# Matemáticas para ingeniería I

Ingeniería en Mecatrónica

Lilia Meza Montes – IFUAP

Otoño 2017

# Concepto de campo vectorial. Producto por escalar, producto interior y vectorial de campos vectoriales. Ejemplos

Repaso Algebra vectorial

Campos vectoriales

# Escalares y Vectores

- **Escalar**: definido solo por **magnitud**
  Notación: letras comunes
  Ejemplo: masa (m), temperatura (T), longitud (l)

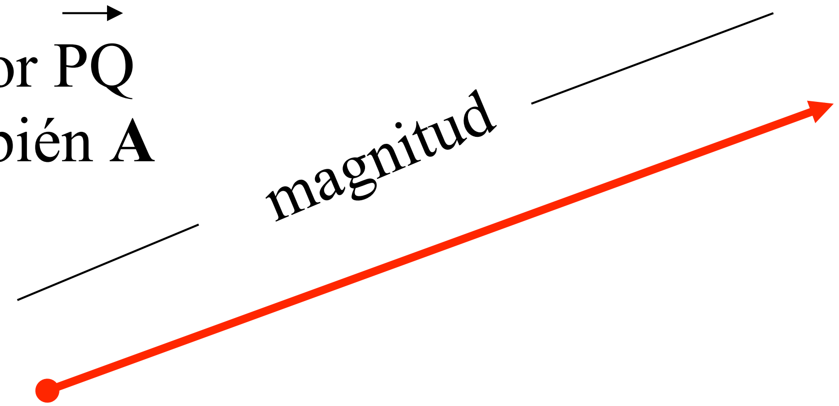
- **Vector**: **magnitud y dirección**

Notación: negritas, letras con flecha encima
Ejemplo: velocidad (**v,** $\vec{v}$) , fuerza (**F**, $\vec{F}$)

# Representación gráfica

Una flecha

Vector $\overrightarrow{PQ}$
También **A**



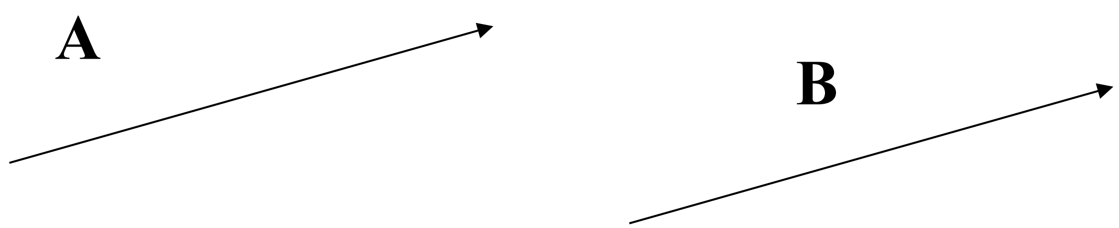

Magnitud: tamaño del vector

Notación: A, |**A**|, $|\vec{A}|$

# Reglas del álgebra de vectores

- Igualdad de vectores

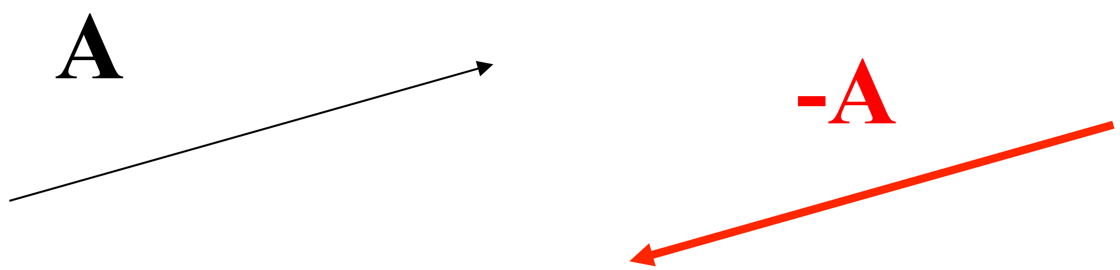
**A** y **B** son iguales (**A** = **B**) si tienen la **misma dirección y magnitud** sin importar sus puntos iniciales



