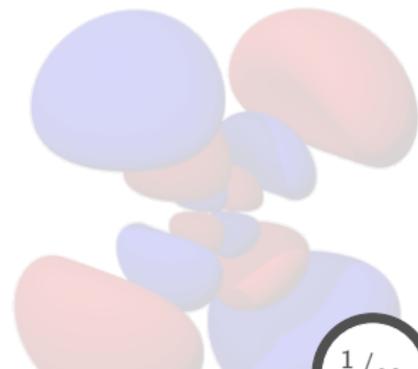


6. Superconductividad



Contenido: Tema 06

6. Superconductividad

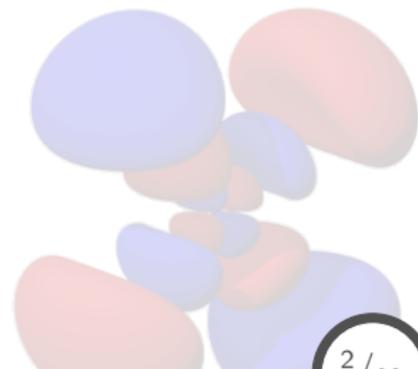
6.1 Propiedades fundamentales y descripción fenomenológica

6.2 Teoría de Ginzburg-Landau

6.3 Teoría Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS)

6.4 Tunelamiento, efecto Josephson

6.5 Clasificación de materiales superconductores



6. Superconductividad

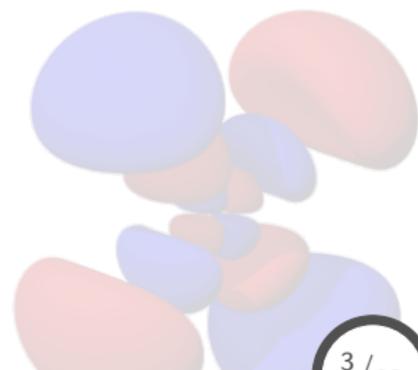
6.1 Propiedades fundamentales y descripción fenomenológica

6.2 Teoría de Ginzburg-Landau

6.3 Teoría Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS)

6.4 Tunelamiento, efecto Josephson

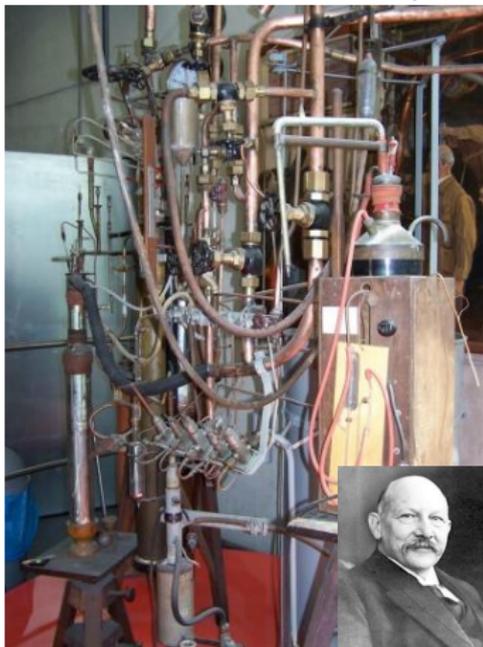
6.5 Clasificación de materiales superconductores



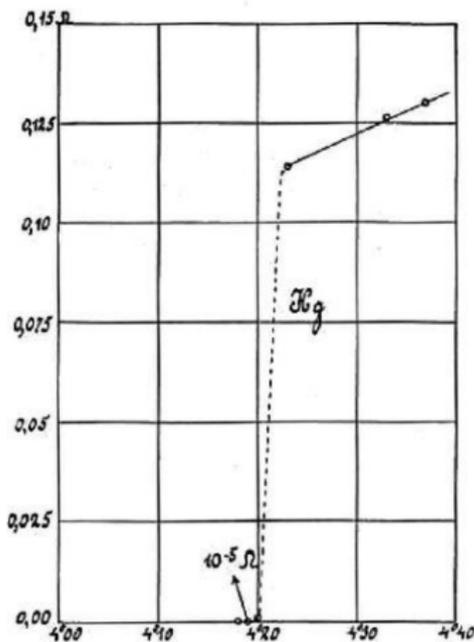
Propiedades fundamentales y descripción fenomenológica

Descubrimiento

Licuefacción del Helio (1908)



