



# Introducción

Cálculo de varias variables

Primavera 2020

Facultad de Ingeniería

Lilia Meza Montes IFUAP

# Contenido del curso

**Unidad 1.** Cálculo Diferencial de Funciones de Varias Variables

**Unidad 2.** Cálculo diferencial vectorial

**Unidad 3.** Cálculo integral de funciones de varias variables

**Unidad 4.** Cálculo Integral vectorial

# Unidad 1. Cálculo Diferencial de Funciones de Varias Variables

1. Función de dos o más variables.
2. Representación geométrica de una función de dos variables
3. Derivadas parciales
4. Interpretación geométrica y física de las derivadas parciales mediante un software (Mathematica).
5. Diferenciación total.

# Unidad 1. Cálculo Diferencial de Funciones de Varias Variables

6. Derivada de una función compuesta
7. Derivada Total
8. Derivada de una función implícita
9. Derivadas parciales de orden superior
10. Máximos y mínimos de funciones de varias variables y Jacobianos, con la interpretación de los resultados apoyados en un software

# Unidad 2. Cálculo diferencial vectorial

- 2.1 Concepto de función vectorial y derivación de una función vectorial
- 2.2 Campos Escalares y vectoriales
- 2.3 Derivación de suma y productos. Gradiente
- 2.4 Valor máximo y mínimo, tasa de crecimiento máxima y mínima
- 2.5 Derivadas direccionales y operadores diferenciales
- 2.6 Divergencia y Rotacional
- 2.7 Multiplicadores de Lagrange

# Unidad 3. Cálculo integral de funciones de varias variables

- 3.1 Integral doble y cálculo de integrales dobles
- 3.2 Área de una superficie plana
- 3.3 Sustitución de variables en una integral doble
- 3.4 Momento de inercia y centro de masa de una superficie
- 3.5 Integral Triple y cálculo de integral triple
- 3.6 Cálculo de volúmenes
- 3.7 Integración en coordenadas polares
- 3.8 Momentos de inercia y centro de masa de un volumen

# Unidad 4. Cálculo Integral vectorial

4.1 Integral de Línea

4.2 Teorema de Green

4.3 Teorema de divergencia

4.4 Teorema de Stokes

**Calificación de esta unidad:** Presentación de trabajo de **trabajo de investigación** sobre una aplicación de alguno de estos temas

# Bibliografía

- **Stewart, James.** *Calculus: Early Transcendentals*, Brooks/Cole, Cengage Learning, 8th Edition, USA, 2016.
- **Larson, Ron and Edwards, Bruce H.** *Matemáticas III: Cálculo de Varias Variables*, Cengage Learning , 2016
- Leithold, Louis. *El Cálculo*, Oxford University Press, 7<sup>th</sup> Ed., 2009.
- <http://www.ifuap.buap.mx/~lilia/>



# Evaluación del Curso

<b>Criterios</b>	<b>Porcentaje</b>	<b>Notas</b>
<b>Exámenes</b>	60%	
<b>Participación en clase</b>	5%	Pasar al pizarrón a resolver tarea de día siguiente
<b>Tareas</b>	5%	Para entregar
<b>Departamental</b>	<b>20%</b>	Principios de mayo, hasta integrales de dos variables
<b>Trabajo de investigación o de intervención</b>	10%	Presentación al final

# Conocimientos básicos de cursos anteriores

- Álgebra
- Funciones
- Derivar (saber reglas de derivación de memoria, regla de la cadena)
- Integrar (métodos de integración)

# Para aprobar el curso

- Aprender –no sólo procedimientos
- Entender significado de conceptos
- Resolver ejercicios (tareas y por su cuenta)
- ESTUDIAR EN LIBROS, traen más explicaciones, ejemplos, gráficas
- Mis notas solo son de apoyo.
- <http://www.ifuap.buap.mx/~lilia/>



# Conceptos fundamentales

Cálculo de varias variables

Primavera 2020

Facultad de Ingeniería

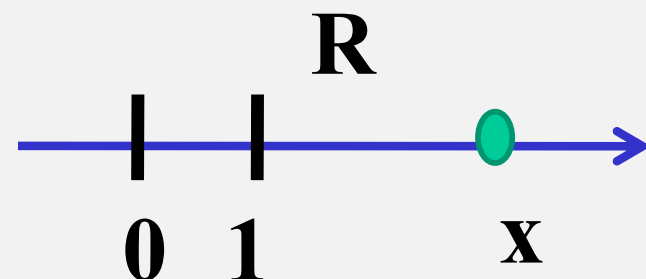
Lilia Meza Montes IFUAP

# **1.1 NÚMEROS REALES Y FUNCIONES**

# Conjuntos de números

- Naturales  $N = \{1, 2, 3, \dots\}$
- Enteros  $Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- Racionales  $Q = \{p/q \mid p, q \in Z, q \neq 0\}$   
decimales periódicos
- Irracionales  $I = \{\text{no racionales: } \pi, e, \sqrt{2}, \dots\}$
- Reales  $R = Q \cup I$

Representación gráfica



# Figuras de Lissajous

$$x = A \text{ sen}(at + \delta)$$

$$y = B \text{ sen}(bt)$$

razón de frecuencias  $a/b$  es un entero

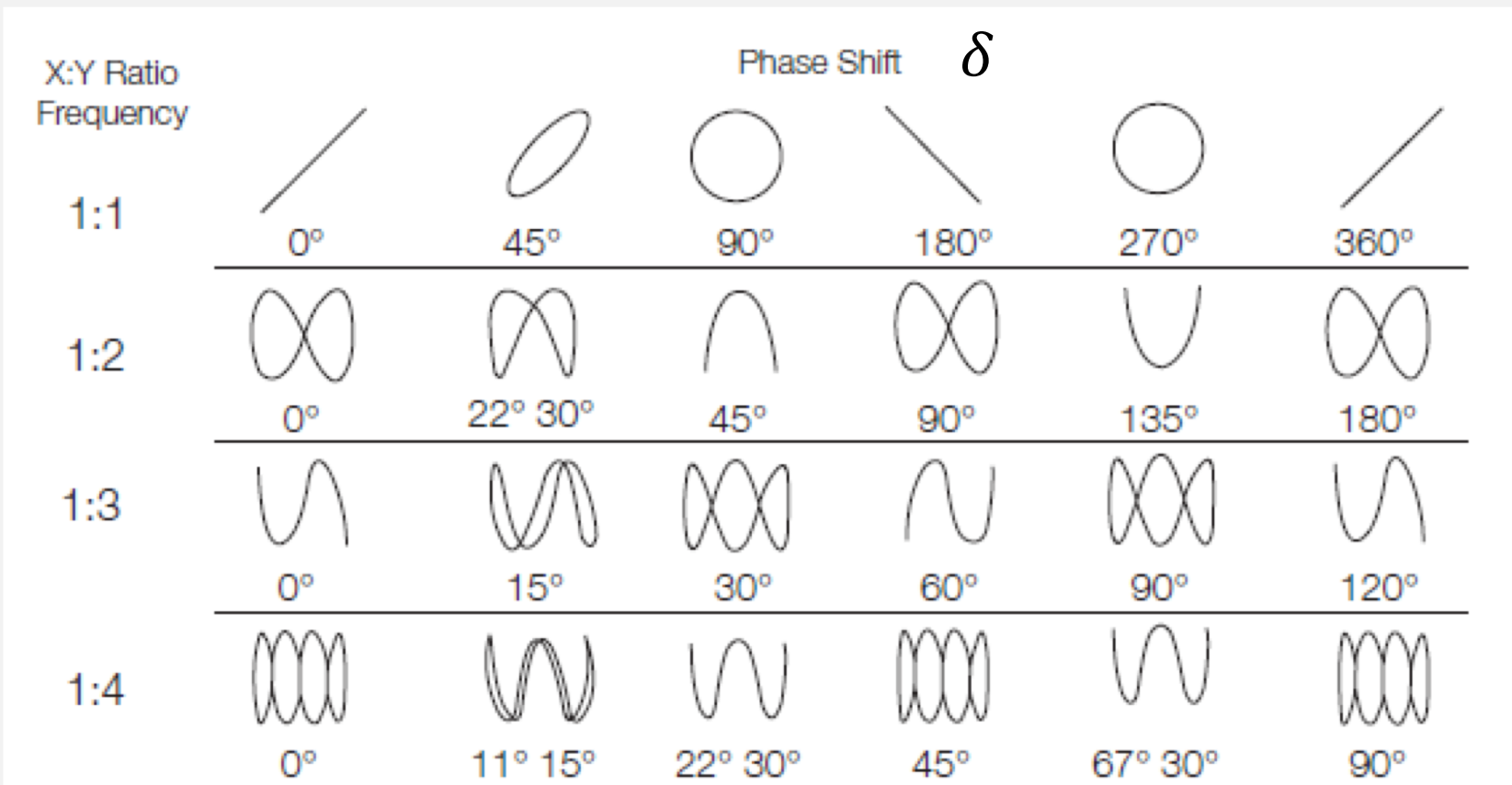
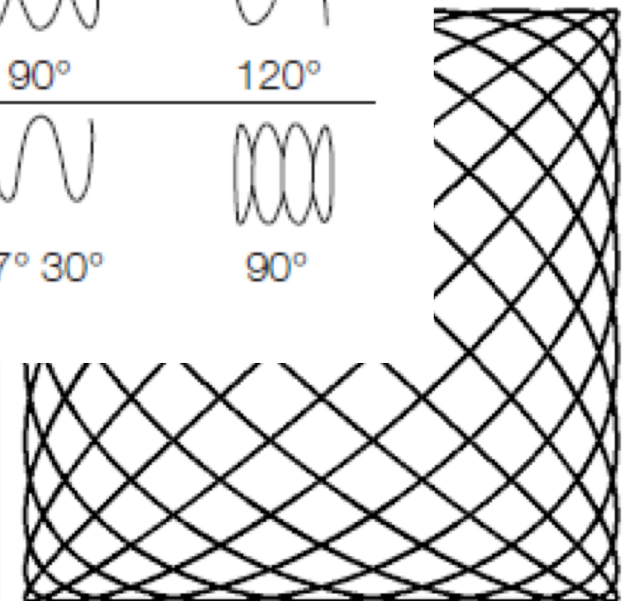


Figure 70. Lissajous patterns.