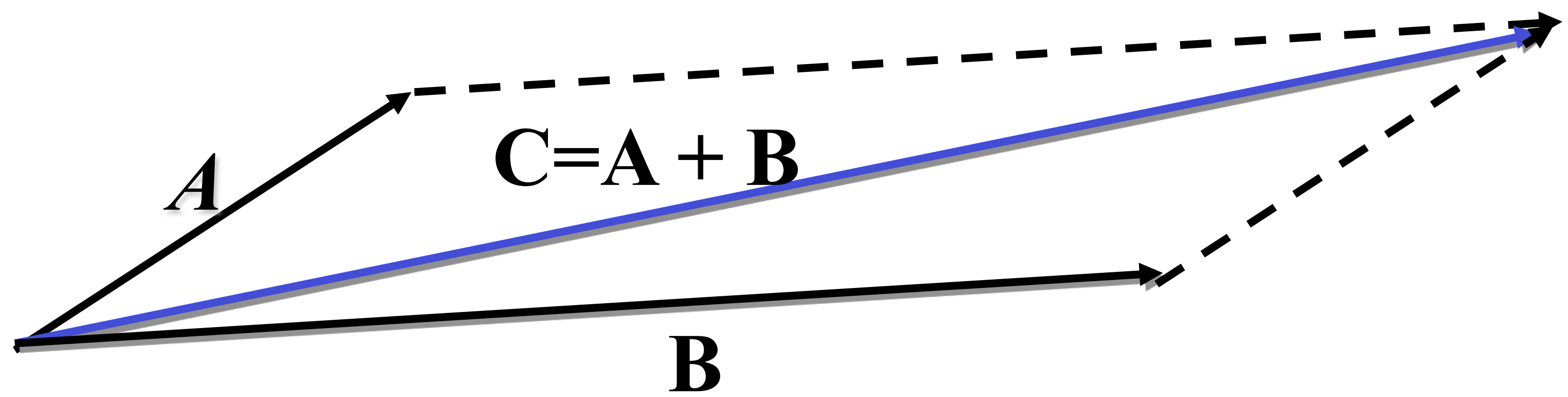
# Reglas del álgebra de vectores 2

- **-A**

**-A** tiene la **misma magnitud** de **A** pero **dirección opuesta**



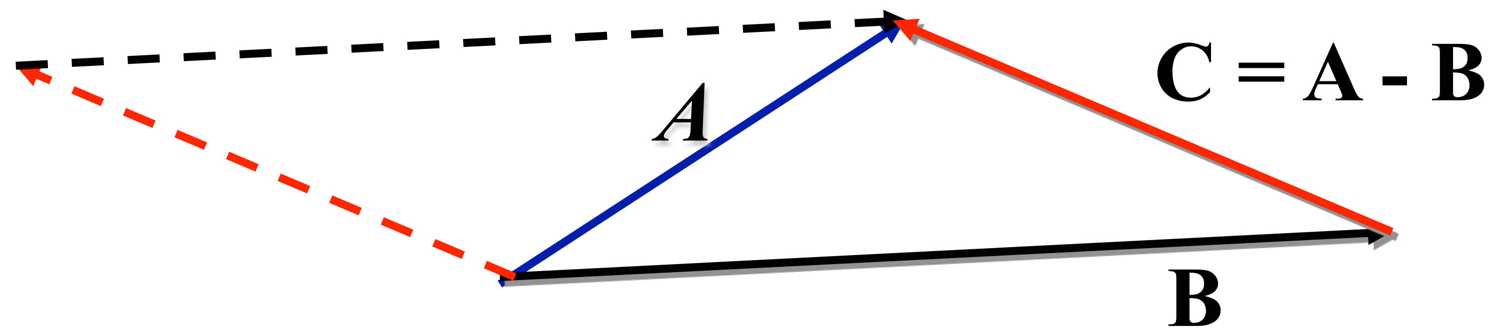
# Suma geométrica de dos vectores




Regla del paralelogramo

# Diferencia de dos vectores

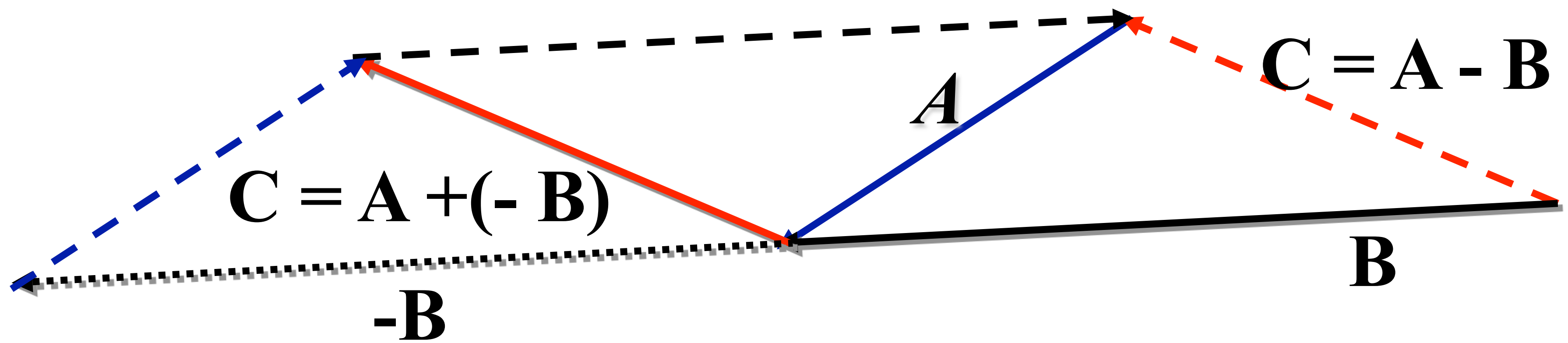
**A - B** es el vector **C** tal que la suma de **C** y **B** da como resultado **A**
**C= A - B** → C+B=A




**A = C + B**

# Diferencia de dos vectores

Equivalentemente, **A - B** = **A** + (-**B**)

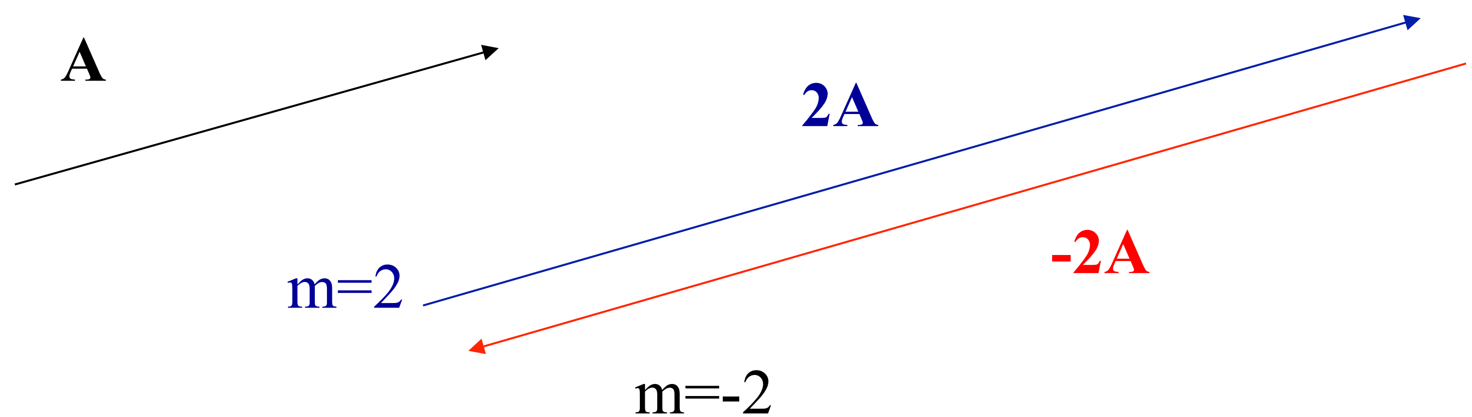


# Vector Nulo

- Si **A**=**B**, **A-B** es el vector nulo
- Magnitud cero
- Dirección indefinida