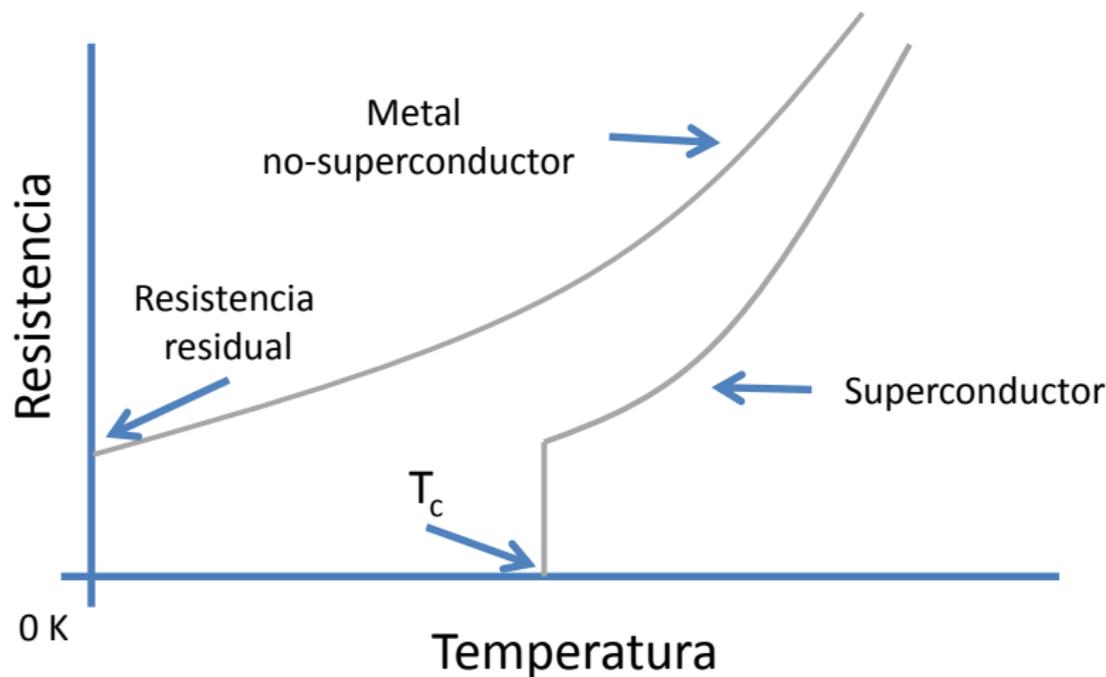
Hg: R vs T (1911)



H. Kamerlingh Onnes: Nobel en Física (1913) por *los estudios de la materia a bajas temperaturas, producción de He líquido (3K).*

Propiedades fundamentales y descripción fenomenológica

Resistencia cero y temperatura crítica (T_c)

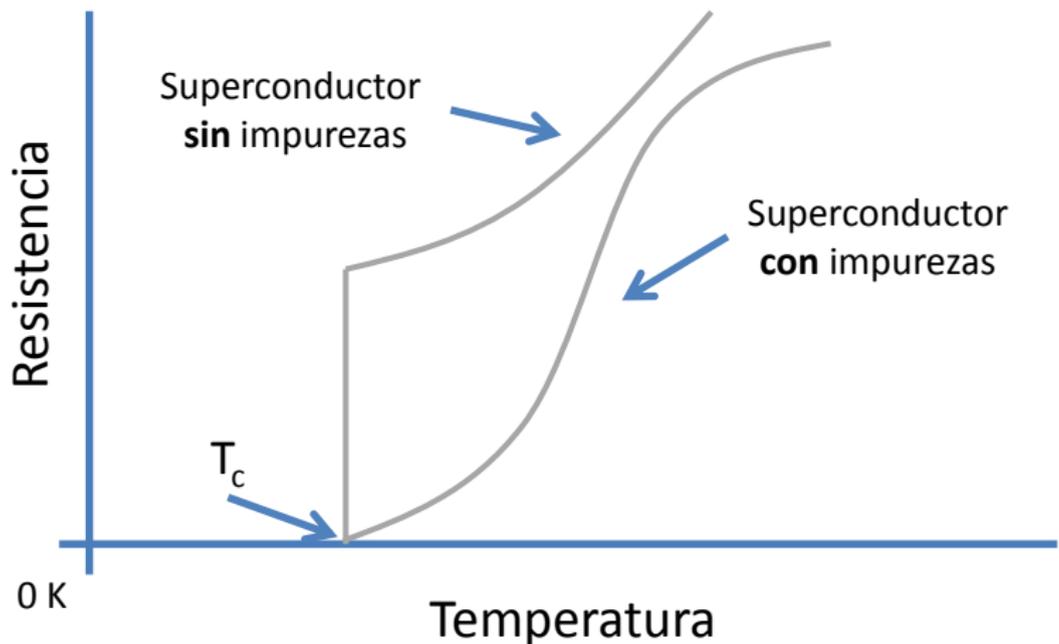


Conductor típico: $\rho = \rho_0 + AT^5$,

Corrientes persistentes: $\rho = AT$ ($\forall T > 300$ K).