# Reales: forman un **campo**

bajo las operaciones de adición y multiplicación

Reglas del álgebra de números reales

$a, b, c \in \mathbb{R}$

1.  $a+b = b+a$  Adición conmutativa
2.  $a+(b+c) = (a+b) + c$  Adición asociativa
3.  $ab = ba$  Multiplicación conmutativa
4.  $a(bc) = (ab) c$  Multiplicación asociativa
5.  $a(b+c) = ab + ac$  Distribución del producto  
la suma



# Reales: forman un **campo**

$a, b, c \in \mathbb{R}$

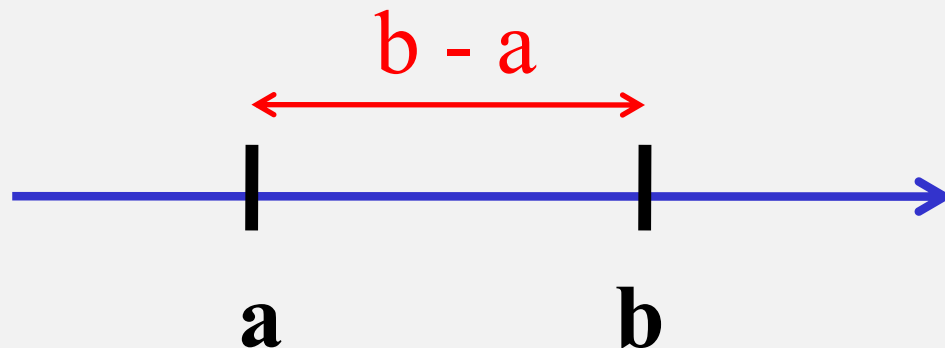
6. elemento Neutro de la suma  $0$   $a + 0 = a$
7. Inverso de  $a$  en suma  $-a$  tal que  $a + (-a) = 0$
8. Neutro de multiplicación  $1$  tal que  $a \cdot 1 = a$
9. Inverso de multiplicación  $1/a$  tal que  $a \cdot 1/a = 1$

# Reales: conjunto denso y ordenado

Conjunto denso: entre dos números reales existe un número real.

Existe una **relación de orden** entre los números.

Usamos el símbolo  $\leq$  para indicarla



Se dice que  **$a$  es menor que  $b$**

**$a < b$**  si  $b - a$  es positivo.

O bien,  **$b$  es mayor que  $a$ ,  $b > a$**

# Intervalos: subconjuntos de números

- Cerrado: incluye extremos

$$I=[a,b]=\{x \mid a \leq x \leq b\}$$



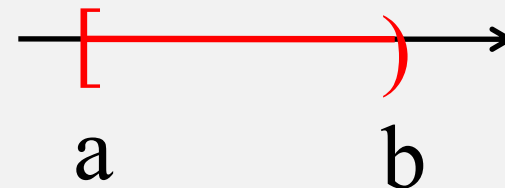
- Abierto: excluye extremos

$$I=(a,b)=\{x \mid a < x < b\}$$



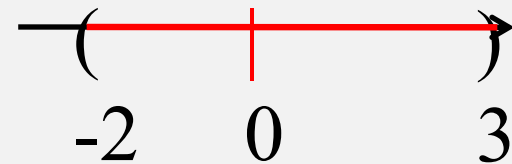
Semicerrado,

Semiabierto

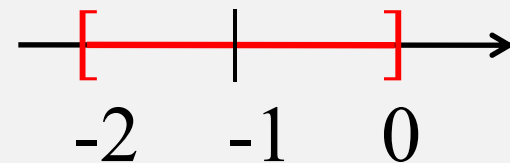


# Ejemplos

$$-2 < x < 3$$

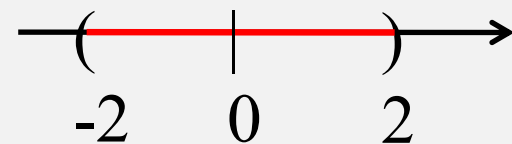


$$-2 \leq x \leq 0$$



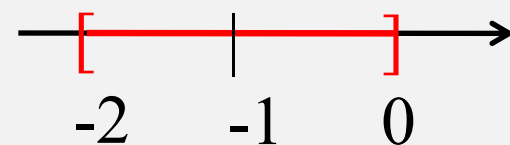
$$|x| < 2 \quad -2 < x < 2$$

radio del intervalo es 2



$$|x+1| \leq 1, \quad -1 \leq x - (-1) \leq 1$$

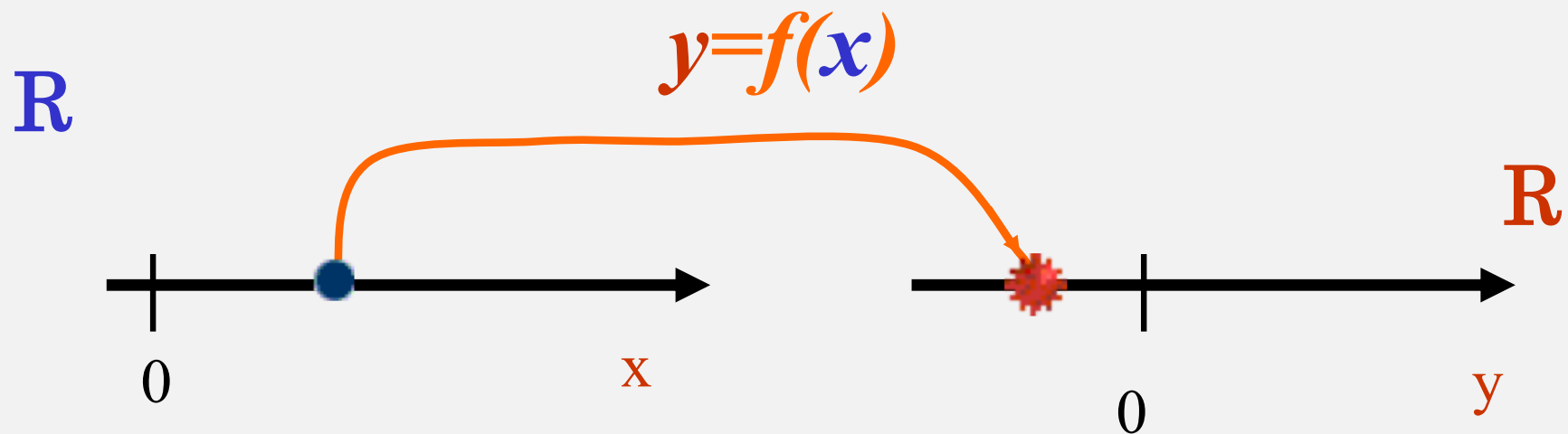
Centro del intervalo es 1



# **FUNCIONES**

# Función de una variable

Función : regla que asocia un **único** valor a cada elemento de un conjunto.



**Dominio:**  
Conjunto de números  
donde se evalúa la  
función

**Rango o Codominio:**  
Conjunto de valores  
asignados

# Algunos tipos de funciones

- Polinomios  $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n$

- Exponenciales  $f(x) = a^x$

$$a^m a^n = a^{m+n}, \quad a^m / a^n = a^{m-n}, \quad a \neq 0; \quad (a^m)^n = a^{mn}$$

- Logarítmicas  $f(x) = \log_a x$ ,  $a$  es la base

$$\text{Si } y = a^x \rightarrow x = \log_a y$$

Logaritmos naturales base  $e$  (*número de Euler*)

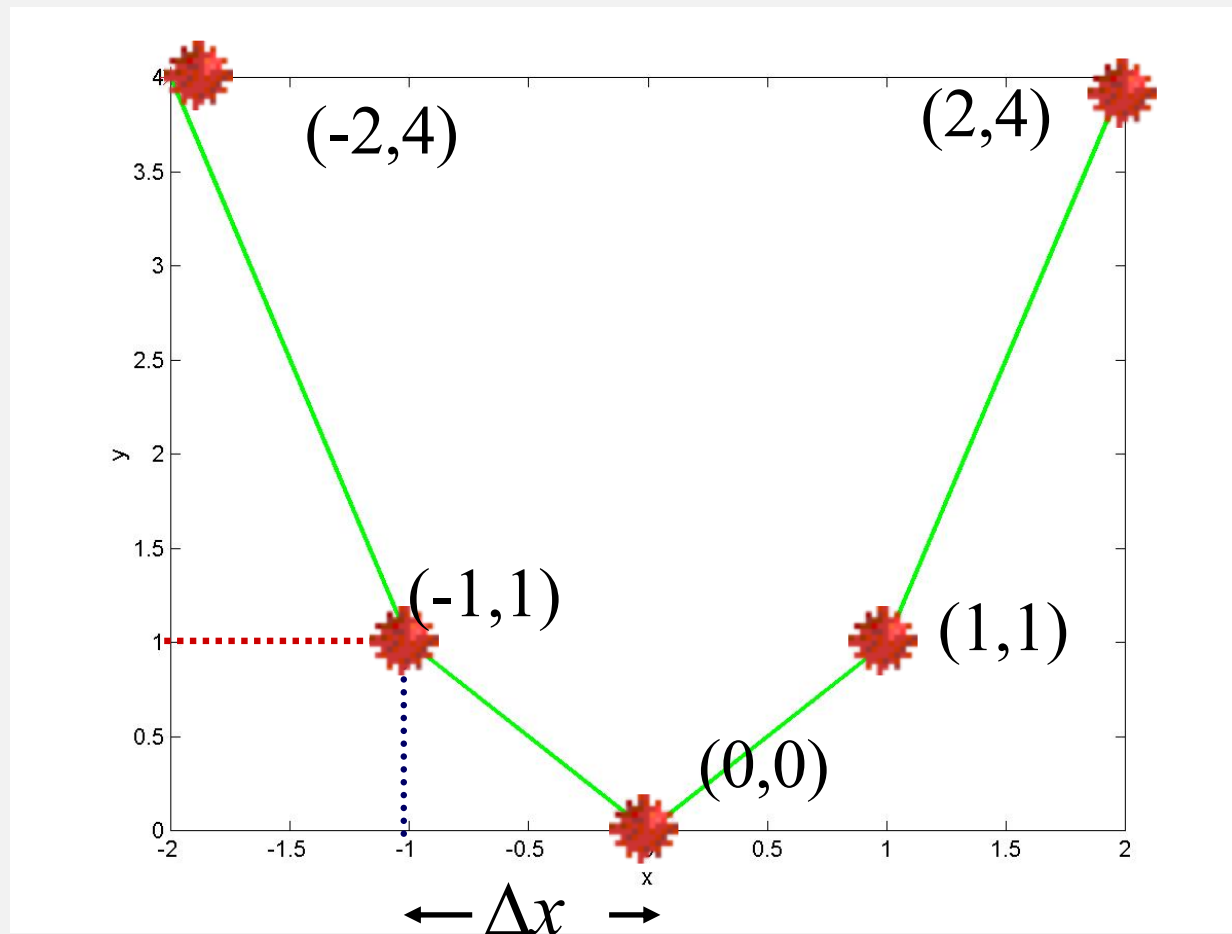
$$\ln(mn) = \ln m + \ln n, \quad \ln(m/n) = \ln m - \ln n, \quad \ln m^p = p \ln m$$

- Trigonómicas, Trigonómicas inversas,  
Hiperbólicas

# Gráfica

$$\Delta x = 1$$

<b>x</b>	<b>y=f(x)=x<sup>2</sup></b>
<b>-2</b>	<b>(-2)(-2)=4</b>
<b>-1</b>	<b>1</b>
<b>0</b>	<b>0</b>
<b>1</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>2·2=4</b>