# Multiplicación por un escalar

Vector **A** y escalar m→ m**A** tiene
**magnitud:** |m| veces la magnitud de **A**
Dirección: misma si m>0
opuesta si m<0
Si m=0, tenemos el vector nulo



# Leyes del álgebra de vectores

Si **A**, **B** y **C** son vectores y *m* y *n* son escalares, entonces:

1. Ley conmutativa de la adición de vectores:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}.$$

2. Ley asociativa de la adición de vectores:

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}.$$

3. Ley asociativa de la multiplicación de vectores:

$$m(n\mathbf{A}) = (mn)\mathbf{A} = n(m\mathbf{A}).$$

4. Ley distributiva de vectores:

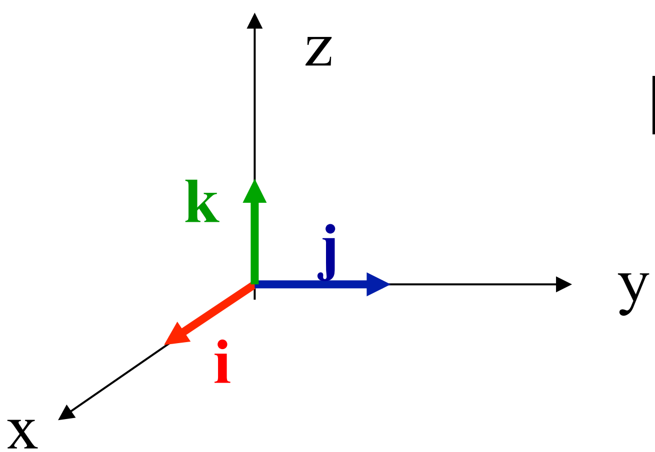
$$(m + n)\mathbf{A} = m\mathbf{A} + n\mathbf{A}$$

y

$$m(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = m\mathbf{A} + m\mathbf{B}.$$

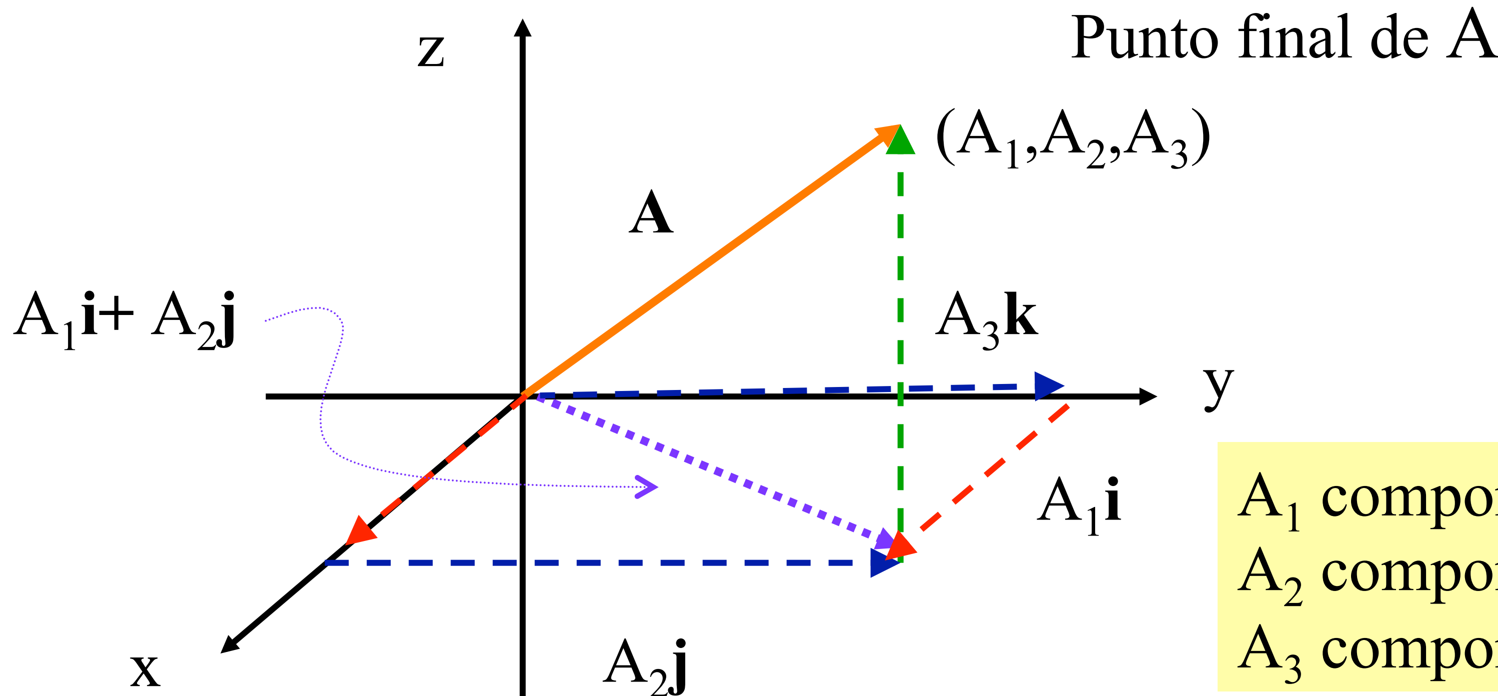
# Vectores Unitarios

- magnitud es la unidad
- Vectores unitarios rectangulares: tienen la dirección positiva de los ejes de un sistema cartesiano de coordenadas




$|\mathbf{i}|=|\mathbf{j}|=|\mathbf{k}|=1$

# Componentes de un vector




$A_1$ componente x
$A_2$ componente y
$A_3$ componente z

$$\mathbf{A} = A_1\mathbf{i}+ A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k}$$

# Álgebra de vectores. Componentes

$\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$

magnitud $$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$$

**Ejemplo:** Vector de posición, va del origen a (x,y,z)

$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

# Leyes del álgebra de vectores

$$\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}\,, \quad \mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k},$$