Propiedades fundamentales y descripción fenomenológica

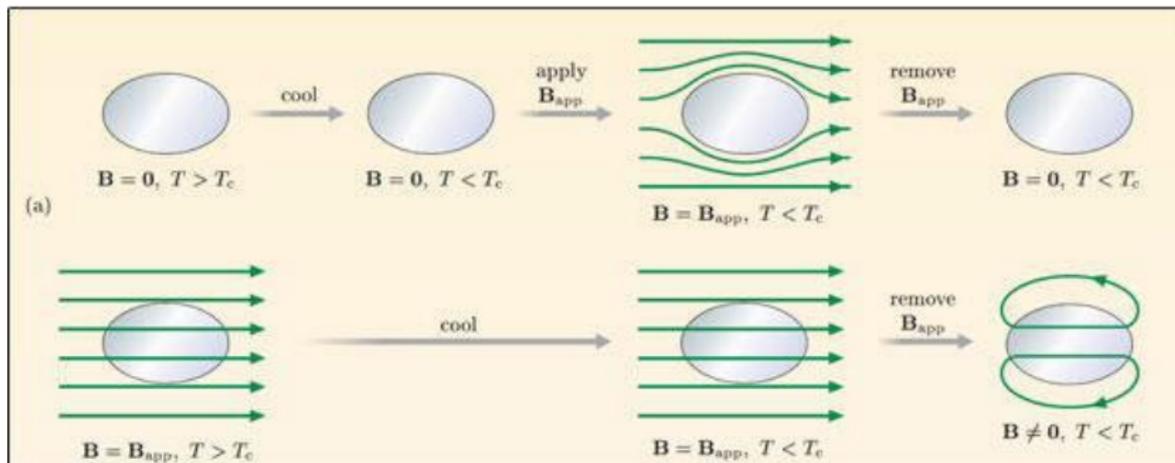
Resistencia cero y temperatura crítica (T_c)



Para determinar T_c en el caso de SC con impurezas, basta con encontrar el punto de **inflexión** en la curva R vs T .

Propiedades fundamentales y descripción fenomenológica

Conductor perfecto



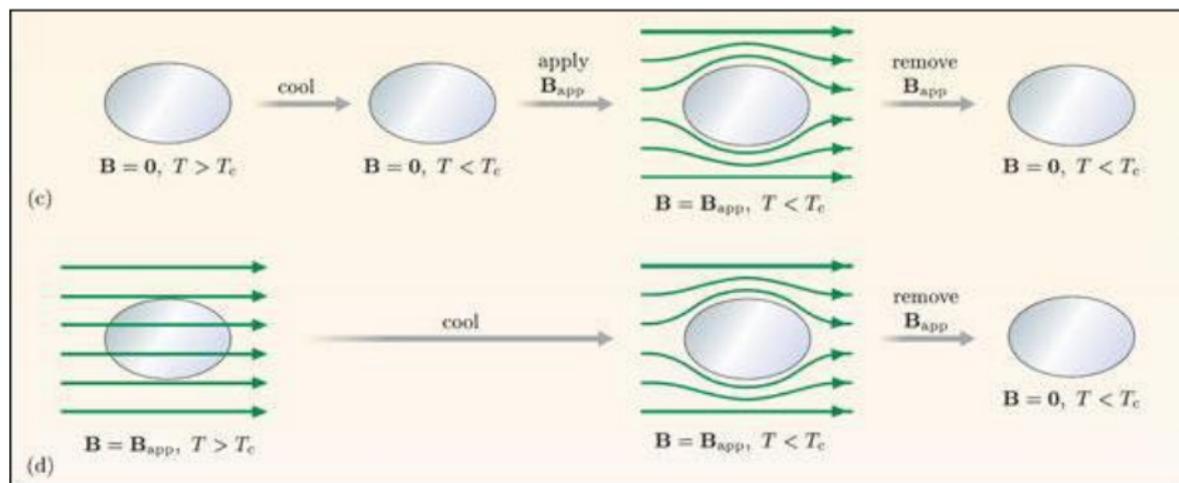
La **susceptibilidad magnética** se relaciona con los campos magnéticos mediante:

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H} \quad \& \quad \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} (1 + \chi),$$

para el caso de un **conductor perfecto** a $T < T_c$, se tiene que $\chi = 0$, por tanto en ese caso $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, es decir, excluye al campo magnético, pero no lo **expulsa**.