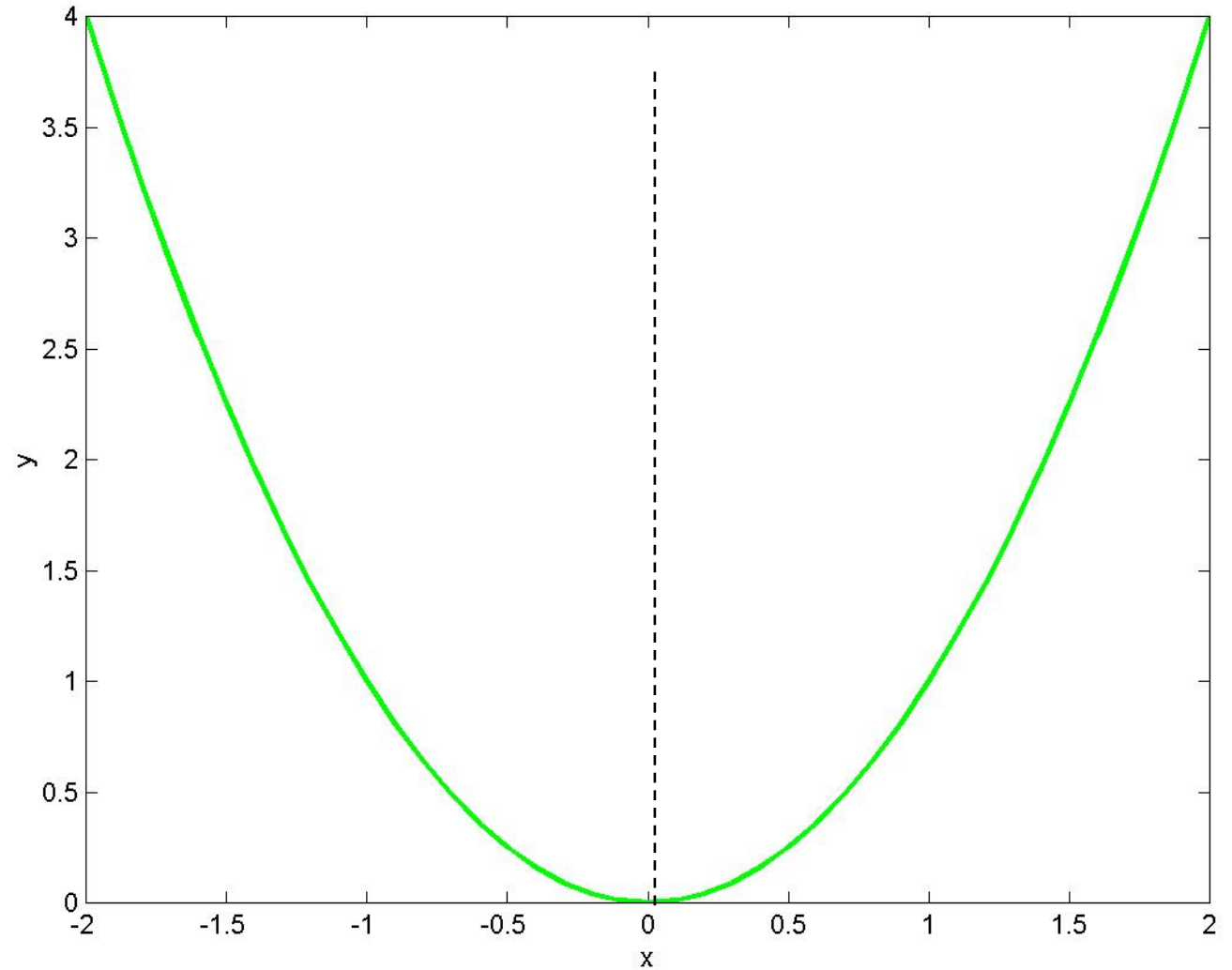
Función par  $f(x) = f(-x)$



# Gráfica

Paso 'más fino'

$$\Delta x = 0.1$$

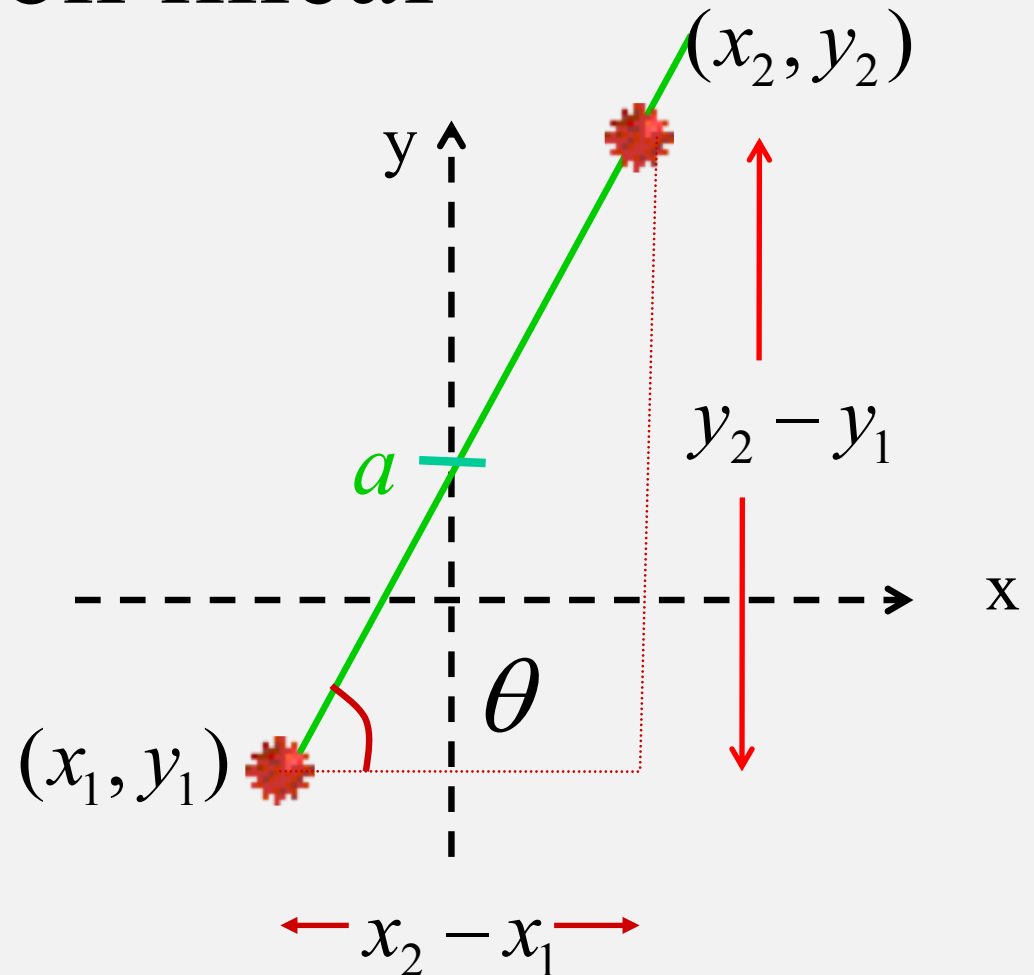


# Función lineal

$$y = a + bx$$

a: ordenada al origen  
b: pendiente (medida de la inclinación de la recta)

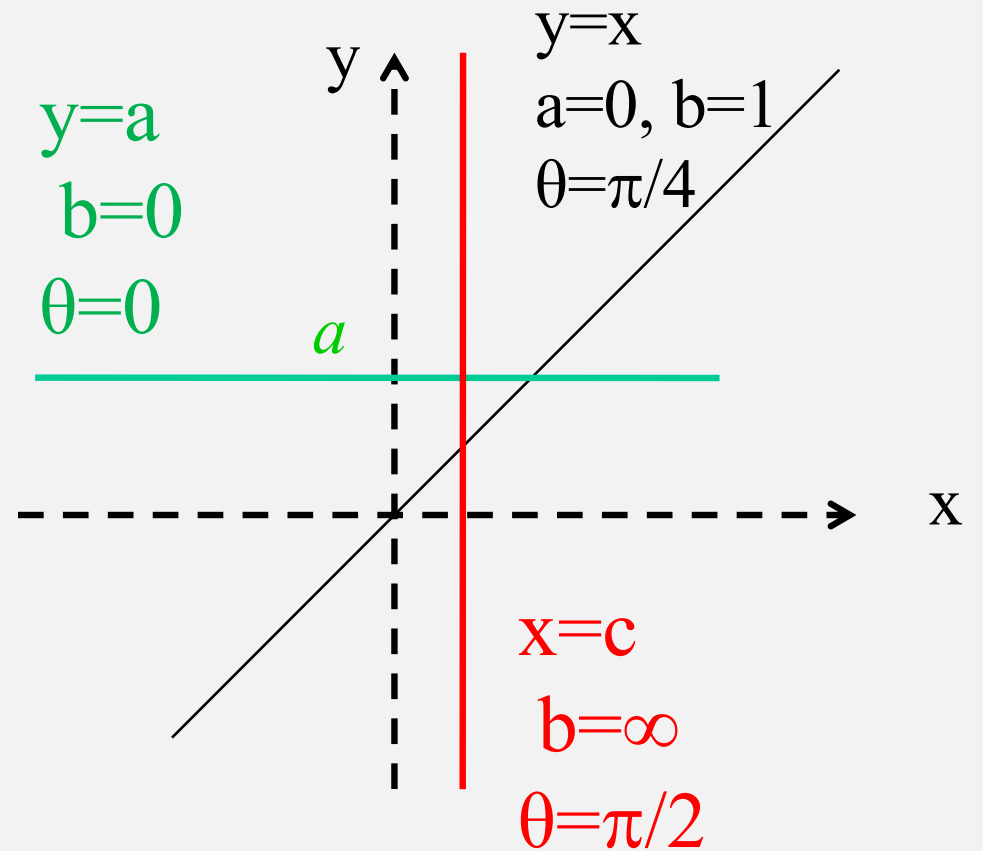
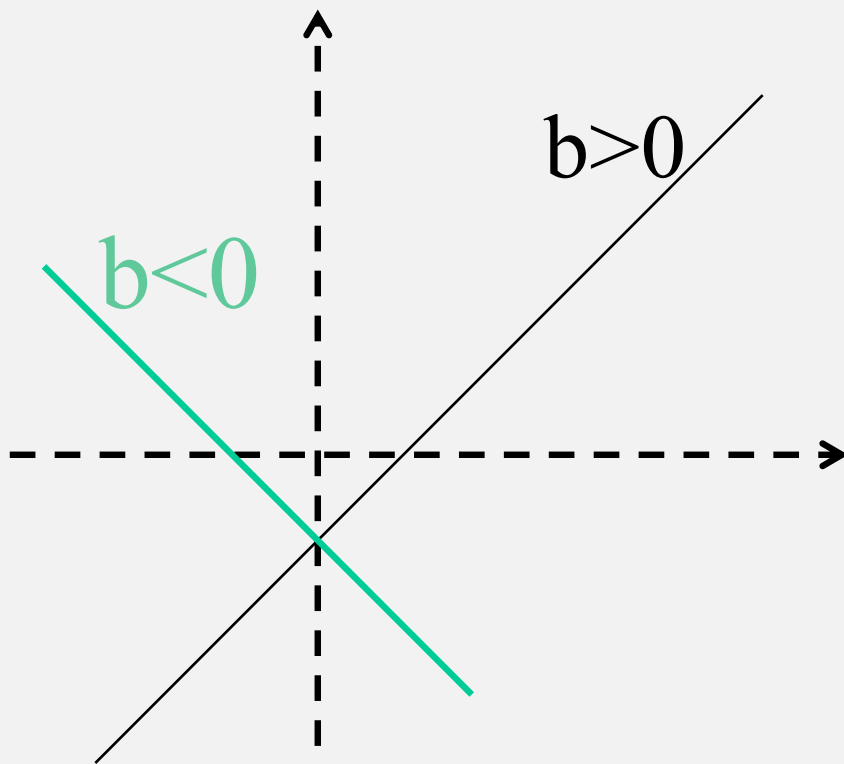
$$b = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$= \tan \theta$$