**Suma**

$$\begin{aligned}\mathbf{A} + \mathbf{B} &= A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k} + B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k} \\ &= A_1\mathbf{i} + B_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + B_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k} + B_3\mathbf{k} \\ &= (A_1 + B_1)\mathbf{i} + (A_2 + B_2)\mathbf{j} + (A_3 + B_3)\mathbf{k}\end{aligned}$$

**Producto por escalar**

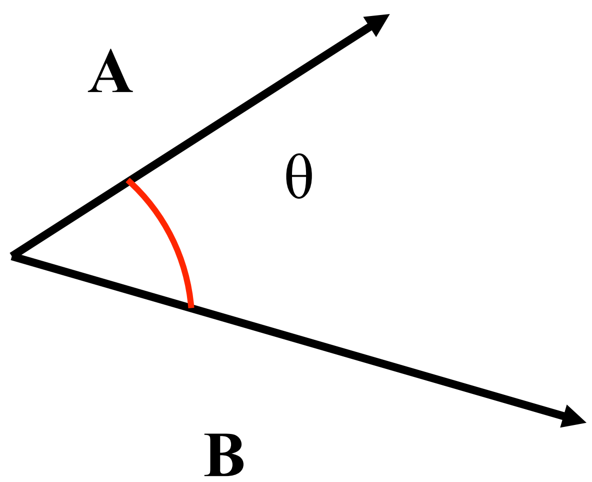
$$\begin{aligned}n\mathbf{A} &= n(A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}) \\ &= nA_1\mathbf{i} + nA_2\mathbf{j} + nA_3\mathbf{k}\end{aligned}$$

# Producto escalar o producto punto

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\theta$$

$0 \leq \theta \leq \pi$

**Cantidad escalar**




Si $\theta = \pi/2 \rightarrow \cos\theta = 0$

Los vectores son perpendiculares entre sí si su producto punto es cero

**Si queremos saber si dos vectores son perpendiculares, calculamos su producto punto**

# Leyes del producto punto

1. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, conmutativa.
2. $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$, distributiva.
3. $m(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (m\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (m\mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})m$,

donde $m$ es un escalar.

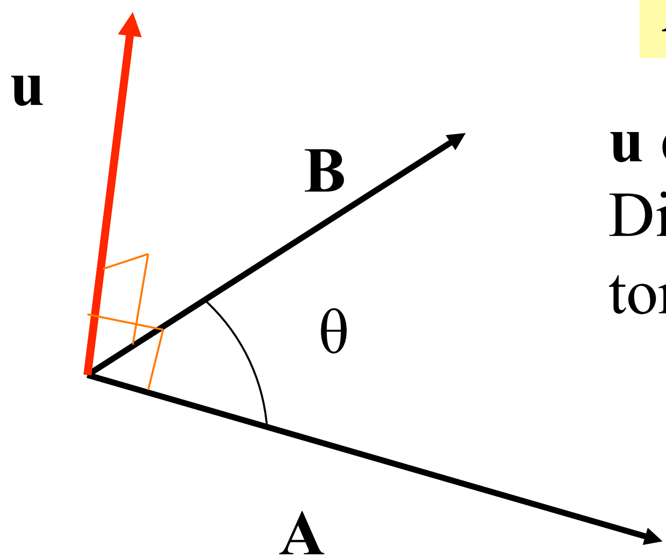
4. $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$, paralelos.
5. $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$ perpendiculares (ortogonales) entre sí.
6. Si $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$, entonces

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$ magnitud al cuadrado

7. Si $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$, $\mathbf{A}$ y/o $\mathbf{B}$ no son el vector nulo, entonces $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son perpendiculares.

# Producto Vectorial o Producto Cruz




$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = AB \text{ sen } \theta \ \mathbf{u}$$

**u es un vector unitario** perpendicular a **A** y **B**
Dirección: Regla de la mano derecha o del tornillo

Si $\theta = 0 \rightarrow$ sen $\theta = 0$
Si **A = B** o si **A** es paralelo a **B**, entonces $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$.

**Si queremos saber si dos vectores son paralelos, calculamos su producto cruz**

# Leyes del producto cruz

1. $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$. No es conmutativo

2. $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$, distributiva.

3. $m(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (m\mathbf{A}) \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times (m\mathbf{B}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B})m$, donde $m$ es un escalar.

4. $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$.

5. $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$
   $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$
   $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$

# Leyes del producto cruz

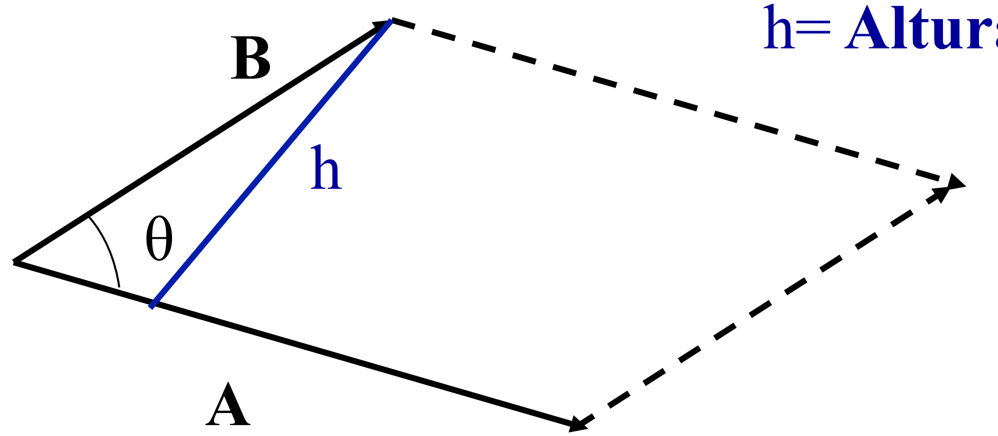
6. Si $\mathbf{A} = A_1\boldsymbol{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$, entonces

$$A \times B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} A_2 & A_3 \\ B_2 & B_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} A_1 & A_3 \\ B_1 & B_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