Propiedades fundamentales y descripción fenomenológica

Diamagnetismo perfecto: efecto Meissner

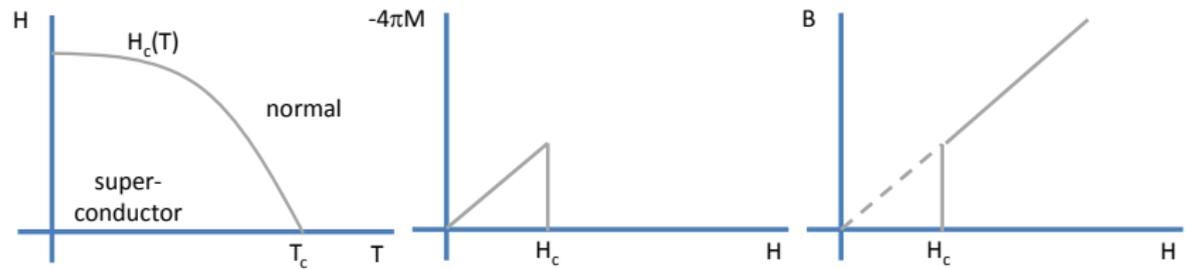


Para el caso de un **diamagneto perfecto**, a $T < T_c$, tendremos que $\chi = -1$, con lo cual obtenemos $\mathbf{B} = 0$, es decir se tendrá tanto **exclusión** como **expulsión** del campo: **efecto Meissner**.

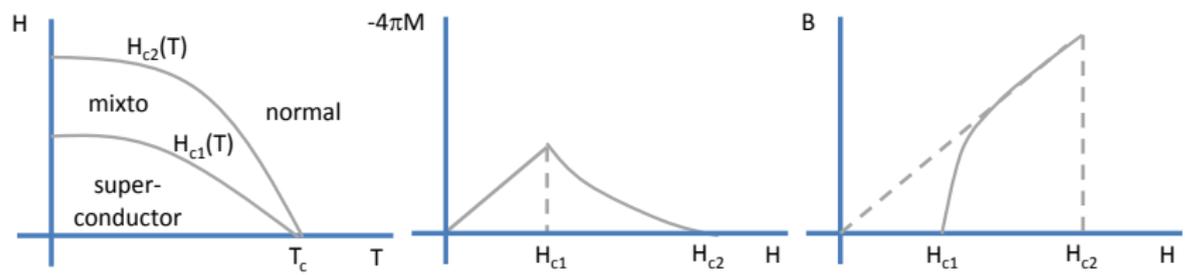
Propiedades fundamentales y descripción fenomenológica

