Funciones vectoriales

Ecuaciones paramétricas

Ecuaciones paramétricas

Las componentes del campo vectorial son funciones de algún parámetro

$$x = f(t); \qquad y = g(t); \qquad z = h(t)$$

t parámetro (puede ser el tiempo o algún otro)

Función vectorial en el plano

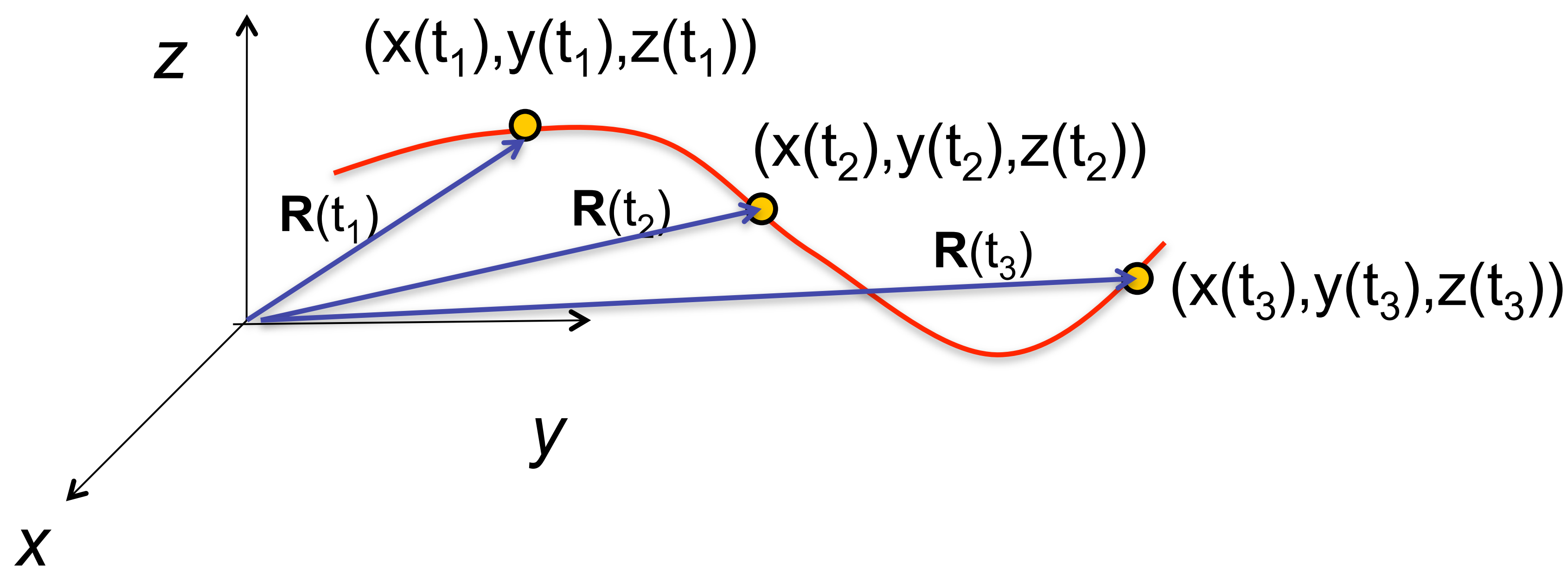
$$\boldsymbol{R}(t) = f(t)\,\boldsymbol{i} + g(t)\,\boldsymbol{j}$$

Función vectorial en el espacio

$$\boldsymbol{R}(t) = f(t)\,\boldsymbol{i} + g(t)\,\boldsymbol{j} + h(t)\,\boldsymbol{k}$$

Gráficamente

- Para cada valor del parámetro t tenemos las coordenadas $(x(t),y(t),z(t))$ con vector de posición $\boldsymbol{R}(t) = f(t)\,\boldsymbol{i} + g(t)\,\boldsymbol{j} + h(t)\,\boldsymbol{k}$
$$= x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j} + z(t)\,\boldsymbol{k}$$



