \mathfrak{J}_{cz} (B^k) j_z^k,$$

evaluándose estas ecuaciones fuera del estado crítico en un campo  $B^k$  a un tiempo  $t$ , y se utiliza la ley vertical como criterio de convergencia al reescribirse de la siguiente manera,

$$E^k = \begin{cases} 0 & j^k \leq j_c^k \\ \rho j_c^k \frac{(j^k - j_c^k)}{j_c^k} & j^k > j_c^k \end{cases}$$

Esta ecuación es el punto medular del algoritmo y plantea los siguientes hechos: (i) El modelo elíptico asume que el campo eléctrico es nulo en estado estacionario, sin embargo, el campo eléctrico esta manejado por el error relativo  $(j^k - j_c^k)/j_c^k$ , y de acuerdo con ello, para que numéricamente  $E^k \approx 0$ , deberá cumplirse que  $j^k \approx j_c^k$ . Debido a que el MOL emplea un proceso iterativo, se requiere un *criterio de paro* del programa, como consecuencia, el sistema aún conserva un campo eléctrico, pequeño en magnitud, pero finito. (ii) La magnitud de la densidad de corriente generada por la ley de Ampere es  $\|\mathbf{j}^k\| = \sqrt{[j_y^k]^2 + [j_z^k]^2}$  y se compara durante todo el cálculo numérico con  $j_c^k$  de la ecuación (5), utilizando la última, el ángulo  $\phi^k$  que sustenta  $\mathbf{j}^k$  con el eje  $y$ .

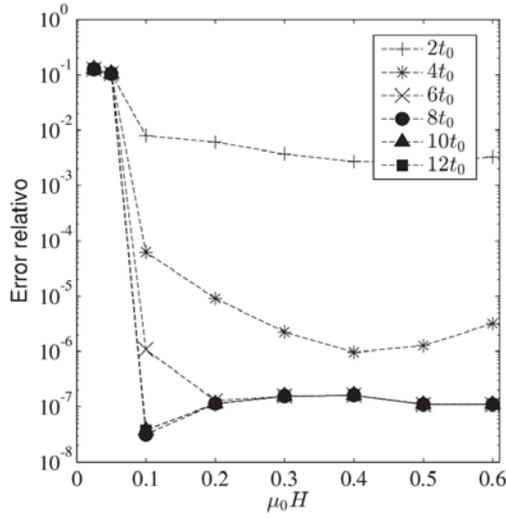


**Figura 1.** Componentes  $B_y$  y  $B_z$  de la inducción magnética. El campo externo  $\mathbf{H}_e$  incide en la muestra con un ángulo fijo de  $65^\circ$  con respecto al eje  $z$ . Las curvas que se muestran corresponden a valores de la magnitud del campo externo  $\mu_0 H_e = 0.025, 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6$  T.

### 3. CURVAS DE INDUCCIÓN MAGNÉTICA

En [1] se estimaron los campos de penetración en dirección  $y$  y  $z$  de curvas de histéresis experimentales, siendo estos  $\mu_0 H_{Py} = 0,05$ T y  $H_{Pz} = 0,25$ T. Con base en ellos, se hallaron los valores óptimos de los parámetros de la ecuaciones (3)  $n_y = 0,5$ ,  $n_z = 0,22$ ,  $B_y^* = 0,02$ T,  $B_z^* = 0,005$ T. La placa superconductora tiene un espesor de  $d = 0,23 \times 10^{-3}$ m, mientras que las densidades de corriente crítica en dirección  $y$  y  $z$  son  $j_{0y} = 4,4842 \times 10^9$  A/m<sup>2</sup> y  $j_{0z} = 5,0033 \times 10^8$  A/m<sup>2</sup>. La figura 1 muestra las componentes de la inducción magnética para un campo externo  $\mathbf{H}_e$  que incide sobre la placa superconductora con un ángulo de  $65^\circ$  con respecto al eje  $z$ . La magnitud del campo externo toma los valores  $\mu_0 H_e = 0.025, 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6$  T.

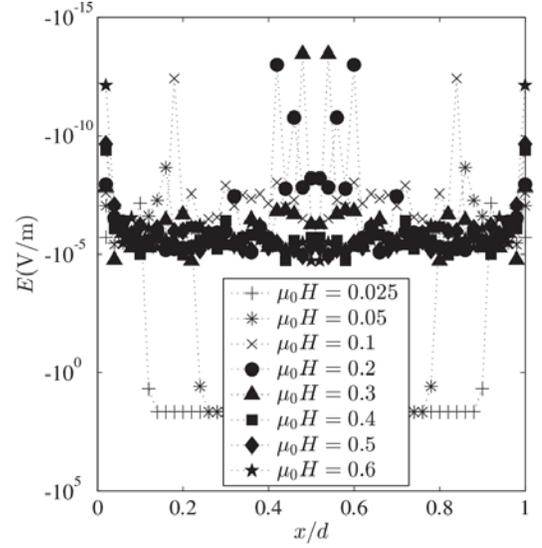
Los estados parcialmente penetrados corresponden a las magnitudes  $\mu_0 H_e = 0.025, 0.05, 0.1$  T.