# Leyes del producto cruz

7. $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$ = **área del paralelogramo** con lados A y B




h= **Altura del paralelogramo**

h=Bsen θ

Area=base×altura

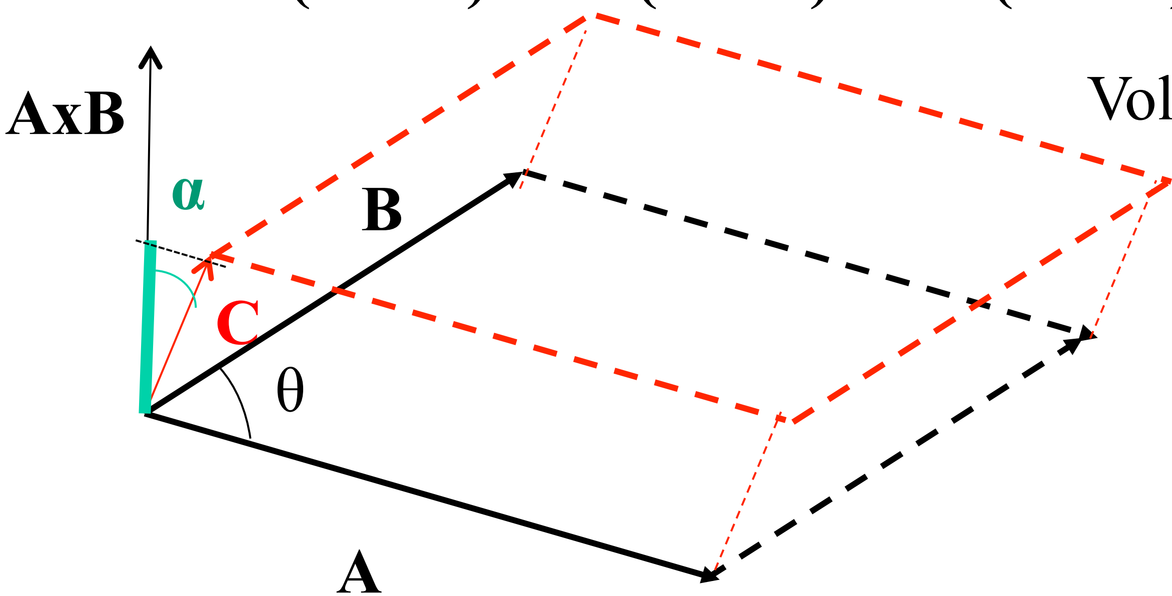
=ABsenθ

8. Si $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0$ y **A** y/o **B** no son el vector nulo, entonces **A** y **B** son paralelos (θ=0).

# Leyes de productos triples

1. En general $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\, \mathbf{C} \neq \mathbf{A}\, (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$.

2. $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A})$ *Permutación cíclica*




Volumen=Área de base×altura

$= (AB\,\mathrm{sen}\theta)\times C \cos\alpha$

$= |\mathbf{AxB}| \times |\mathbf{C}| \cos \alpha$

$= (\mathbf{AxB})\cdot\mathbf{C}$

**Triple producto escalar** = volumen del paralelepípedo con **A, B y C** como ejes.

# Leyes de productos triples

3. Si $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$,
$\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$ y
$\mathbf{C} = C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j} + C_3\mathbf{k}$, entonces

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

**Triple producto escalar**

*Permutación cíclica de renglones no modifica el determinante*

# Leyes de productos triples

4. $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \neq (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$. No es asociativo

5. $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$
   y
   $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{A}$.

6. $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$.

**Observar siempre que ambos miembros sean del mismo tipo (escalares o vectores)**

# CAMPO VECTORIAL

# Campo vectorial

- **Vector**: Una magnitud física que requiere, además de magnitud, la dirección para su caracterización
- **Campo vectorial**: asocia un vector a un punto en el espacio
- Sean f,g, h funciones reales definidas en $R^3$,

la función vectorial depende de x,y,z

$$\mathbf{R}\,(x,y,z) = f(x,y,z)\,\mathbf{i} + g(x,y,z)\,\mathbf{j} + h(x,y,z)\,\mathbf{k}$$