Operaciones

Dadas las funciones vectoriales **F** y **G** y las funciones reales f(t) y g(t)

i) Suma $(\mathbf{F}+\mathbf{G})(t) = \mathbf{F}(t) + \mathbf{G}(t)$

ii) Diferencia $(\mathbf{F}-\mathbf{G})(t) = \mathbf{F}(t) - \mathbf{G}(t)$

iii) Producto punto $(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G})(t) = \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{G}(t)$

iv) Producto vectorial $(\mathbf{F}\times\mathbf{G})(t) = \mathbf{F}(t) \times \mathbf{G}(t)$

v) Producto por escalar $(f\mathbf{F})(t) = f(t)\mathbf{F}(t)$

vi) Función compuesta $(\mathbf{F}\circ g)(t) = \mathbf{F}(g(t))$

Ejemplos

- Figuras de Lissajous

https://www.desmos.com/calculator/tti5dasmc4

http://lissajousfigure.netne.net/

http://mathworld.wolfram.com/LissajousCurve.html

Mathematical heart

$x = 5 \sin 3t,$

$y = 4\cos(t) - 1.3\cos(2t) - 0.6\cos(3t) - 0.2\cos(4t)$

Derivada

- **Definición**

$$\vec{R}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{R}(t+\Delta t) - \vec{R}(t)}{\Delta t}$$

Teorema

R'(t) = f'(t) **i** + g'(t) **j** + h'(t) **k**

Vector tangente a la curva definida por **R**(t)
Similarmente, integral.

Por componentes (R^2)

- De la definición y ***R****(t)* = *f(t)* ***i*** + *g(t)* ***j***

$$\vec{R}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{R}(t+\Delta t)-\vec{R}(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}\mathbf{i} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{g(t+\Delta t)-g(t)}{\Delta t}\mathbf{j} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{h(t+\Delta t)-h(t)}{\Delta t}\mathbf{k}$$

$$= \frac{df}{dt}\mathbf{i} + \frac{dg}{dt}\mathrm{j} + \frac{dh}{dt}\mathbf{k} = \mathrm{f}'(\mathrm{t})\mathbf{i} + g'\,\mathrm{j} + h'\mathbf{k}$$

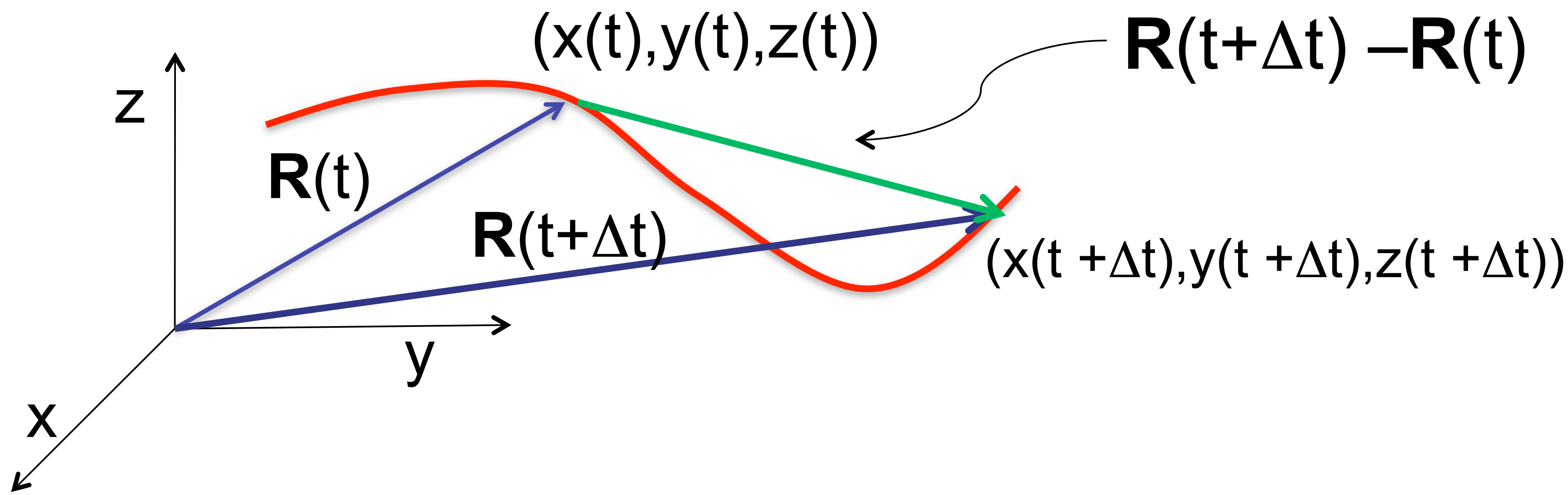
•Derivar cada una de las componentes
•Derivadas de cualquier orden (si existen)