Campo crítico: superconductores tipo I y tipo II

Superconductor tipo I

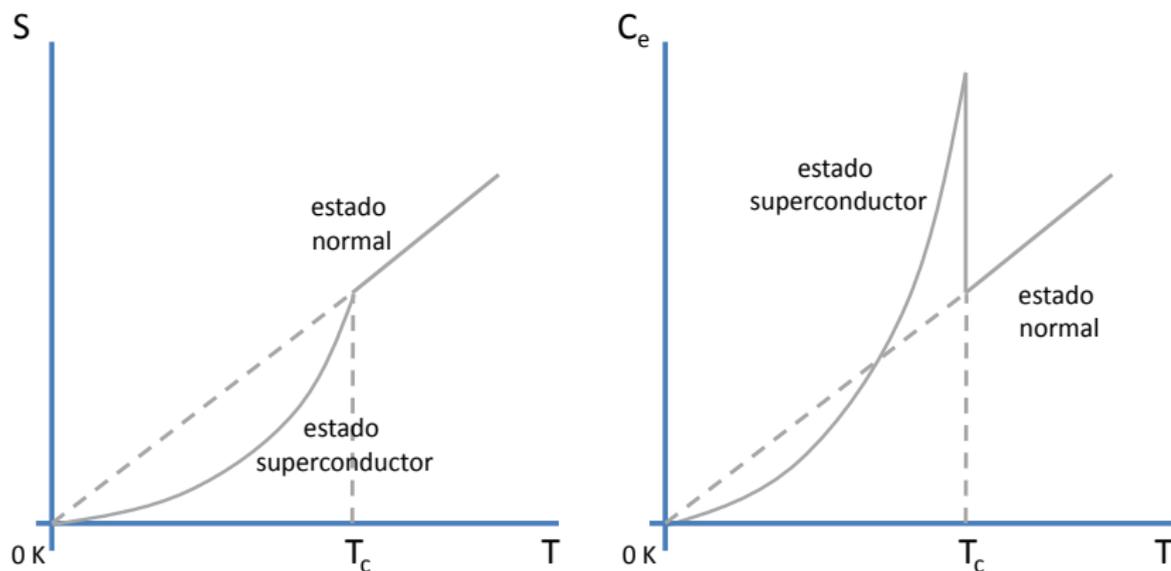


Superconductor tipo II



Propiedades fundamentales y descripción fenomenológica

Propiedades termodinámicas: entropía y calor específico



Para comprender el comportamiento de la **entropía** y el **calor específico** entre el estado normal y superconductor, analicemos la energía libre de Gibbs,

$$G = U - TS + PV - \mu_0 HM.$$

Propiedades fundamentales y descripción fenomenológica

Propiedades termodinámicas: entropía y calor específico

De la ecuación anterior obtenemos el diferencial total¹

$$\begin{aligned}G &= U - TS + PV - \mu_0 HM, \\ \Rightarrow dG &= dU - TdS - SdT + PdV - \mu_0 HdM - \mu_0 MdH, \\ \text{pero: } dU &= TdS - PdV + \mu_0 HdM, \\ \therefore dG &= -SdT - \mu_0 MdH, \\ \forall \mu_0 M &= - \left(\frac{\partial G}{\partial H} \right)_{P,T}, \quad S = - \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_{P,H}.\end{aligned}$$

Con la expresión anterior es posible calcular la diferencia de energía libre entre los estados **normal** y **superconductor**:

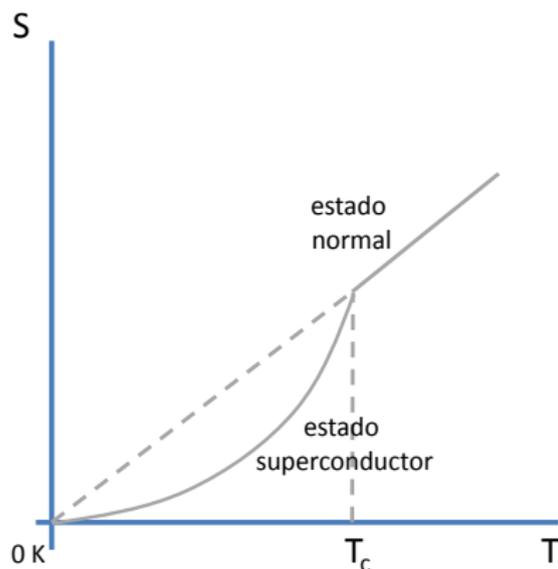
$$G_n(T, H_c) - G_s(T, H_a) = \frac{1}{2} \mu_0 (H_c^2 - H_a^2).$$

¹a presión constante: $dP = 0$.

Propiedades fundamentales y descripción fenomenológica

Propiedades termodinámicas: entropía

Para hallar la diferencia de **entropía** en $T < T_c$, basta aplicar $S = -(\partial G / \partial T_{P,H})$ a la expresión anterior, donde $H_a \neq H_a(T)$,



$$S_n - S_s = -\mu_0 H_c \frac{dH_c}{dT},$$

pero de H_c vs T se tiene que:

$$\frac{dH_c}{dT} < 0 \quad \forall \quad T < T_c,$$

por lo que,

$$S_n - S_s > 0, \\ \Rightarrow S_n > S_s.$$

Propiedades fundamentales y descripción fenomenológica

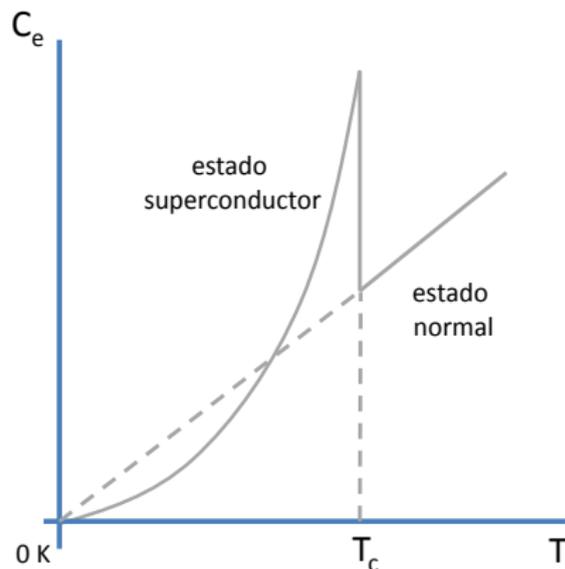
Propiedades termodinámicas: calor específico

Para calcular la diferencia de **calor específico** en $T < T_c$, recordemos que $C = T(\partial S/\partial T)$ y usando el resultado anterior,

$$C_s - C_n = \mu_0 T \left[H_c \frac{d^2 H_c}{dT^2} + \left(\frac{dH_c}{dT} \right)^2 \right],$$

pero se tiene que:

$$\frac{d^2 H_c}{dT^2} < 0 \quad \& \quad \left(\frac{dH_c}{dT} \right)^2 > 0,$$



lo cual indica que habrá un sutil balance entre el campo aplicado y su derivada, existiendo una T tal que $C_s - C_n$ cambie de signo.

Propiedades fundamentales y descripción fenomenológica

Descripción fenomenológica: teoría de London

El primer intento por describir de manera teórica la electrodinámica de un superconductor (efecto Meissner) fue realizado por los hermanos **London**.

Modelo de dos fluidos

En el estado superconductor se tendrá lo siguiente:

n : densidad total de electrones de conducción,

$n_s(T)$: densidad de electrones superconductores,

en donde, por supuesto, $n - n_s(T) > 0$.

Teoría de London

$$\begin{array}{ll} n_s(T) \rightarrow R = 0, & \hat{\mathbf{E}}_{ap} \quad n_s(T) \rightarrow \text{afectados,} \\ n - n_s(T) \rightarrow R > 0, & \implies n - n_s(T) \rightarrow \text{estacionarios.} \end{array}$$

En donde se considera que: $n_s \neq n_s(\mathbf{r})$, es decir, es una teoría **local**, lo que se conoce como el **límite de London**.

Propiedades fundamentales y descripción fenomenológica

Descripción fenomenológica: ecuaciones de London

La ecuación de movimiento para los electrones en el estado **superconductor** es,

$$m \frac{d\mathbf{v}_s}{dt} = e\mathbf{E},$$

en donde la densidad de corriente superconductor se expresa como,

$$\mathbf{J}_s = n_s e \mathbf{v}_s,$$

relacionando las ecs. anteriores,

$$\mathbf{E} = \Lambda \frac{\partial \mathbf{J}_s}{\partial t}, \quad \forall \quad \Lambda = \frac{m}{n_s e^2},$$

lo cual se conoce como **primera ecuación de London**.

Relacionando la 1^a ec. de London con la ec. de Faraday,

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \left(\Lambda \frac{\partial \mathbf{J}_s}{\partial t} \right) &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \times (\Lambda \mathbf{J}_s)] &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \Rightarrow \nabla \times (\Lambda \mathbf{J}_s) &= -\mathbf{B}, \end{aligned}$$

lo cual representa una expresión alternativa para la 1^a ecuación de London.

Propiedades fundamentales y descripción fenomenológica

Descripción fenomenológica: ecuaciones de London

Si tomamos la ley de Ampère para campos **pseudo-estacionarios**,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad \forall \quad \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0,$$

$$\Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \nabla \times \mathbf{J}_s,$$

$$\text{pero } \Lambda \nabla \times \mathbf{J}_s = -\mathbf{B}, \quad (1^{\text{a}} \text{ ec. de London})$$

$$\Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = -\frac{\mu_0}{\Lambda} \mathbf{B}.$$

Ahora, haciendo uso de la siguiente propiedad para un campo vectorial,

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B},$$

$$\text{donde: } \nabla \cdot \mathbf{B} = -\Lambda \nabla \cdot [\nabla \times \mathbf{J}_s] = 0 \quad \therefore \quad \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = -\nabla^2 \mathbf{B}.$$