# Ejemplos

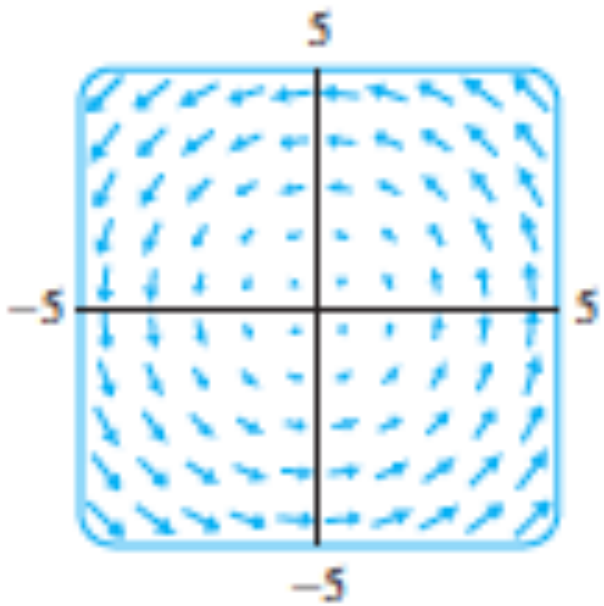



**FIGURE 6**
$\mathbf{F}(x, y) = \langle -y, x \rangle$

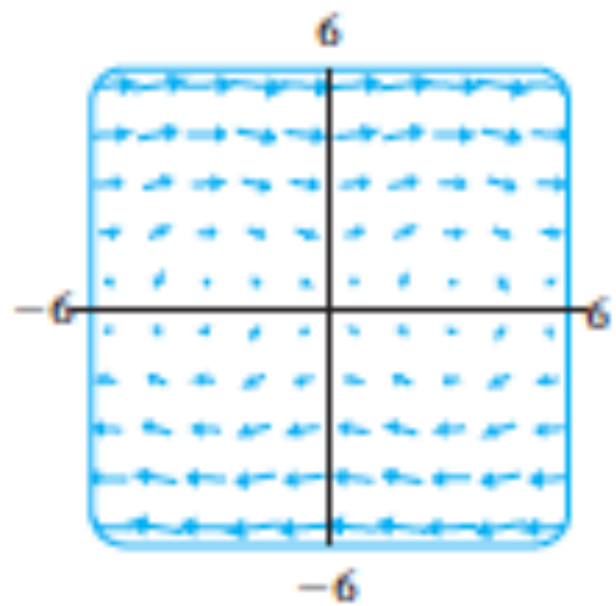
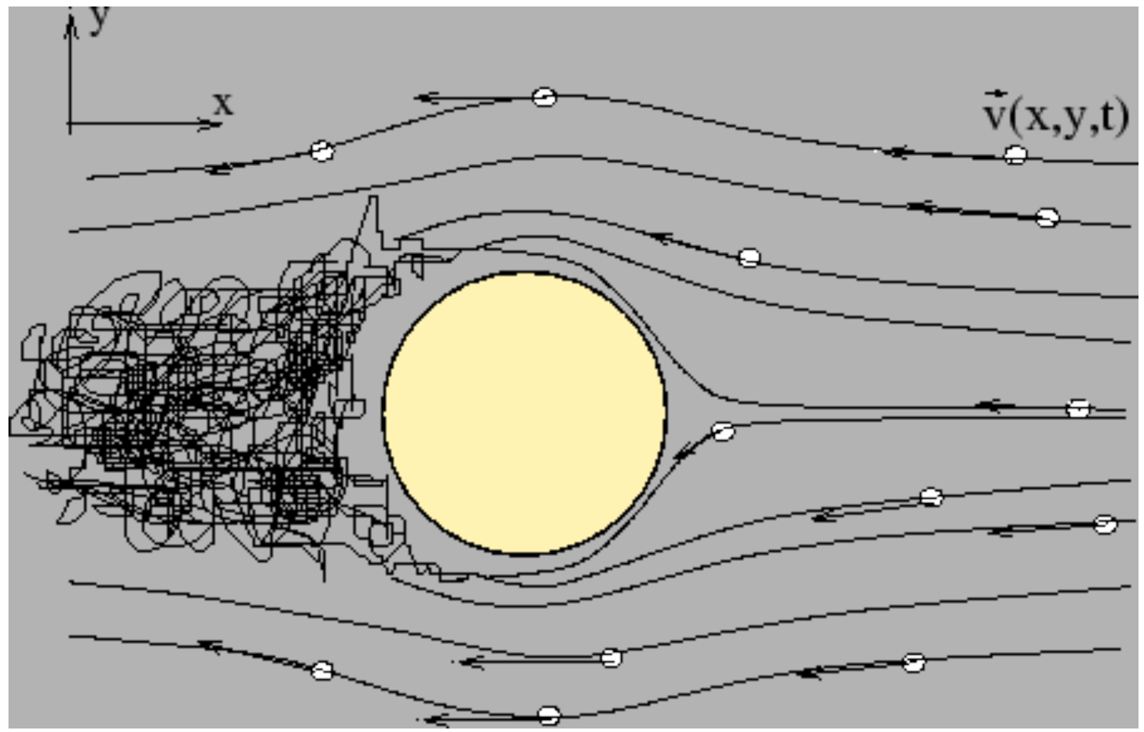