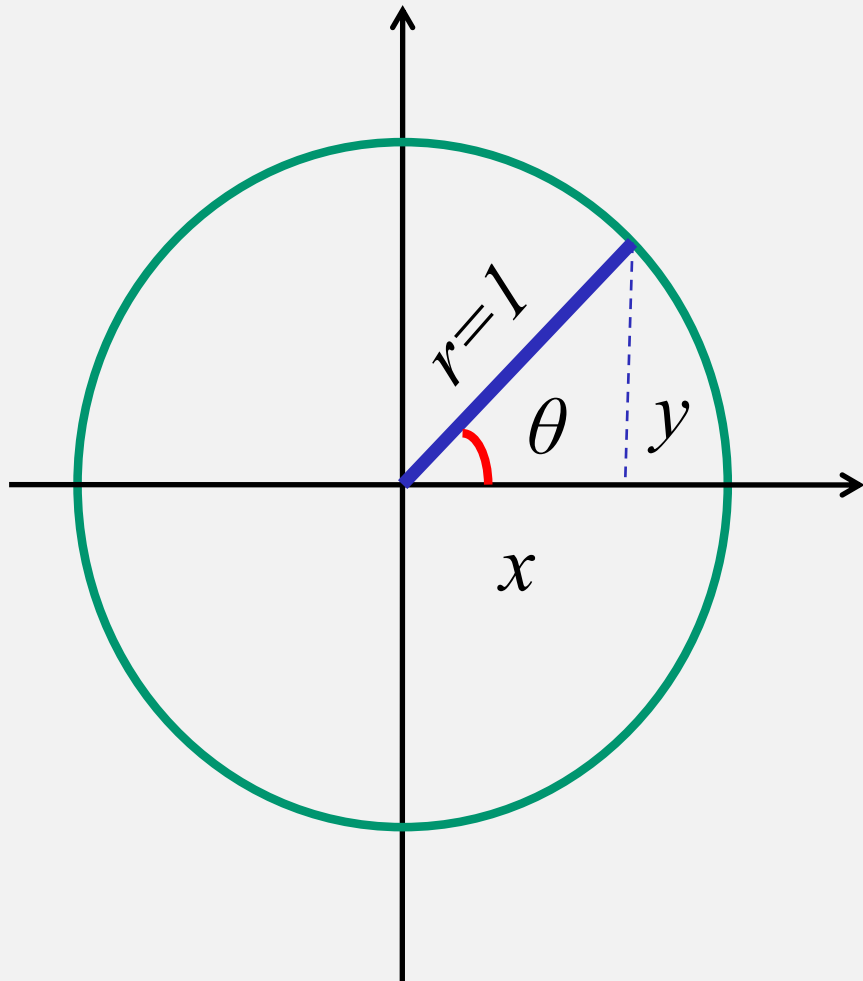
# Casos especiales

$$y = a + bx$$

$$b = \tan \theta$$



# Funciones trigonométricas



$$\cos \theta = x / r = x$$

$$\text{sen } \theta = y$$

$$\tan \theta = \text{sen } \theta / \cos \theta = y / x$$

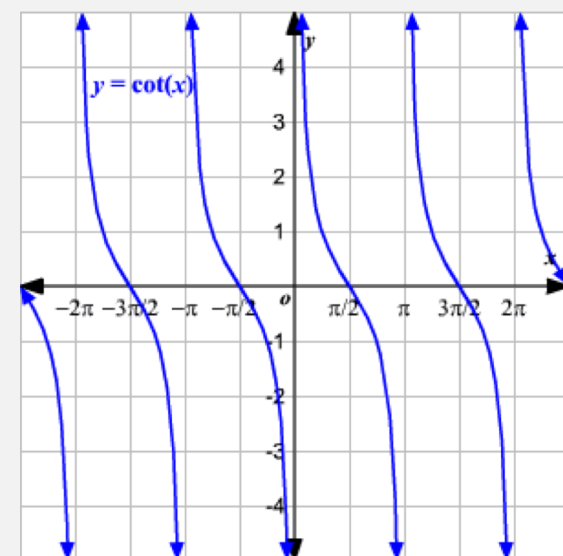
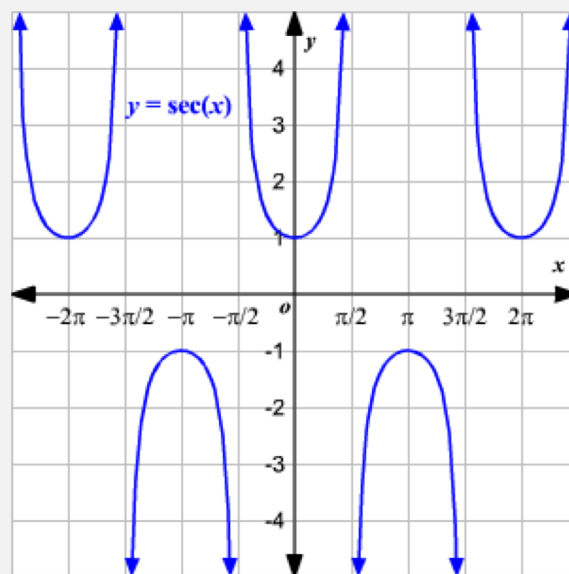
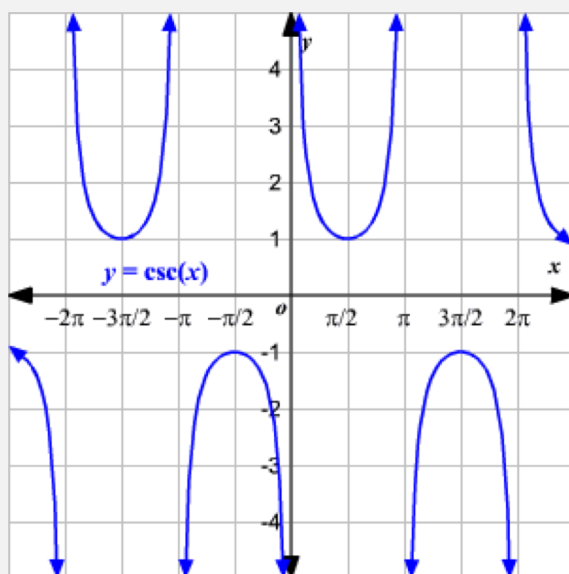
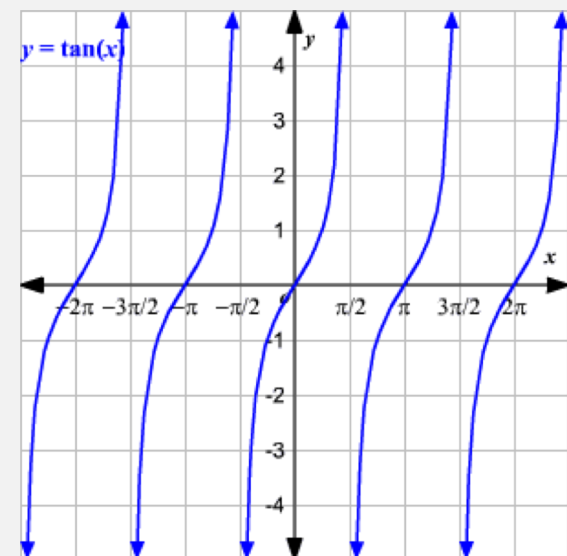
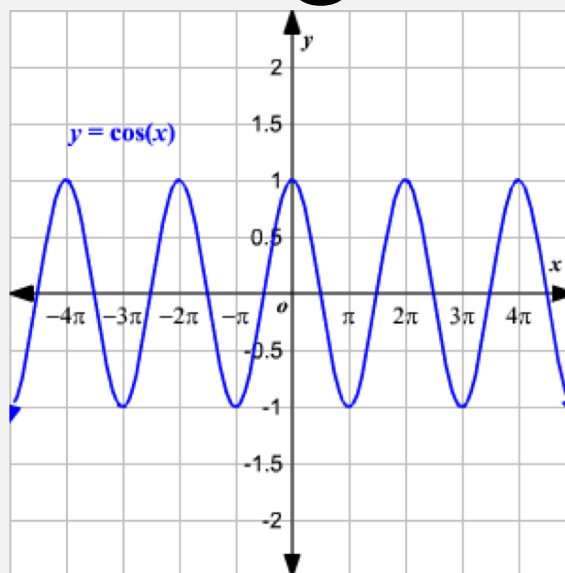
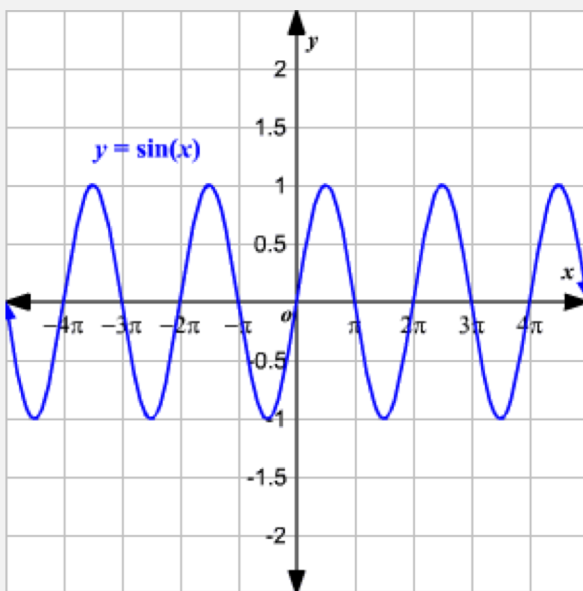
$$\cot \theta = 1 / \tan \theta = \cos \theta / \text{sen } \theta$$