**Figura 2.** Error relativo medio versus la magnitud del campo externo  $\mu_0 H_e$ . Cada curva corresponde a tiempos de cómputo distintos. El tiempo característico es  $t_0 = d/(\rho j_{c0y})$ .

Debido a la anisotropía del material superconductor, la penetración del campo externo es diferente en las direcciones  $y$  y  $z$ , tal como se puede constatar en la mencionada figura. Las dos rutinas numéricas para resolver el problema de valor inicial requieren de un intervalo de tiempo en el que se desea obtener la solución. El tiempo inicial se tomó como cero, mientras que el tiempo final es el tiempo requerido para establecer el estado estacionario. Para determinar numéricamente el estado estacionario se empleó como *criterio de paro* el error relativo medio  $N^{-1} \sum_{k=1}^N (j^k - j_c^k)/j_c^k$  a un tiempo determinado (tiempo final). Las curvas de la figura 1 corresponden a un tiempo de  $12t_0$  (los tiempos empleados en la rutina son menores), donde se consideró  $B_0 = 1$  T,  $x_0 = d$ ,  $j_0 = j_{0y}$ .

La figura 2 muestra los cambios del error relativo al incrementar el tiempo, como se puede apreciar, a partir de 8 veces el tiempo característico, el error relativo se mantiene sin variación significativa para estados penetrados. Evidentemente, dado que el error relativo de las curvas correspondientes a



**Figura 3.** Valor del campo eléctrico, obtenido de la relación  $\rho(j - j_c)$ , en la muestra superconductor para diferentes valores del campo externo  $\mu_0 H_e$ .

estados parcialmente penetrados es alrededor de  $5 \times 10^{-1}$ , se tiene que  $j \approx 15/10j_c$  lo que hace que las curvas de inducción magnética en mencionados estados, no sean fiables. En la figura 3 se muestra el campo eléctrico en el interior de la placa superconductor conforme se incrementa la magnitud del campo externo  $\mu_0 H_e$ , ignorando los estados parcialmente penetrados, se estima para el campo eléctrico, con  $\rho = 10^{-8}$ , un valor aproximado de

$$E \approx \rho j_{0y} \times \text{Error relativo} \approx 10^{-6} \text{ V/m}$$

Esta estimación concuerda con los resultados numéricos de las curvas del campo eléctrico. Evidentemente el campo eléctrico dista de ser nulo o suficientemente pequeño para despreciar su presencia. Más aún, como se puede notar en la estimación realizada, la magnitud del campo eléctrico depende linealmente del valor de  $\rho$ .

#### 4. CONCLUSIONES

La metodología empleada, en general, arroja resultados fiables fuera de los estados parcialmente



**Dr. Omar Augusto Hernández Flores**

Realizó la Licenciatura en Física en la FCFM-BUAP. La maestría y doctorado en Ciencias (Física), en el Instituto de Física-BUAP. Profesor Asignatura en la UABJO desde febrero de 2008. Es miembro nivel I del SNI e investiga propiedades magnéticas de materiales superconductores tipo II. Es especialista en la resolución numérica de ecuaciones integro-diferenciales.

**Dra. Carolina Romero Salazar**

Realizó la Licenciatura en Física en la FCFM-BUAP. La maestría y doctorado en Ciencias (Física), en el Instituto de Física-BUAP. Es Profesora Tiempo Completo en la UABJO desde febrero de 2010. Premio Weizmann 2005, en el área de Ciencias Exactas, de la AMC por su tesis doctoral. Es miembro nivel I del SNI e investiga propiedades magnéticas de materiales superconductores tipo II.

penetrados, ya que en estos casos las magnitudes de campo eléctrico distan de ser nulas. Un tratamiento especial en esas zonas requiere de análisis y estudio más detallado.

**REFERENCIAS**

- [1]C. Romero-Salazar, F. Pérez.-Rodríguez, (2003),Critical state of anisotropic hard superconductors. Superconductor Science and Technology, 1273.
- [2]L. F. Shampine, I. G. (2003). Solving ODEs with MATLAB. Cambridge: Cambridge University Press.
- [3]Schiesser, W. E. (2009). A Compendium of Partial Differential equations Models Method of Lines Analysis with Matlab. Cambridge: Cambridge University Press.



A dark blue banner with white text and graphics. On the left is a large white number '2'. To its right is a stylized white logo consisting of the letters 'C', 'S', 'A', and 'A' intertwined. Below the logo is the text 'CONGRESO INTERNACIONAL DE MATEMÁTICAS Y SUS APLICACIONES'. Further down, it says 'del 31 de agosto al 4 de septiembre' and 'próximamente más información'. At the bottom center is a white box containing the website 'www.fcfm.buap.mx/cima'. In the background, there is a faint watermark of a classical figure's head.

## El encuentro con un cometa

Raúl Cortés Maldonado

Instituto de Física  
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla  
Apdo. Post. J-48, Puebla, Pue.  
C.P.72570 MEXICO  
rcortes@ifuap.buap.mx

### RESUMEN

Un acontecimiento histórico a nivel científico y para la humanidad fue difundido el 12 de noviembre de 2014, cuando el módulo de aterrizaje Philae de la misión espacial Rosetta aterrizó sobre la superficie del cometa 67P/Churyumov-Gerasimenko. Con información de la página oficial de la Agencia Espacial Europea (ESA, por sus siglas en inglés) [2, 3], se presentan algunos datos interesantes sobre la misión.