Gráficamente

$\mathbf{R}(t+\Delta t) = f(t+\Delta t)\,\mathbf{i} + g(t+\Delta t)\,\mathbf{j} + h(t+\Delta t)\,\mathbf{k}$

$\mathbf{R}(t) = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j} + h(t)\,\mathbf{k}$

$\quad = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$



En el límite $\Delta t \rightarrow 0$ el vector derivada es **tangente** a la trayectoria

Reglas de derivación

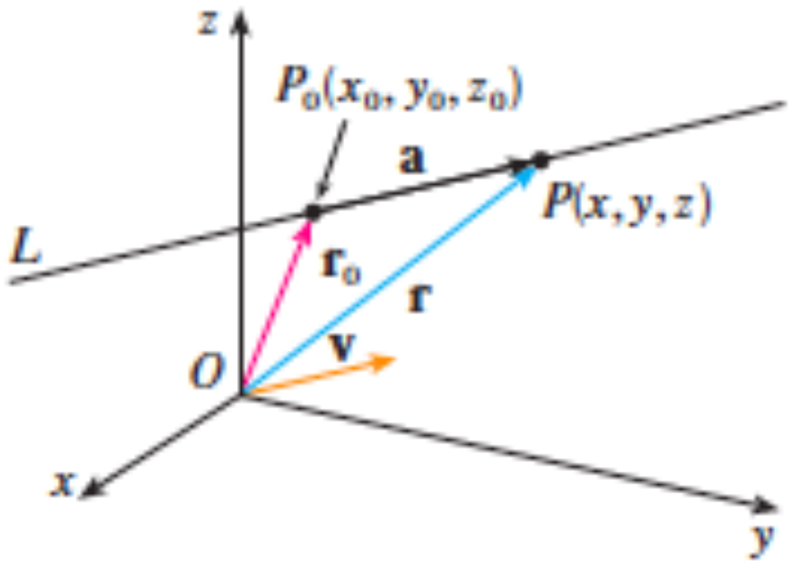
$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\bullet\mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt}\bullet\mathbf{B} + \mathbf{A}\bullet\frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt}\times\mathbf{B} + \mathbf{A}\times\frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}f(t)\mathbf{A} = \frac{df}{dt}\mathbf{A} + f\frac{d\mathbf{A}}{dt}$$

Aplicaciones: Ecuación de la recta en R^3



Determinada por un punto P_0 y la dirección dada por un vector **v**

Sea P(x,y,z) punto sobre línea con posición **r.**
Posición de P_0 es $\mathbf{r}_0$
Sea *t* un escalar, **a**= *t***v**

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a} = \mathbf{r}_0 + t\,\mathbf{v}$$

Ecuaciones de la recta

$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\,\mathbf{v}$

Ecuaciones paramétricas.
Si v=<a, b, c>

$$x = x_0 + at \qquad y = y_0 + bt \qquad z = z_0 + ct$$

Ecuaciones simétricas.
Despejando t e igualando

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Aplicaciones: vectores unitarios