$$\sec \theta = 1 / \cos \theta$$

$$\csc \theta = 1 / \text{sen } \theta$$

Identidades

# Funciones trigonométricas



# Paridad y periodicidad

Par  $f(-x) = f(x)$

Impar:  $f(-x) = -f(x)$

$$y = \cos(x)$$

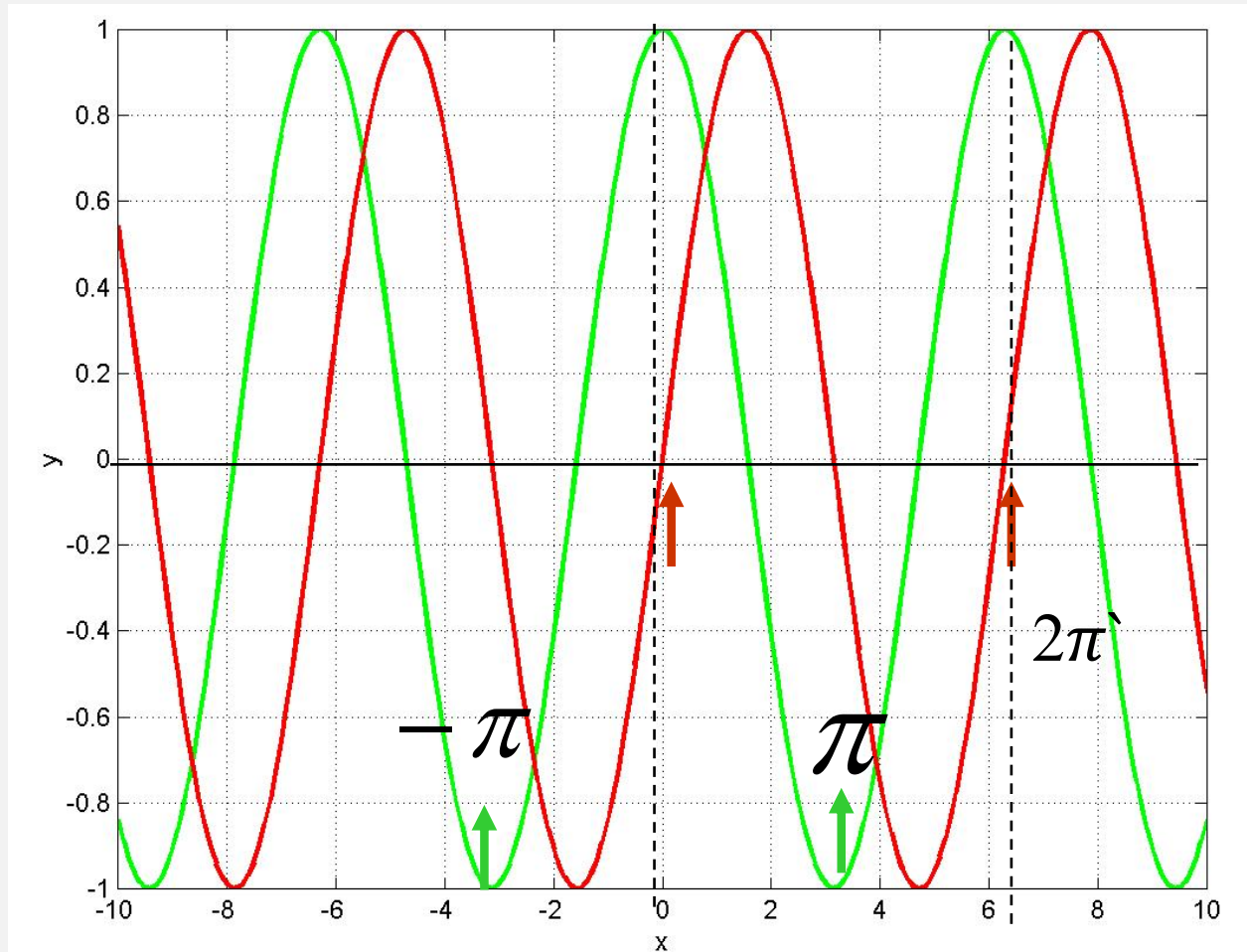
par

$$y = \text{sen}(x)$$

impar

Periódicas  
Con periodo

$2\pi$

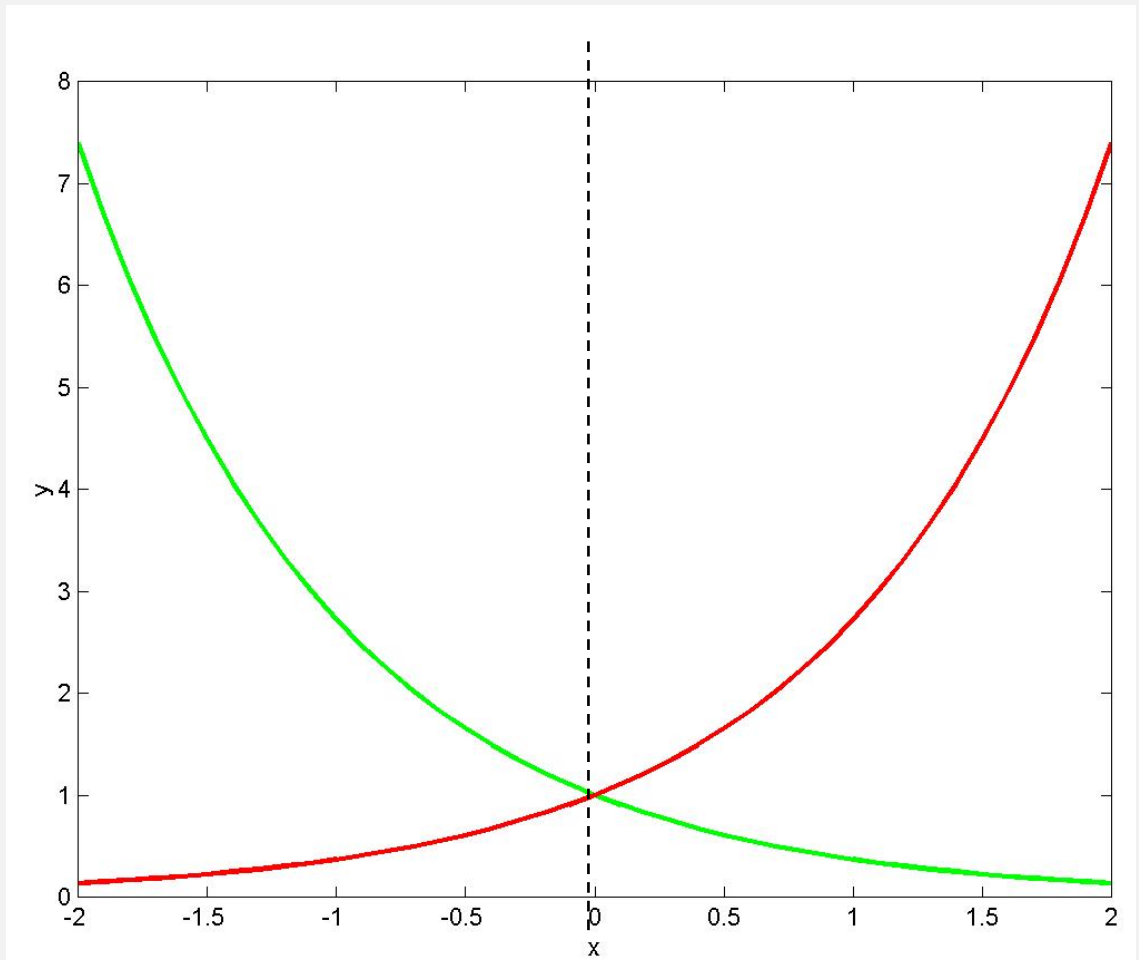


# Función exponencial

$$y = e^{-x} = \exp(-x)$$

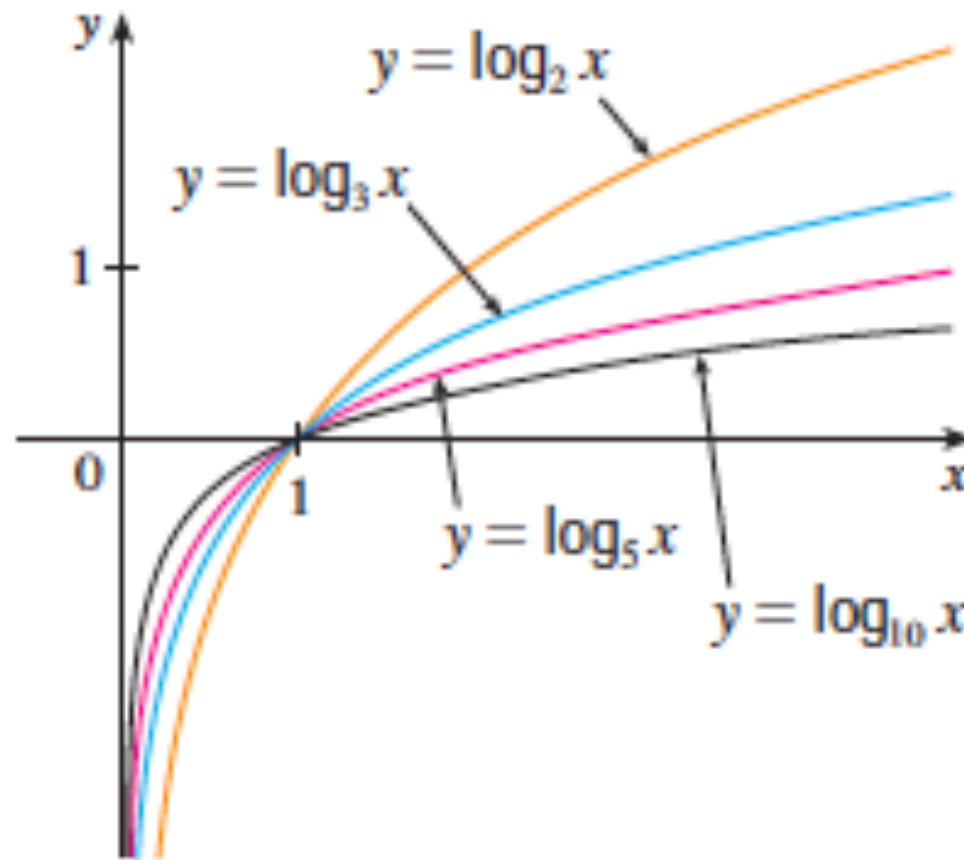
$$y = e^x = \exp(x)$$

No tiene paridad definida



# Funciones logarítmicas

$$\log_a x = y \iff a^y = x$$



Si  $0 < x < 1 \rightarrow$   
 $\log x < 0$



# Ejemplo 5

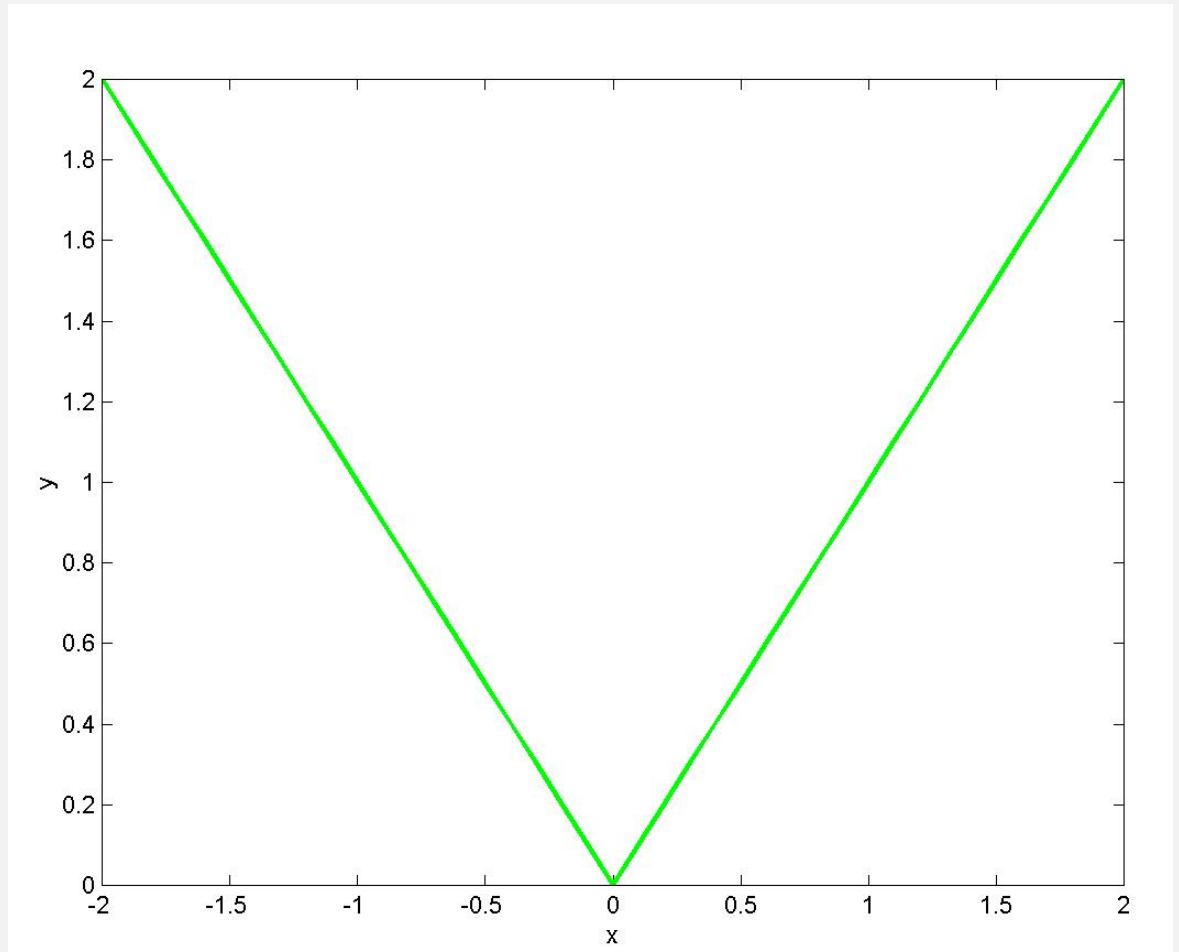
## Valor Absoluto

$$F(x) = |x| \\ = \text{abs}(x)$$