### 1. INTRODUCCIÓN

Los cometas son pequeños aglomerados de hielos de diversa composición, como agua, monóxido de carbono, dióxido de carbono, metanol, etc., mezclados con polvo de metales y silicatos; sus dimensiones ascienden a unas decenas de kilómetros. Diversas hipótesis sugieren que los cometas son uno de los vehículos que transportan los ladrillos de la vida (moléculas orgánicas y compuestos ricos en carbono, hidrógeno, oxígeno y nitrógeno), pudiendo llegar a la Tierra por este medio [1].

La misión para la exploración de un cometa por parte de la Agencia Espacial Europea lleva el nombre de Rosetta, en honor a la famosa piedra de Rosetta. Esta losa de basalto volcánico, exhibida en el Museo Británico de Londres, fue un elemento clave para el entendimiento moderno de los

jeroglíficos egipcios. Del mismo modo, la misión espacial *Rosetta* permitirá a los científicos mirar hacia atrás 4600 millones de años, una época en la que no existían planetas, sólo una amplia cantidad de asteroides y cometas que rodeaban el sol [2].



**Figura 1.** Piedra de Rosetta, descubierta en 1799, fue un elemento clave para el entendimiento moderno de los jeroglíficos egipcios.

El objetivo de la misión es orbitar el cometa 67P/Churyumov-Gerasimenko donde se estudiará su núcleo así como su entorno durante 2 años aproximadamente. Además, el módulo Philae ha aterrizado exitosamente en la superficie del cometa.

## 2. CRONOLOGÍA DE MISIONES A COMETAS

La misión espacial Rosetta no ha sido la única misión hacia un cometa, pero si es la primera en aterrizar sobre la superficie de uno. A continuación se presenta un resumen sobre las distintas misiones espaciales que tuvieron el objetivo de estudiar los cometas.

- International Cometary Explorer (ICE). Nave espacial lanzada por la NASA el 12 de agosto 1978, logró por vez primera el encuentro con un cometa. Después de haber concluido su misión, fue reactivada y desviada para pasar a través de la cola del cometa Giacobini-Zinner el 11 de septiembre de 1985, a una distancia aproximadamente de 7860 kilómetros del cometa en su máxima aproximación. También viajó a través del cometa Halley el 28 de marzo de 1986, a una distancia de 31 millones de kilómetros del núcleo del cometa.
- Vega 1 y Vega 2. Sondas rusas lanzadas el 15 y el 21 de diciembre de 1984, cada una dejó un módulo de aterrizaje en la superficie de Venus mientras volaban en junio de 1985 a investigar y fotografiar el cometa Halley. La sonda Vega 1 realizó su máximo acercamiento al cometa en marzo de 1986 a una distancia de 8890 kilómetros. Vega 2 tuvo un acercamiento mayor al núcleo del cometa a una distancia de 8030 kilómetros el 9 de marzo de 1986.
- Sakigake y Susei. De origen japonés, estas naves espaciales gemelas tuvieron como objetivo explorar el cometa Halley en su viaje hacia el interior del sistema solar en 1986. Susei tuvo un acercamiento de 151 000 Kilómetros del cometa Halley el 8 de marzo de 1986 para observar sus interacciones con el viento solar. Sakigake se acercó al cometa una distancia de siete millones de kilómetros el 11 de marzo de 1986.
- Giotto. Lanzada el 2 de julio de 1985, fue una misión de la Agencia Espacial Europea. Esta nave obtuvo las imágenes más cercanas jamás tomadas de un cometa. Giotto pasó cerca del núcleo del cometa Halley a una distancia de 600 kilómetros el 13 de marzo de 1986.

- Depp Space 1. Fue la primer nave espacial de la NASA del programa Nuevo Milenio. Fue lanzada el 24 de octubre de 1998, su misión primaria fue poner a prueba 12 nuevas tecnologías avanzadas. Se aproximó hasta 26 kilómetros del asteroide 9969 Braille el 29 de julio de 1999.
- Stardust. Fue lanzada el 7 de febrero de 1999, fue una misión de la NASA que viajó a través de la nube de hielo y polvo que rodean el núcleo del cometa Wild 2, su punto más cercano a 240 kilómetros de su núcleo el 2 de enero de 2004. Posteriormente recolectó partículas de polvo y las regresó a la Tierra en el 2006. En una misión extendida conocida como Stardust-NExT (New Exploration of Tempel 1), la nave visitó el cometa Tempel 1 en el 2011.
- Contour (Comet Nucleus Tour). Lanzada el 3 de julio de 2002, fue una misión de la NASA para nuestra comprensión del núcleo de un cometa. La nave permaneció en órbita alrededor de la Tierra hasta el 15 de agosto de 2002, cuando inició las maniobras para pasar a una órbita heliocéntrica en busca del cometa. Los controladores de la Nasa no pudieron restablecer contacto con la nave, concluyendo que la nave Contour fue perdida.
- Deep Impact. Misión lanzada el 12 de enero de 2005, la cual consistió de dos naves. La nave principal realizó un sobrevuelo del cometa Tempel 1 y registró imágenes y datos. La segunda nave fue el impactador (impactor en inglés), la cual fue impulsada hacia un destino ubicado en el cometa en julio de 2005. El impacto extrajo restos del cometa, permitiendo a la nave principal analizar la composición de la superficie y los materiales interiores del cometa.