**FIGURE 7**
$\mathbf{F}(x, y) = \langle y, \sin x \rangle$

# Campo vectorial: velocidades en fluidos




**Este campo depende también del tiempo t**

# Flujo en fluido:
## diferente viscosidad → campos de velocidades distintos

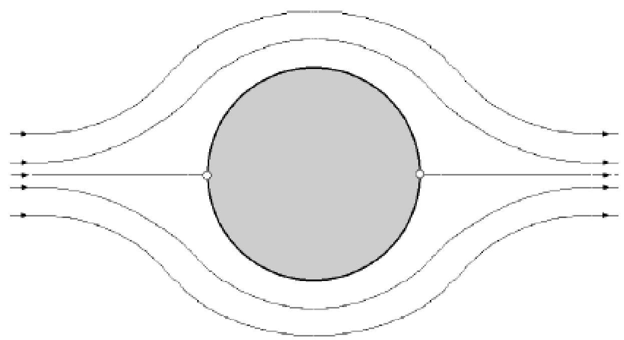


*Fig IV.44*
*a) Flujo bidimensional en torno a un cilindro, Re< 1*

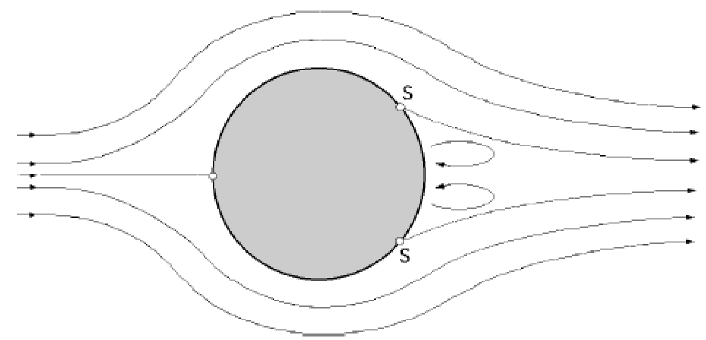



*Fig IV.45*
*b) Flujo bidimensional en torno a un cilindro, Re = 20*

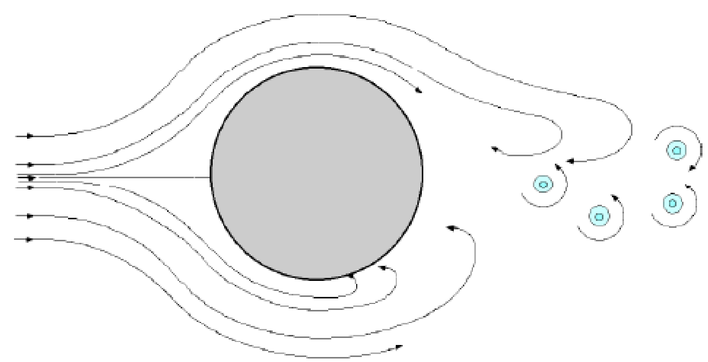
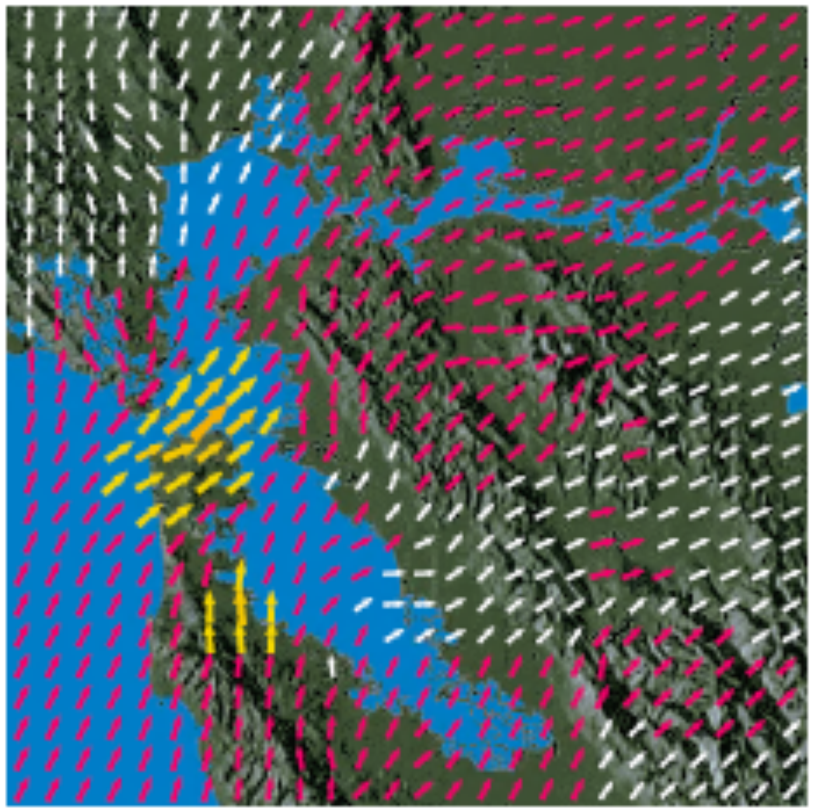
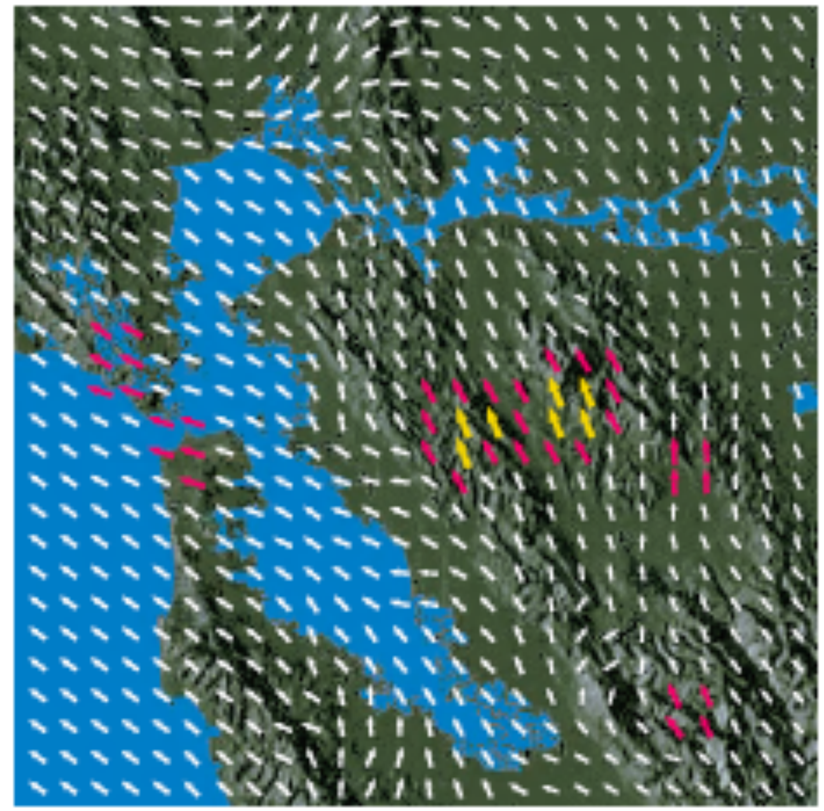


*Fig IV.46.- c) Flujo bidimensional en torno a un cilindro, Re > 20*

# Velocidad del viento



(a) 6:00 PM, March 1, 2010



(b) 6:00 AM, March 1, 2010

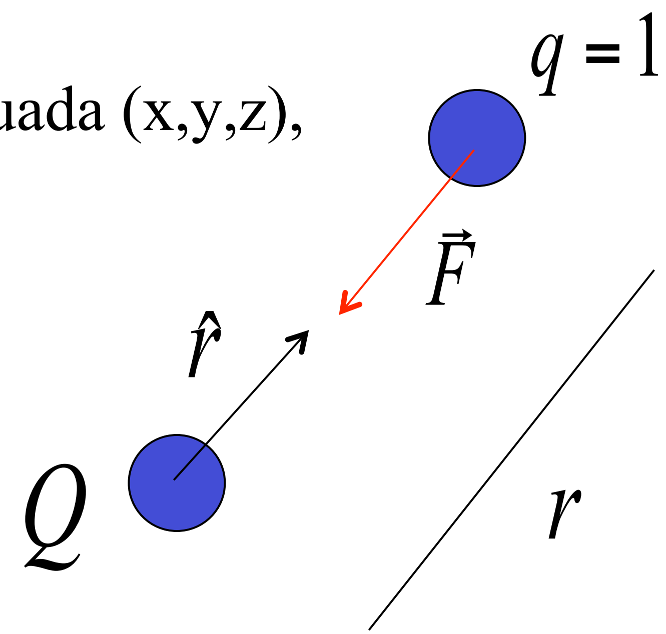
**FIGURE 1** Velocity vector fields showing San Francisco Bay wind patterns