Relacionando ambos res. se obtiene la **2^a ecuación de London**,

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{\lambda_L^2} \mathbf{B} \quad \forall \quad \lambda_L^2 = \frac{\Lambda}{\mu_0} = \frac{m}{n_s e^2 \mu_0} \quad \leftarrow \quad \text{long. de penetración,}$$

$$\text{siendo soluciones: } \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{-\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r} / \lambda_L} \quad \forall \quad |\hat{\mathbf{n}}| = 1 \quad \& \quad \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B}_0 = 0.$$

Propiedades fundamentales y descripción fenomenológica

Descripción fenomenológica: norma de London

London propuso el uso de un potencial vectorial \mathbf{A} para la deducción de sus ecuaciones,

$$\mathbf{J}_s = -\frac{1}{\Lambda} \mathbf{A} \quad \forall \quad \Lambda = \frac{m}{n_s e^2}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A},$$

con una **norma** tal que,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= 0 \quad \& \quad \mathbf{A}_n = \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = 0, \\ \therefore \nabla \cdot \mathbf{J}_s &= 0 \quad \& \quad \mathbf{J}_{s,n} = 0, \end{aligned}$$

- $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ se asegura la continuidad de la corriente y la ausencia de una fuente de **supercorriente**.
- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = 0$ ninguna supercorriente puede pasar a través de la frontera del superconductor.

6. Superconductividad

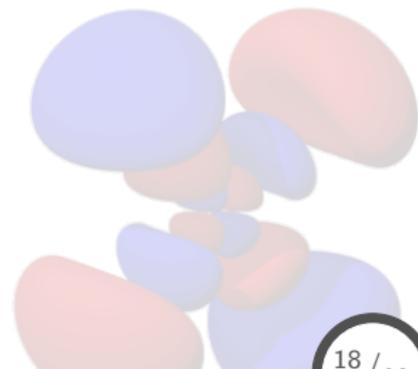
6.1 Propiedades fundamentales y descripción fenomenológica

6.2 Teoría de Ginzburg-Landau

6.3 Teoría Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS)

6.4 Tunelamiento, efecto Josephson

6.5 Clasificación de materiales superconductores



Teoría de Ginzburg-Landau

Fundamentos de la teoría

En 1950 Ginzburg y Landau proponen una teoría fenomenológica que describe las propiedades del estado superconductor **cerca** de la temperatura crítica T_c , solucionando las limitaciones de la teoría de London:

- Los efectos **no—lineales** en campos lo suficientemente fuertes pueden modificar n_s .
- Variación **espacial** de n_s , eliminando la localidad de la teoría.

En 1959 Gor'kov demostró que las ecuaciones de la teoría de **Ginzburg-Landau** representan el límite de las ecuaciones de la teoría **BCS**, cuando se cumplen las sig. condiciones,

- $T_c - T \ll T_c$,
- $\lambda_L \gg \zeta_0$,

en donde ζ_0 es la longitud de **coherencia** y λ_L es la longitud de **penetración**.



Teoría de Ginzburg-Landau

Teoría de Landau: transiciones de fase de segundo orden

Consideremos un sistema magnético que consiste de un arreglo de dipolos, en un tipo de interacción **ferromagnética**,

- $T = 0$: todos los dipolos están alineados (estado base).
- $T > 0$: los dipolos se empiezan a desalinean, debido a la agitación térmica.

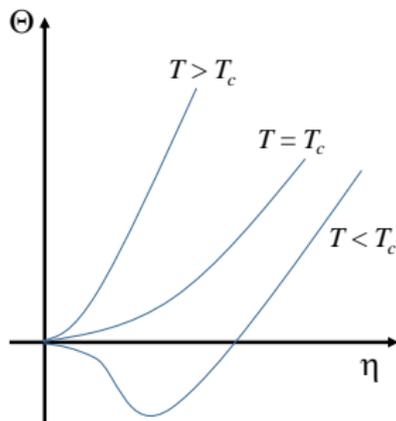
Definiendo un **parámetro de orden**

η :

$$\eta = \frac{n_+ - n_-}{n_+ + n_-},$$

siendo n_{\pm} el número de espines \uparrow, \downarrow , respectivamente.

donde η se obtiene del **mínimo** de $\Theta(\eta)$.



$$T = 0 \Rightarrow \eta = 1,$$

$$0 < T < T_c \Rightarrow |\eta| < 1,$$

$$T > T_c \Rightarrow \eta = 0,$$

Teoría de Ginzburg-Landau

Teoría de Landau: transiciones de fase de segundo orden

Las transiciones de fase de **segundo orden** son aquellas en las que el estado de la sustancia varía **continuamente**, pero la simetría cambia **completamente**.