## 3. SONDA ESPACIAL ROSETTA

La misión espacial Rosetta fue lanzada el 2 de marzo de 2004 por un cohete Ariane-5 G+ desde el puerto espacial europeo en Kourou, en la Guyana Francesa, para ponerlo en la órbita requerida del cometa 67P/ Churyumov-Gerasimenko. Posteriormente a su lanzamiento, Rosetta obtuvo imágenes de dos asteroides: 2867 Steins el 5 de

septiembre de 2008 y 21 Lutetia el 10 de julio de 2010. La nave entró en la fase de hibernación en junio de 2011 y fue reactivada en enero de 2014, antes de su encuentro con el cometa 67P/Churyumov-Gerasimenko en mayo de 2014.



**Figura 2.** Nave espacial Rosetta.

El 12 de noviembre de 2014 el módulo Philae se desacopló exitosamente de la nave Rosetta y pudo aterrizar históricamente sobre la superficie del cometa, el descenso de Philae duró 7 horas, la señal que confirmó el éxito del aterrizaje llegó a la Tierra a las 16:03 GMT (10:03 a.m. hora de la Ciudad de México).

El lugar del aterrizaje, llamado Agilkia, fue elegido sólo seis semanas después de la llegada de Rosetta, de acuerdo a las imágenes y los datos recabados en distancias de 30 a 100 km del cometa. Esas primeras imágenes mostraron la rocosidad del cometa, sus acantilados y grandes precipicios, con chorros de gas y polvo que fluyen de la superficie.



**Figura 3.** Simulación computacional del módulo Philae aterrizando en el cometa.



**Figura 4.** Cometa visto desde una distancia de 40 metros.



**Figura 5.** Cometa visto el 10 de diciembre de 2014.

#### 4. ALGUNOS HECHOS HISTÓRICOS DE ROSETTA

- Rosetta es la primer nave espacial en orbitar el núcleo de un cometa.
- Es la primer nave espacial en volar junto a un cometa mientras este se dirige hacia el interior del Sistema Solar.
- Rosetta es la primer nave espacial que examinará de cerca la forma en que un cometa helado es transformado por el calor del Sol.
- Después de su llegada al cometa 67P/Churyumov-Gerasimenko, de la sonda rosetta se desprendió el módulo de aterrizaje Philae, para ser así, el primer aterrizaje controlado en el núcleo de un cometa.
- Los instrumentos de aterrizaje de Rosetta han obtenido las primeras imágenes de las superficie de un cometa y hacer el primer análisis *in situ* para investigar de que está hecho.
- Rosetta será la primer nave espacial en volar cerca de la órbita de Júpiter usando celdas solares como su principal fuente de energía.

#### 5. CONCLUSIONES

Sin duda alguna el espacio exterior siempre ha sido fuente de interrogantes sobre el origen de nuestro planeta y la vida humana en él. Seguramente, este acontecimiento histórico, proporcionará algunas respuestas a las interrogantes planteadas sobre el origen de la vida en la Tierra. Por otro lado, para todos aquellos lectores interesados, en la página [www.esa.int/spaceinimages/Missions/Rosetta/](http://www.esa.int/spaceinimages/Missions/Rosetta/) pueden encontrar más de 400 fotografías sobre la misión. Finalmente, en [sci.esa.int/where\\_is\\_rosetta/](http://sci.esa.int/where_is_rosetta/) se encuentra una aplicación bastante interesante, la cual permite conocer la ubicación actual, la distancia y trayectoria recorrida por la sonda y el cometa.

#### REFERENCIAS

- [1] Bartolo Luque, et, al., *Astrobiología: Un puente entre el Big Bang y la vida*. Ediciones AKAL, 2009.
- [2] [http : //www.esa.int/Our\\_Activities/Space\\_Science/Rosetta](http://www.esa.int/Our_Activities/Space_Science/Rosetta)
- [3] [http : //rosetta.esa.int](http://rosetta.esa.int)



M.C. Raúl Cortés Maldonado

Realizó sus estudios de licenciatura en electrónica en la FCE-BUAP. Los estudios de maestría (Física) los realizó en el Instituto de Física-BUAP. Actualmente, está desarrollando su tesis doctoral en propiedades magnéticas de superconductores de baja temperatura crítica en el IFUAP.



**Seminario de estudiantes del IFUAP.** Su propósito es fomentar el intercambio de ideas acerca de diversos temas que competen a la ciencia y de este modo motivarnos a desarrollar un mayor conocimiento de diversas áreas científicas. Te invitamos a participar, las charlas son los martes a las 15:00 Hrs. en el auditorio del IFUAP. Contacto: [seminario.estudiantes@ifuap.buap.mx](mailto:seminario.estudiantes@ifuap.buap.mx).