$$F(x) = x \text{ si } x \geq 0$$

$$F(x) = -x \text{ si } x < 0$$

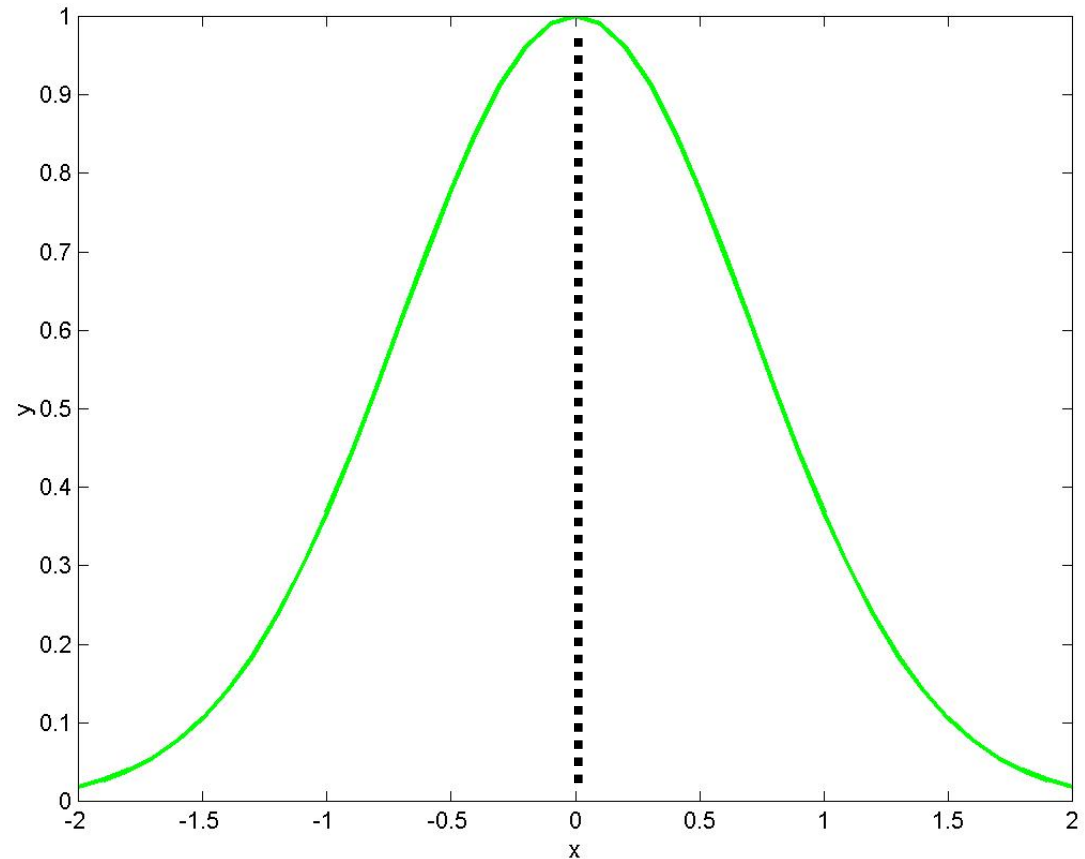
par



# Función gaussiana

$$y = e^{-x^2}$$
$$= \exp(-x^2)$$

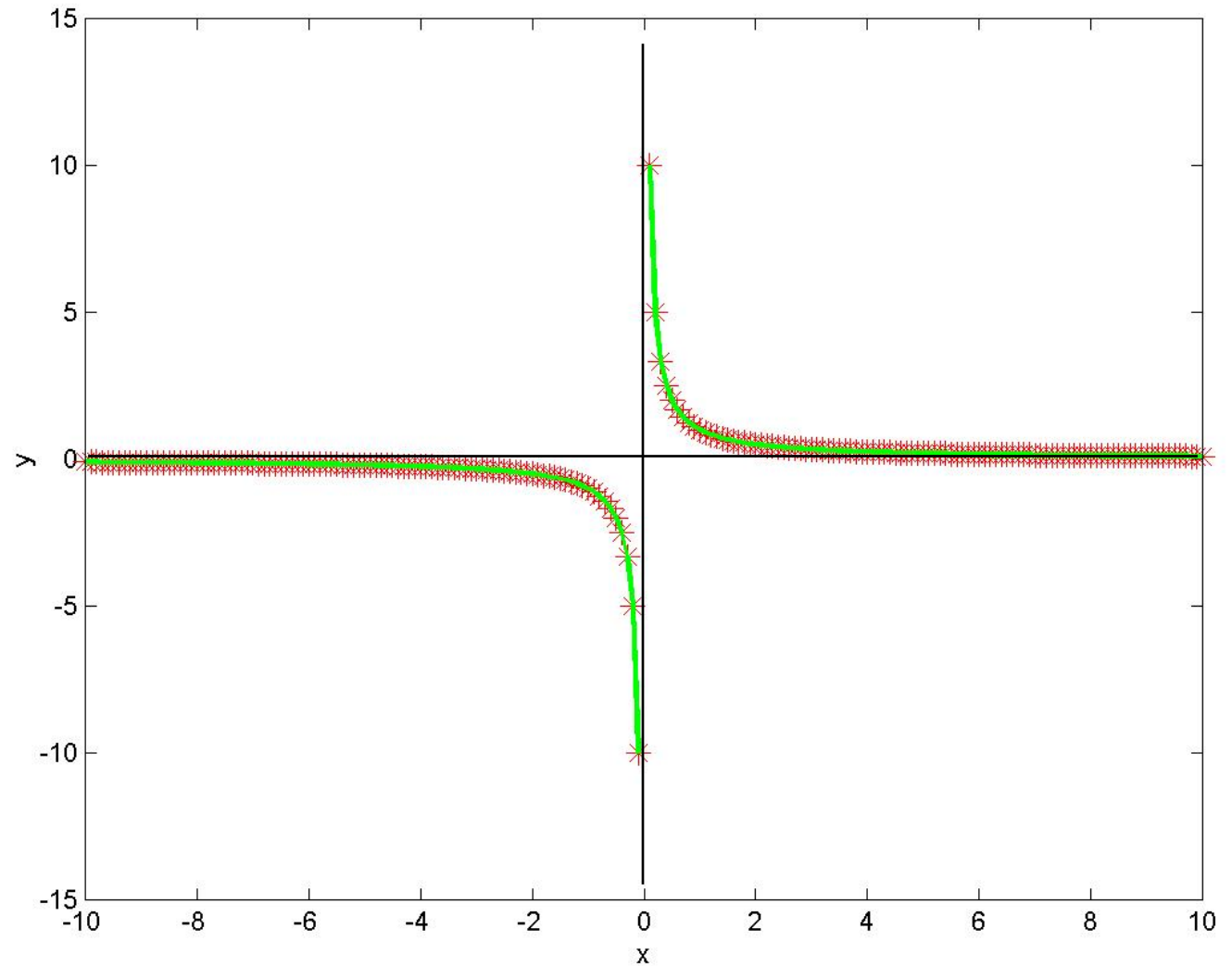
par



# Ejemplo 4

$$y = 1/x$$
$$= x^{-1}$$

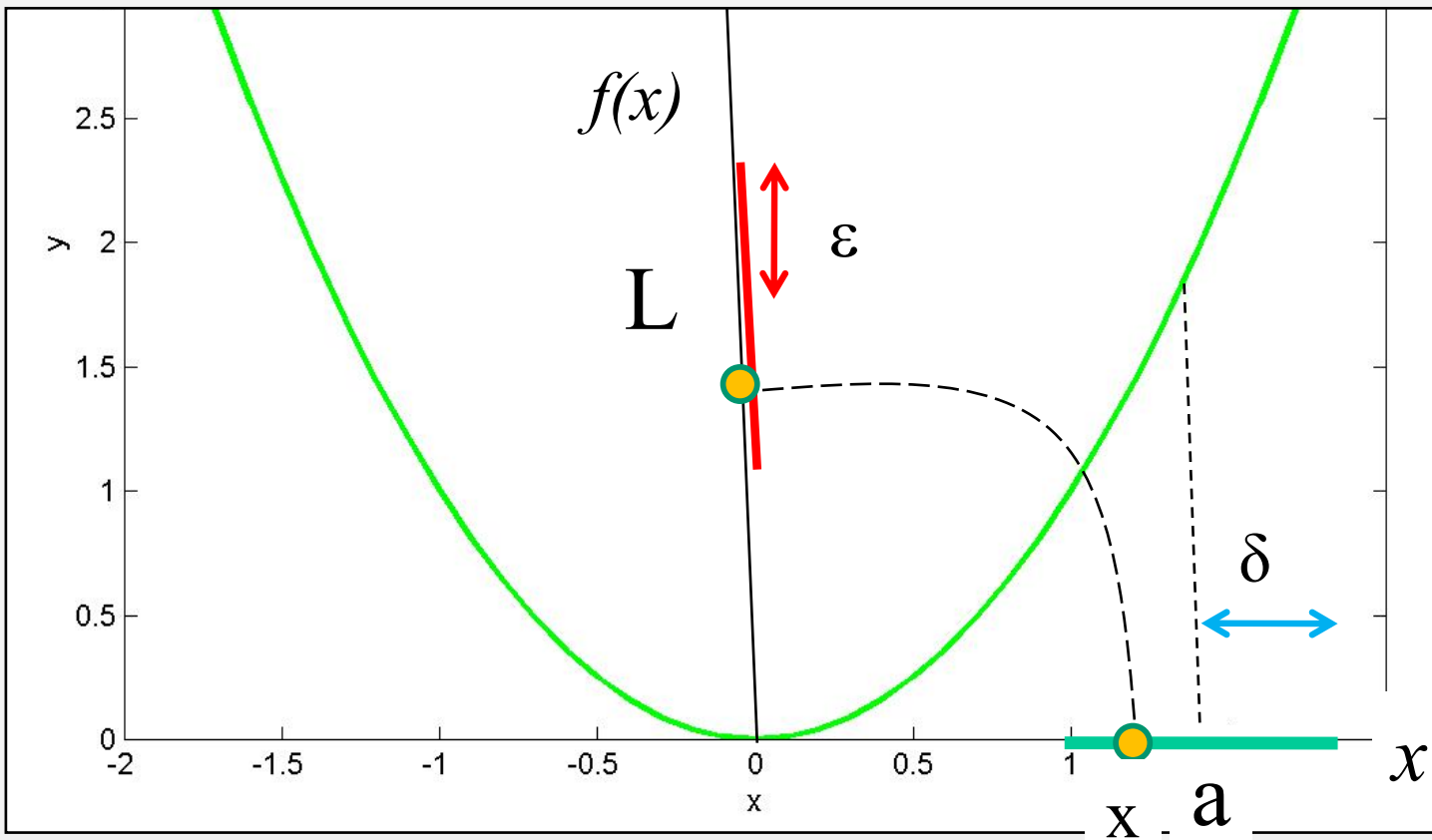
**Discontinua**  
**en  $x=0$**   
**Impar**



# LÍMITES Y CONTINUIDAD

# Límite

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \delta > 0 \exists \varepsilon > 0 \text{ tal que } |f(x) - L| < \varepsilon \text{ si } |x - a| < \delta$$



# Teoremas sobre límites

$$\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = l_1; \quad \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = l_2$$