Vector unitario tangente

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

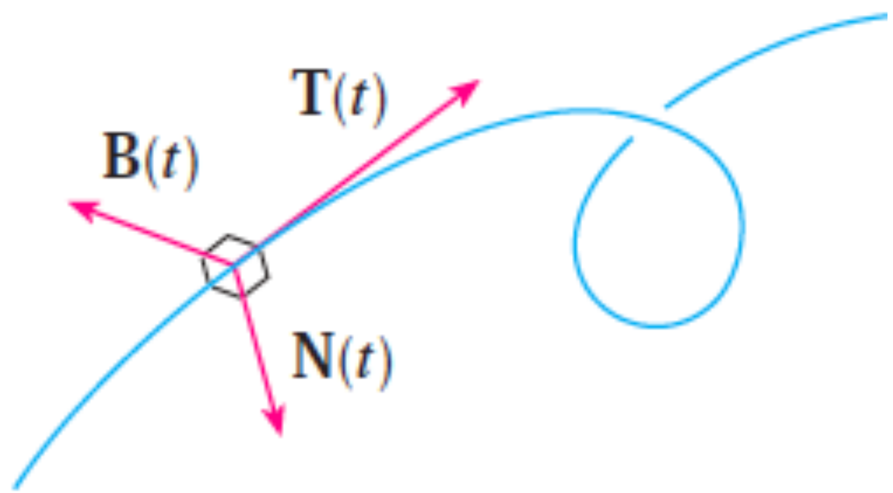
$$\mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{T}'(t) = 0$$

Normal unitario

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|}$$

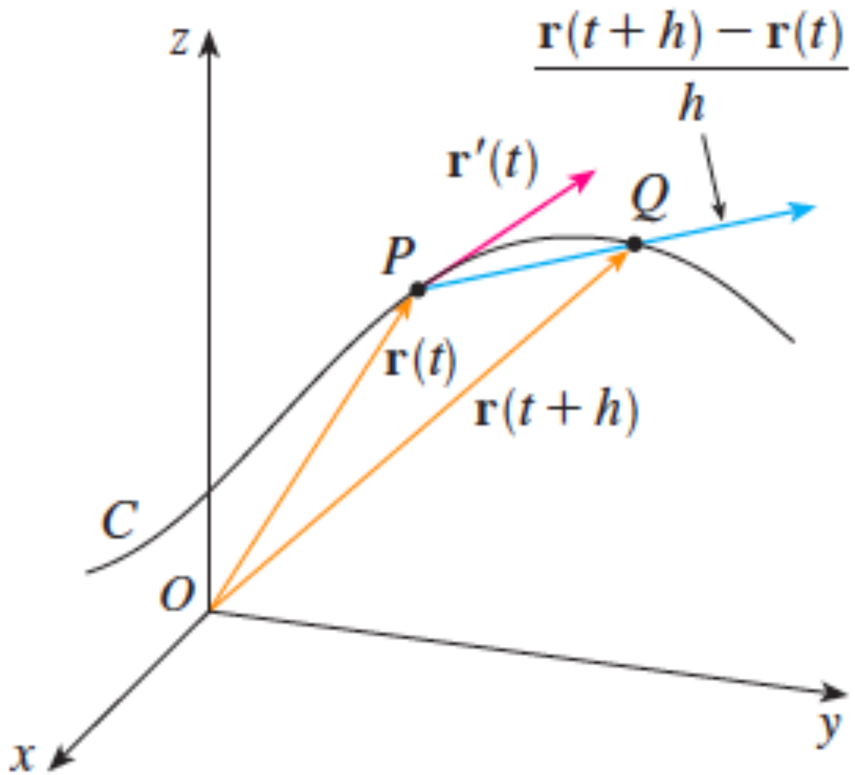
Binormal

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$$



T y Nplano osculante

Velocidad y aceleración



$$\mathbf{v}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h} = \mathbf{r}'(t)$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t)$$

Bibliografía

- Stewart, James. Cálculo, Trascendentes tempranas. Trad. J. E. Pérez C. y D. Garmendia G. México, International Thomson Editores. 2001. 991 páginas.
- Leithold, L. El Cálculo. Trad. F. Mata G. 7a Edición. México. Oxford University Press -Harla México. 1998.1360 páginas.
- Larson, R. E.,Hostetler, R.P.,Edwards, B.H., Cálculo y Geometría Analítica, Vol. 2, 6ª Ed., McGraw Hill.