## Los números reales $\mathbb{R}$ , aproximación previa al concepto de límite

Lucero Amezcua Gerardo<sup>1</sup> y Pablo Rodrigo Zeleny Vázquez<sup>2</sup>

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas  
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla  
C.U. Avenida San Claudio y 18 Sur,  
Colonia San Manuel, Puebla, Pue.  
C.P.72570 MEXICO

<sup>1</sup> luceroamezcua@gmail.com

<sup>2</sup> pzeleny@fcfm.buap.mx

### RESUMEN

En este artículo, nos concentraremos en la discusión tanto de los problemas del aprendizaje del concepto de límite en estudiantes de educación media y nivel superior como en los problemas de enseñanza que esto implica. Las investigaciones realizadas han reportado bajo nivel académico con la noción de límites que a su vez descansa a una noción no menos intuitiva de los números reales  $\mathbb{R}$ . Esto se agrava ya que no viene una buena discusión a nivel intuitivo dejando en claro que no se trata de un curso de análisis si no de uno de cálculo.

### 1. INTRODUCCIÓN

Es mucho más fácil explicar el cálculo de un límite que razonar sobre su propio significado, pero no debemos limitar al simple cálculo, tenemos que esforzarnos para que nuestros alumnos desde el principio asimilen las ideas principales de este importante concepto, aunque en los primeros momentos de este estudio les resulte muy difícil. Sin este esfuerzo realizado a lo largo de varias etapas

de cimentación y maduración, los alumnos no asimilarán la idea de límite, y no les habrá servido de nada su estudio durante tantos años.

### 2. OBSTÁCULOS EN EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE LÍMITE

Cornu (1981), con el paso de los años nos damos cuenta que se sigue trabajando con las ideas primitivas para proporcionar un acercamiento del concepto de límite provocando mal entendimiento del objeto a estudiar.

Para poder adentrarnos dentro del estudio de límites es necesario que los alumnos tengan un “buen” estudio previo del análisis de los **números reales** con la intención de que ellos no continúen con una inapropiada **explicación intuitiva** sobre el concepto, creando una lucha campal contra las ideas promovidas ya que está demostrado que los alumnos tienen “concepciones espontáneas personales”, pero, ¿cómo puede ser posible esto? Uno de los obstáculos que encontramos en el aprendizaje del concepto a estudiar son los libros que se utilizan para el estudio.

Existe una gran variedad de material por ejemplo, los libros clásicos de Cálculo para ingenieros, etc., como el Piskunov, tienen un montón de cosas interesantes, así como también los americanos como el Stewart, el Larson, Leithold etc. El problema que se encontró en estos libros es que actualmente son muy muy breves en el tema de reales previo a límites, la razón por lo que esto ocurre es porque las editoriales quieren que todo el mundo compre sus libros haciendo énfasis “supuestamente” en todo, pero haciendo mucha alusión a las aplicaciones en economía, administración, química, etc., haciendo que el interés por las matemáticas sea solo de tipo instrumental, con la recapitulación de varios libros nos dimos cuenta que para abordar previamente el tema de límites, en el estudio de números reales se enfocan mucho en la representación geométrica de gráficas, propiedades, su orden y solucionar mil problemas pero la más constante, resolver desigualdades o simplemente omitir todo con mucha tranquilidad.

En general “límite” y “tender hacia” no forman parte del contexto. El límite designa algo preciso, mientras que tender hacia se designa algo más vago.

Un ejemplo de esto es un reporte que realizo **Schwarzenberger y Tall** (1978) y que se repitió nuevamente con alumnos obteniendo resultados semejantes.

Se preguntó si  $0,999\dots$  es igual a 1, o menor que 1.

Muchas de las respuestas tenían conceptos infinitesimales, diciendo que eran igual porque la diferencia entre ellos era infinitamente pequeña, pero la mayoría de los alumnos pensó que  $0,999\dots$  era menor que 1, predominando en ellos el carácter

inalcanzable del límite. El principal error se produce de la representación de  $0,999\dots$  como un proceso infinito y no en el que el proceso está terminado.

Al decirle a los alumnos que los números eran iguales y demostrarles mediante diversos métodos muchos lo aceptaron pero solo como un acuerdo.

Lo anterior ocurre por la manera promovida en cómo se enseña provocando una discusión didáctica en “**saber de qué hablamos**”, es decir para comprender el concepto de límite de una función cuando  $x \rightarrow c$  ( $x$  tiende a  $c$ ) comprendiendo límites finitos y límites infinitos, se requiere cierta madurez que permitan abrir la mente de distintas formas de proceder. Esta madurez que no siempre es alcanzada por los estudiantes. Por esto los maestros deben propiciar cambios que permitan que los alumnos descubran como se construyen los conceptos a partir de sus conocimientos previos y que mejor que con el manejo adecuado de los números reales.

### 3. LOS NÚMEROS REALES

Todo estudiante que llega a una escuela de nivel medio superior y superior tiene una relación mínima con los números reales, pero estos no han sido explotados en toda su amplitud.

#### 3.1. Axioma del supremo

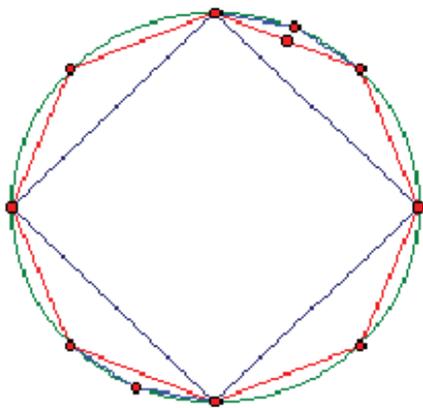
Una de las propiedades esenciales que nos puede ayudar en el entendimiento del concepto de límites es el axioma del supremo, aunque a primera vista el axioma resulta extraño para los alumnos, ya que términos como *cota superior*, *cota de un conjunto* y *supremo* son conceptos con los que el alumno de nivel medio superior no está familiarizado, pero a medida que se avance, verá la importancia de este axioma explicándole que este es un paso previo al concepto de límite.