$$a) \lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) \pm f_2(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = l_1 \pm l_2$$

$$b) \lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) f_2(x)] = [\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)] [\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)] = l_1 l_2$$

$$c) \lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) / f_2(x)] = [\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)] / [\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)] = l_1 / l_2; l_2 \neq 0$$

# Continuidad

Una función  $f(x)$  es continua en  $a$  si

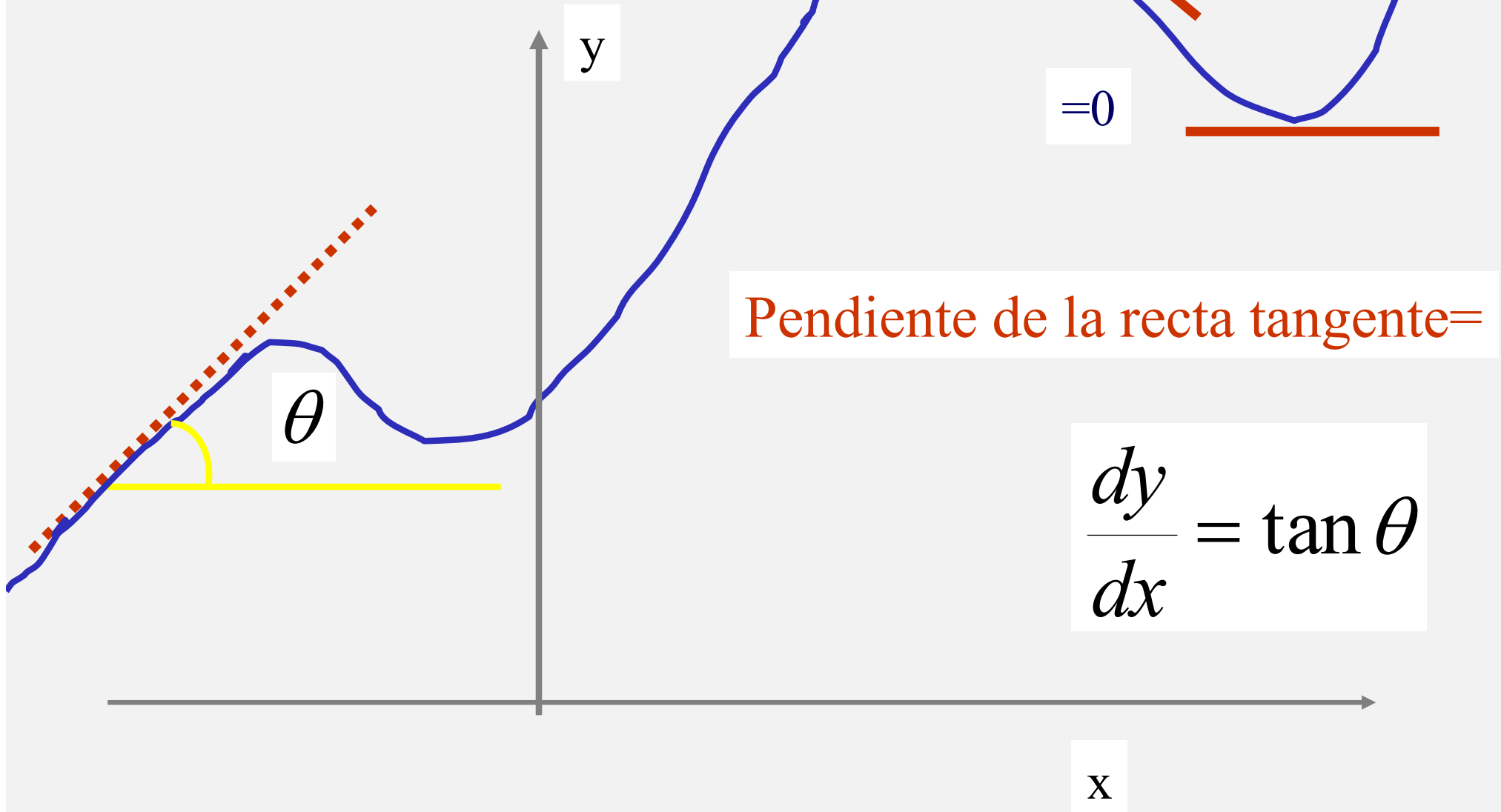
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