# Campo eléctrico

- Fuerza ejercida  por la atracción o repulsión sobre una carga unitaria positiva
- **Ley de Coulomb**:

Fuerza sobre q=1, carga unitaria situada (x,y,z), debida a carga Q en el origen

$$\vec{F}(x,y,z) = k\frac{Q}{r^2}\hat{r}$$



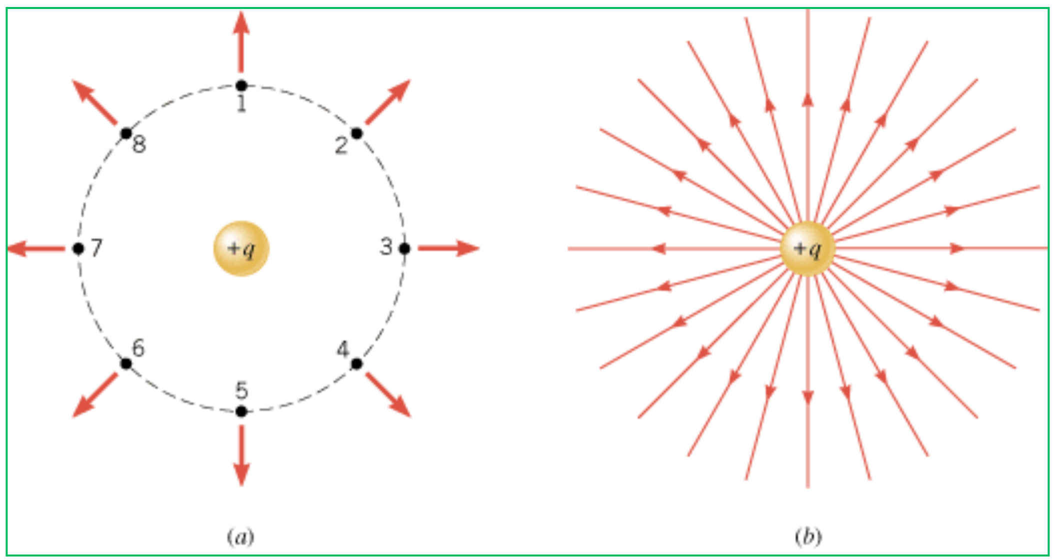

$r$ Distancia entre cargas

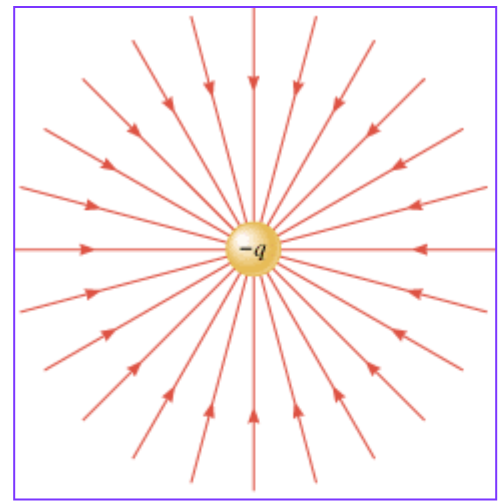
$\hat{r}$ Vector unitario a lo largo de línea que une las cargas

k constante que depende del sistema de unidades

# Ejemplo: cargas puntuales

**La dirección es radial**



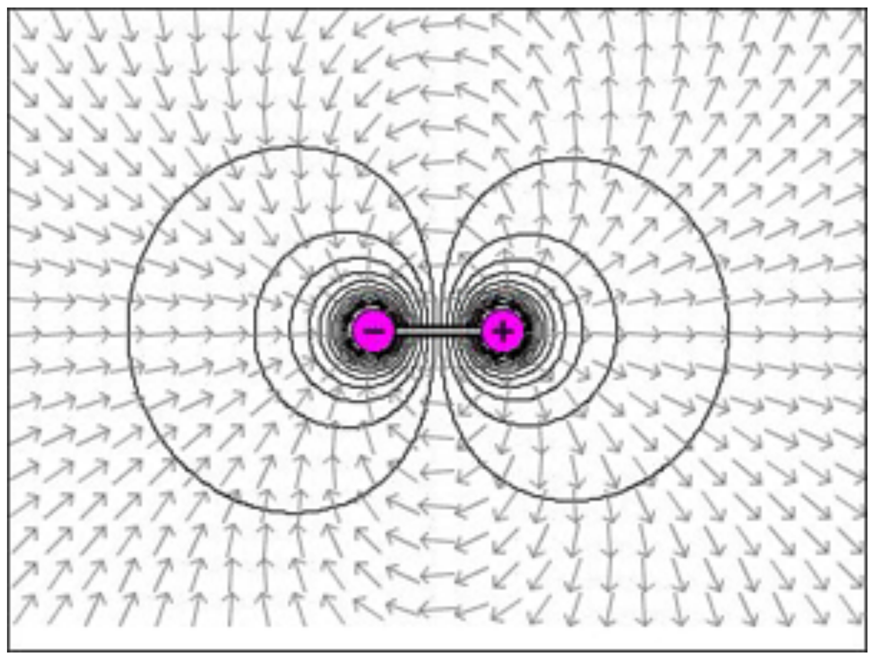

**Carga Positiva:**
**Fuerza es repulsiva**

**Líneas de fuerza**
**Líneas paralelas al campo**

**Carga negativa:**
**Fuerza atractiva**

# Campo de un dipolo eléctrico

**Un dipolo es un par de cargas de igual magnitud pero de signo diferente, separados por una distancia d**



**Flechas indican dirección del campo**

**Curva: potencial toma un valor constante**

# Campos eléctricos

**http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/elecmagnet/electrico/cElectrico.html#Campo%20el%C3%A9ctrico%20y%20potencial%20de%20una%20carga%20puntual**