### 3.2. Método de exhaustión

Otra forma de poder abordar los números reales, con la intención de que nos ayude en nuestro objetivo el Método de exhaustión, se le atribuye a Eudoxo; aunque la utilización del método más conocida la hizo Arquímedes en la cuadratura de la parábola. El método se aplicaba al cálculo de áreas de figuras, volúmenes de cuerpos, longitudes de curvas, tangentes a las curvas, etc. Consiste en aproximar la figura por otras en las que se pueda medir la correspondiente magnitud, de manera que ésta vaya aproximándose a la magnitud buscada.

Por ejemplo para estimar la superficie del círculo  $C$ , se inscriben y circunscriben polígonos regulares de  $n$  lados cuya superficie se conoce (en definitiva es la de  $n$  triángulos isósceles) luego se duplica el número de lados de los polígonos inscritos y circunscritos hasta que la diferencia queda bastante pequeña. Arquímedes halló la superficie del círculo con este método llegando a polígonos de noventa y seis lados.

Aporta otra novedad: además de inscribir polígonos, circunscribe otra sucesión de polígonos; de este modo, consigue que la diferencia entre los polígonos circunscritos e inscritos sea menor que cualquier número dado.



El método de “exhaustión” se ha transformado en el método de “compresión”; la figura queda comprimida entre ambas sucesiones de polígonos.

Mediante este método podemos dar una noción de límite como un proceso que se agota con  $C$ .

### 3.3. El número $e$

El método del límite consiste, por tanto, fundamentalmente en que para determinar el valor de una magnitud, se sigue un proceso en el que se van calculando aproximaciones al valor buscado. En este proceso se debe asegurar que cada aproximación debe mejorar cada aproximación anterior.

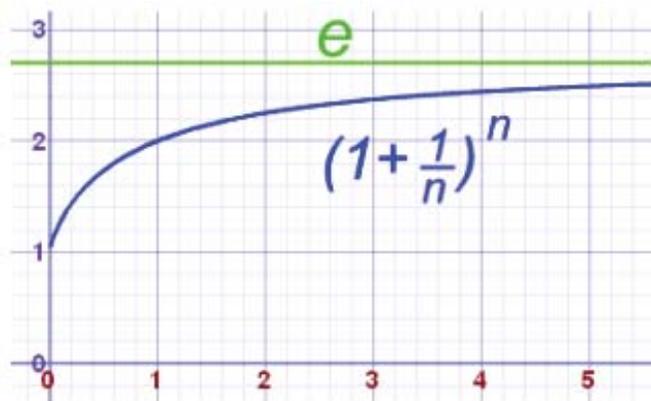
Del estudio de este proceso, se observa la tendencia de sus aproximaciones sucesivas y se calcula el valor al que tienden éstas. Pero para asegurarnos que éste es el valor buscado, debemos garantizar que la diferencia entre éste y las sucesivas aproximaciones se puede hacer tan pequeña como se quiera. Por tanto, la estrategia del límite incluye tres pasos: 1) Se construye un proceso de aproximaciones al valor buscado. 2) Se calcula el valor al que tienden estas aproximaciones. 3) Se garantiza que las aproximaciones se acercan al valor anterior tanto como se quiera.

Por tanto, la estrategia del límite incluye tres pasos:

1. Se construye un proceso de aproximaciones al valor buscado.
2. Se calcula el valor al que tienden estas aproximaciones.
3. Se garantiza que las aproximaciones se acercan al valor anterior tanto como se quiera.

El crecimiento de la masa forestal de un extenso bosque, el crecimiento de una colonia de insectos o virus, la desintegración radiactiva, son procesos

continuos, en los que la acumulación o el decrecimiento se producen instantáneamente (no hay un período de tiempo en el que los elementos generados permanecen inactivos esperando una señal para incorporarse al proceso, sino que, desde el mismo instante en que son generados, participan como el resto en el proceso de crecimiento). Por eso, en las ecuaciones que rigen estos modelos aparece siempre el número  $e = 2,71828182845\dots$

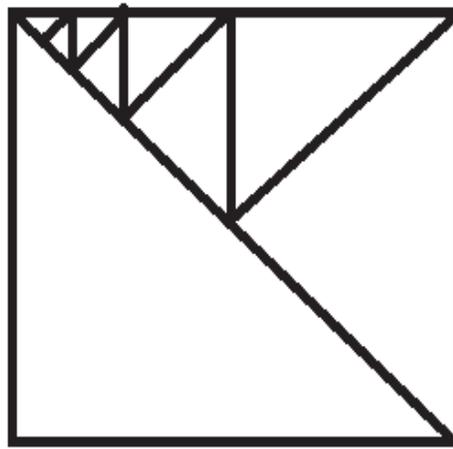


### 3.4. Procesos infinitos

Es claro que el aprendizaje de conceptos relacionados con el infinito, como son los de límite y convergencia en cálculo, o el estudio de conjuntos infinitos son áreas que generalmente presentan dificultades. Uno de los problemas es que el infinito no se puede extraer a partir de las experiencias sensoriales; es un concepto mental que a menudo contradice al sentido común. Y aunque es un concepto básico en las matemáticas (como en el Cálculo) las áreas de la matemática donde se encuentra este concepto son aquellas que tradicionalmente son presentadas desde una perspectiva algebraico-simbólica, lo cual dificulta la conexión entre el conocimiento formal y el intuitivo.