# Derivadas

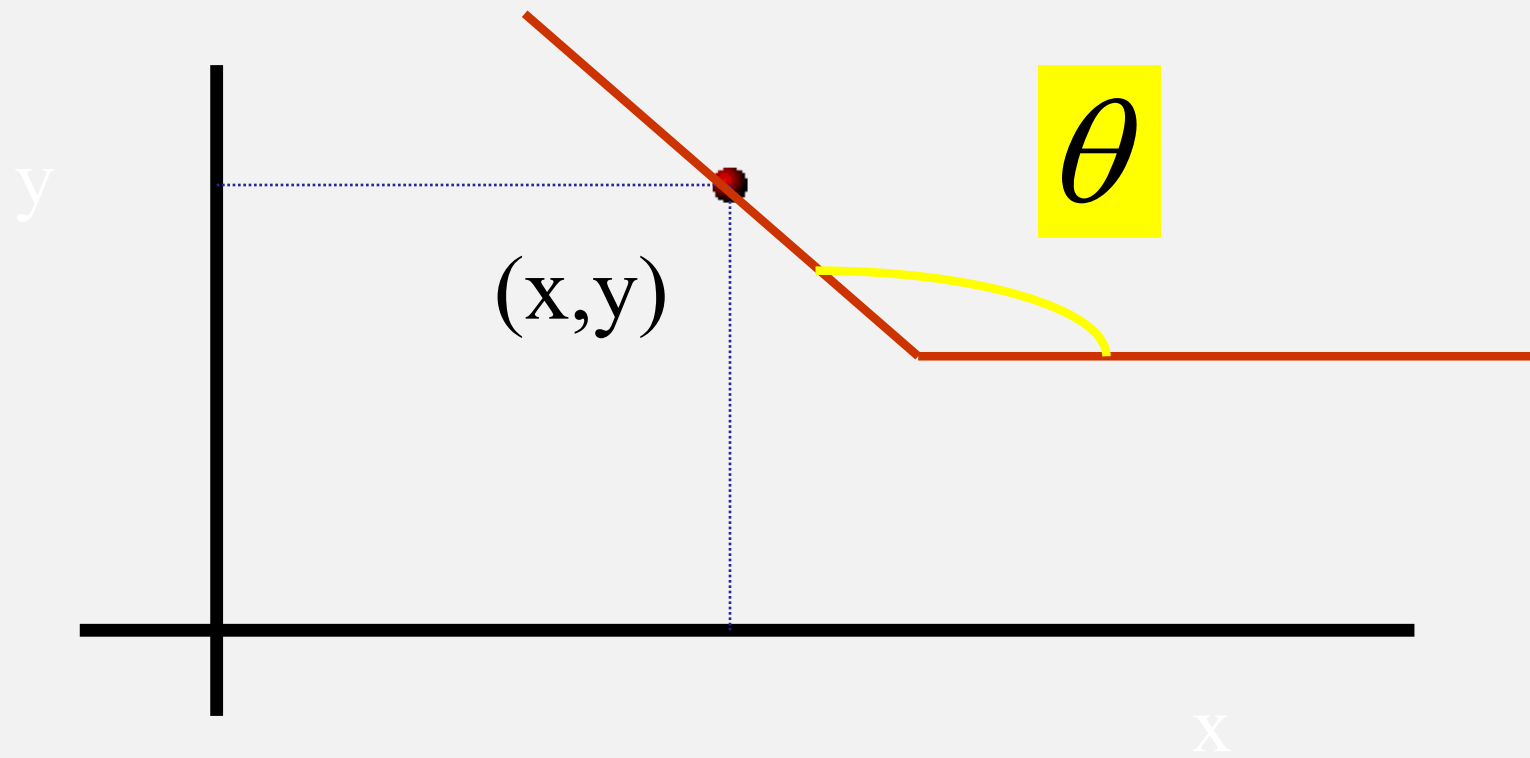




# razón de cambio de $y(x)$



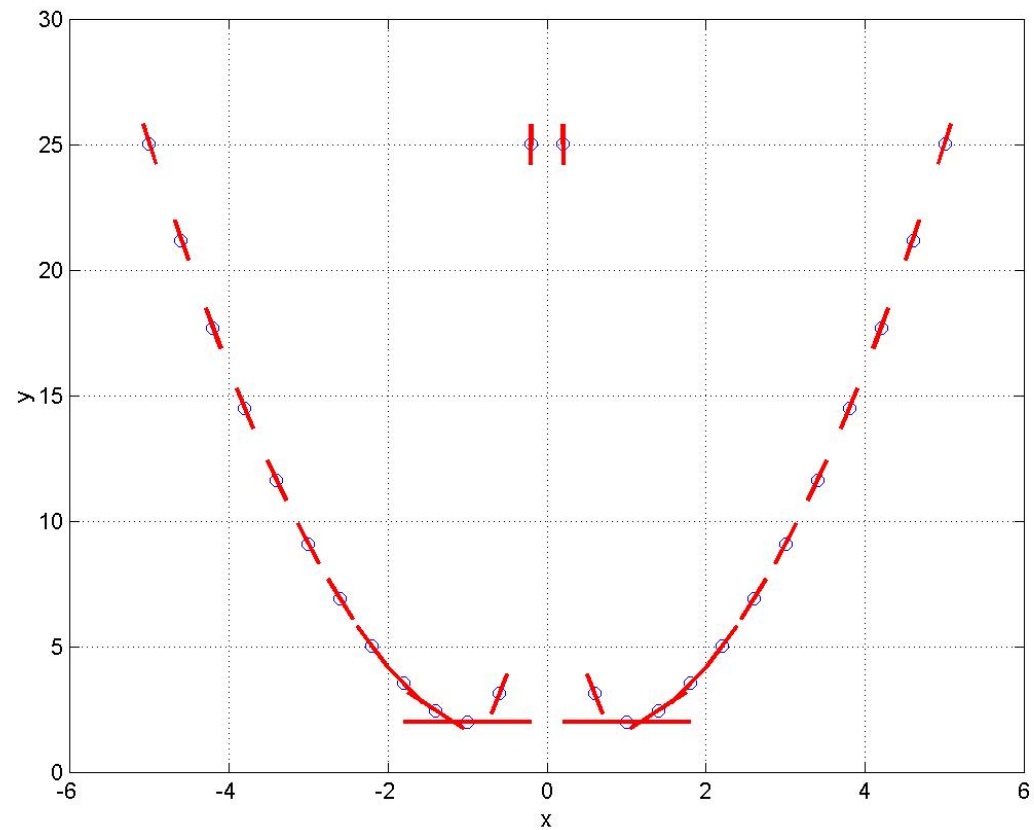
$$\frac{dy}{dx} = \tan \theta$$



# Ejemplo 1

$$y = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x - \frac{2}{x^3}$$

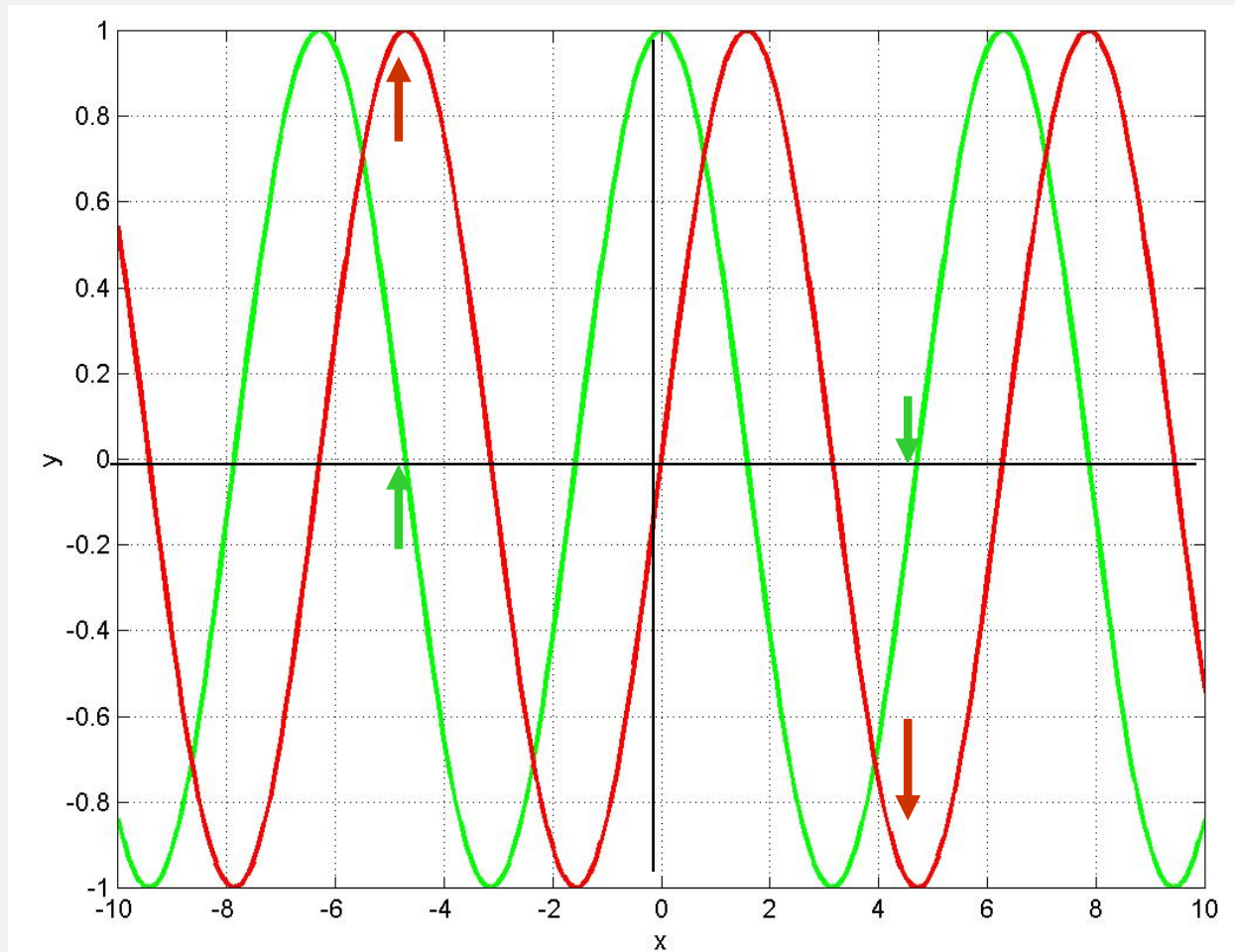


## Ejemplo 2

$$y = \text{sen}(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \text{cos}(x)$$

Derivada es cero  
en máximos y mínimos



# Regla de la cadena

Se aplica a **funciones compuestas**.

Una variable. Sea  $f(x) = f \circ g(x) = f(g(x))$ ,

la derivada de  $f$  respecto a  $x$  es

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) g'(x)$$

Otra notación. Sea  $y = f(u)$ ,  $u = g(x)$ , la derivada de  $f$  respecto a  $x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

# Diferencial

- Definición: cambio infinitesimal de la función al hacer un cambio infinitesimal de la variable independiente.
- Valor aproximado del cambio de la función  $\Delta f$  cuando la variable cambia  $\Delta x$

$$df = \frac{df}{dx} dx$$

$$\Delta f \approx \frac{df}{dx} \Delta x$$

# Tabla de derivadas

Tipo	$f(x)$	$f'(x)$
Constante*	$f(x)=k$	$f'(x)=0$
Identidad	$f(x)=x$	$f'(x)=1$
Potencial*	$f(x)=x^n$	$f'(x)=n \cdot x^{n-1}$
Constante por función*	$f(x)=k \cdot x^n$	$f'(x)=k \cdot n \cdot x^{n-1}$
Raíz cuadrada	$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
Logaritmo neperiano	$f(x)=\ln(x)$	$f'(x)=\frac{1}{x}$
Logaritmo en base $a^*$	$f(x)=\log_a(x)$	$f'(x)=\frac{1}{x} \log_a(e)$
$e$ elevado a $x$	$f(x)=e^x$	$f'(x)=e^x$



<b>e elevado a x</b>	$f(x)=e^x$	$f'(x)=e^x$
<b>Exponencial*</b>	$f(x)=a^x$	$f'(x)=a^x \cdot \ln(a)$
<b>Seno*</b>	$f(x)=\sin(x)$	$f'(x)=\cos(x)$
<b>Coseno*</b>	$f(x)=\cos(x)$	$f'(x)=-\sin(x)$
<b>Tangente</b>	$f(x)=\tan(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} =$ $= 1 + \tan^2(x) =$ $= \sec^2(x)$
<b>Arcoseno</b>	$f(x)=\arcsin(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
<b>Arcocoseno</b>	$f(x)=\arccos(x)$	$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
<b>Arcotangente</b>	$f(x)=\text{arctan}(x)$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

## Derivada de operaciones con funciones

### Operación

**Suma**

$$D(f + g) = f' + g'$$

**Resta**

$$D(f - g) = f' - g'$$

**Multiplicación**

$$D(f \cdot g) = f'g + f \cdot g'$$

**División**

$$D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'g + f \cdot g'}{g^2}$$

**Composición** (Regla de la cadena)

$$D(g(x) \circ f(x)) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$