Tomamos como reto crear situaciones en las que el infinito fuera más accesible.

Una persona corta a la mitad un cuadrado después, una de las mitades la corta a la mitad nuevamente, realizando esta acción infinitamente.



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1$$

Este proceso lo podemos definir como la suma de un número infinito de procesos terminados, así tenemos la noción de límite en proceso.

Para terminar, nos damos cuenta que, el estudio correcto de los números reales nos puede proporcionar una de las mejores maneras de acercarnos al concepto límite.

#### Barry Mazur

“Para poder comprender el poquito que comprendemos sobre los números, a lo largo de los siglos se han construido unos mundos imaginarios espléndidamente hermosos, cuajados de imágenes, de sueños..., y de preguntas fascinantes”.

## REFERENCIAS

- [1]Artigue, M.,La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. Ingeniería didáctica en educación matemática , (1995).
- [2]Hitt, F., (2003). El concepto de infinito: Obstáculo en el aprendizaje de límite y continuidad de funciones. En Matemática Educativa: Aspectos de la investigación actual, pp 91-111.
- [3]Cottrill,J., Understanding the Limit Concept: Beginning with a Coordinated Process Schema. *Journal of Mathematical Behavior*, pp 167-192.
- [4]Leithold,L., El cálculo con Geometría Analítica, Marla, México, (1990).



Lucero Amezcua Gerardo

Ella es originaria de Tlacotepec de Benito Juárez, Puebla. Actualmente es alumna de la licenciatura en Matemáticas en la FCFM-BUAP.

M.C. Pablo Rodrigo Zeleny Vázquez

Licenciado en Matemáticas por la FCFM-BUAP Actualmente es Profesor de tiempo completo en la FCFM-BUAP.



# SEMANA

INTERNACIONAL

---

DE LA

# ESTADÍSTICA

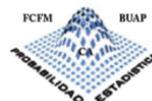
---

Y LA

# PROBABILIDAD



Del 8 al 12 de junio  
de 2015  
en las instalaciones de la  
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas



---

## Selfie de la misión Rosetta

---

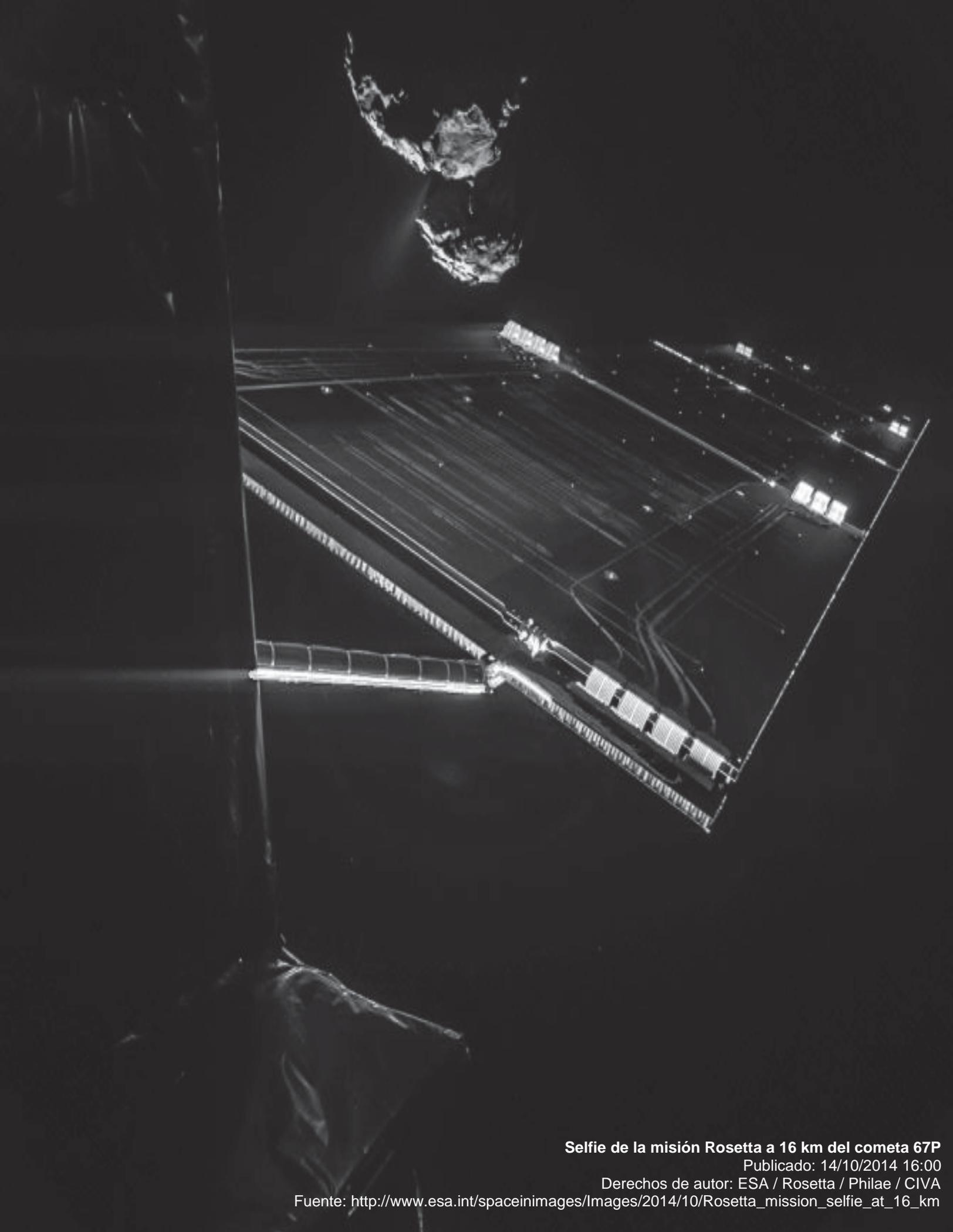
El cometa 67P/Churyumov-Gerasimenko fue descubierto en 1969. El motivo de su elección para ser estudiado entre los miles de cometas que hay en el Sistema Solar tuvo que ver con su tamaño (apenas unos 4 kilómetros) pero sobre todo con el tiempo que tarda en orbitar en torno al sol: 6,6 años. Esto lo convierte en un cometa con periodo orbital relativamente bajo.

La misión Rosetta para la exploración de 67P fue aprobada en noviembre de 1993 y luego de 22 años ha sido todo un éxito, a pesar del aterrizaje algo escabroso del modulo Philae sobre el cometa 67P y a la misión todavía le quedan varios meses de vida, pues tiene financiamiento hasta diciembre de 2015.

A la derecha vemos la fotografía que fue tomada el 7 de octubre de 2014 con la cámara CIVA (Comet Infrared and Visible Analyser) del módulo Philae de la misión Rosetta. La imagen captura un lado de la sonda espacial y una de sus alas solares de 14 metros de longitud, con el cometa en el fondo. En realidad la imagen es la combinación de dos fotografías, una con un tiempo de exposición corto, una con uno más largo, para capturar la escena, desde las partes brillantes de los paneles solares hasta las zonas oscuras del cometa y del revestimiento de la nave espacial Rosetta. En la imagen es claramente visible la región activa del cometa, el cuello, con corrientes de polvo y gas que se extienden lejos de la superficie. Esta foto fue la última imagen de Philae antes de que se separara de Rosetta el 12 de noviembre.

Philae aterrizó en el cometa el pasado 12 de noviembre de 2014 y estuvo operativo durante dos días durante los cuales CIVA hizo tomas del aterrizaje, de la superficie y del paisaje del cometa. En realidad la cámara CIVA es uno de los diez instrumentos a bordo de Philae. Ésta consta de dos partes, CIVA-P que es la autora de la foto a la derecha y que se compone de siete micro-cámaras dispuestas alrededor de la parte superior de Philae para tomar imágenes panorámicas, mientras CIVA-M es un generador de imágenes microscópicas que hará el estudio de la composición y la textura de muestras de la superficie del cometa. En la página oficial de la Agencia Espacial Europea (ESA por sus siglas en inglés) podemos encontrar cientos de fotografías de la misión [www.esa.int/spaceinimages/Missions/Rosetta](http://www.esa.int/spaceinimages/Missions/Rosetta) así como las últimas noticias sobre ella.

En el momento del encuentro entre el 67P y Rosetta, éste se encontraba más o menos inactivo, su cola era muy pequeña. En su camino hacia el Sol 67P se activará creando una estela de polvo y gas y Rosetta será un testigo invaluable de ese proceso. Por otro lado Philae se encargará de estudiar la superficie y la atmósfera del cometa en busca de compuestos orgánicos indispensables para el origen de la vida, mientras resista las altas temperaturas. Si la ESA recibe fondos adicionales el proyecto llevará a cabo más experimentos para conocer a fondo los misterios en torno a los cometas incluso podrían responder a la pregunta de si la vida en la Tierra vino de fuera o se originó de forma independiente así como otros misterios sobre el origen del Sistema Solar.



**Selfie de la misión Rosetta a 16 km del cometa 67P**

Publicado: 14/10/2014 16:00

Derechos de autor: ESA / Rosetta / Philae / CIVA

Fuente: [http://www.esa.int/spaceinimages/Images/2014/10/Rosetta\\_mission\\_selfie\\_at\\_16\\_km](http://www.esa.int/spaceinimages/Images/2014/10/Rosetta_mission_selfie_at_16_km)



## *Estudiantil*

Te invita a participar.

El comité editorial recibe tus propuestas, para el siguiente número, participa con nosotros :

- Artículos
- Reseñas
- Foto de portada
- Ilustraciones

Esríbenos a  
[conciencia.buap@gmail.com](mailto:conciencia.buap@gmail.com)  
y envíanos tus comentarios,  
sugerencias y aportaciones.