- La transición de fase se puede considerar como el paso de un sistema **ordenado** a uno **desordenado**.
- El **parámetro de orden** varía continuamente.
- En el **punto de transición** el parámetro de orden presenta una **singularidad**.
- Las cantidades termodinámicas también presentan **singularidades** en el **punto de transición**, sin embargo, el potencial termodinámico no se puede expandir en una serie de potencias.
- Considerando que dicha singularidad ocurre en una **vecindad an-gosta** \Rightarrow si es posible expandir el potencial termodinámico en términos del **parámetro de orden** \Leftarrow base de la **teoría de Landau**.

Teoría de Ginzburg-Landau

Teoría de Landau: transiciones de fase de segundo orden

Consideremos que el potencial termodinámico $\Theta(p, T, \eta)$ puede ser expandido en la vecindad del punto de transición, en términos del parámetro de orden η ,

$$\Theta(p, T, \eta) = \Theta_0 + \alpha\eta + A\eta^2 + C\eta^3 + B\eta^4 + \dots - Vh\eta,$$

$- Vh\eta \rightarrow$ energía asociada al campo externo h ,
 $A, B, C, \dots \rightarrow$ funciones de p y T .

Analizando la expresión anterior, observamos:

- $\Theta(p, T, \eta)$ es una función **par** en términos de η .
- Los estados con $\eta = 0$ y $\eta \neq 0$ tienen diferente **simetría**.
- \therefore los términos de potencias **impares** deben ser cero: $\alpha = C = 0$.

$$\Rightarrow \Theta(p, T, \eta) = \Theta_0 + A\eta^2 + B\eta^4 - Vh\eta,$$

cortando la expansión hasta cuarto orden.

Teoría de Ginzburg-Landau

Teoría de Landau: transiciones de fase de segundo orden

De la expresión anterior, analicemos el comportamiento en los valores críticos, sin aplicación de campo externo ($h = 0$):

$$\Theta(p, T, \eta) = \Theta_0 + A\eta^2 + B\eta^4,$$
$$\Rightarrow \frac{d\Theta}{d\eta} = 2A\eta + 4B\eta^3 \quad \& \quad \frac{d^2\Theta}{d\eta^2} = 2A + 12B\eta^2.$$

Obteniendo los valores **extremales** del potencial Θ ,

$$\frac{d\Theta}{d\eta} = 0 \Rightarrow 2A\eta + 4B\eta^3 = 0,$$
$$\therefore \eta = 0 \leftarrow \text{fase } \mathbf{simétrica} \ (T > T_c),$$
$$\eta = \pm \left(-\frac{A}{2B} \right)^{1/2} \leftarrow \text{fase } \mathbf{no-simétrica} \ (T < T_c).$$

Teoría de Ginzburg-Landau

Teoría de Landau: transiciones de fase de segundo orden

Analizando las condiciones para que los valores extremales encontrados representen los **mínimos** del potencial: $d^2\Theta/d\eta^2 > 0$

$$\eta_1 = 0 \Rightarrow \frac{d^2\Theta}{d\eta_1^2} = 2A + 12B\eta_1^2 > 0 \rightarrow A > 0.$$

$$\eta_2 = \pm \left(-\frac{A}{2B}\right)^{1/2} \Rightarrow \frac{d^2\Theta}{d\eta_2^2} = 2A + 12B\eta_2^2 > 0 \rightarrow A < 0.$$

De los resultados anteriores observamos:

- Existe un **punto de transición**: $A_c(p, T) = 0$.
- Cuando $B < 0$ el sistema será **inestable** $\therefore B > 0 \forall T$.

Por tanto, la expresión para el potencial termodinámico será:

$$\begin{aligned}\Theta(p, T, \eta) &= \Theta_0(p, T) + A\eta^2 + B\eta^4 - Vh\eta, \\ \Rightarrow \Theta(p, T, \eta) &= \Theta_0(p, T) + a(p)(T - T_c)\eta^2 + B\eta^4 - Vh\eta, \\ \text{donde: } A &> 0 @ T > T_c, \quad A < 0 @ T < T_c, \\ A &= 0 @ T = T_c, \quad B > 0 \forall T.\end{aligned}$$

Teoría de Ginzburg-Landau

Ecuaciones de Ginzburg-Landau: sin campo aplicado

El punto de partida es hallar el **parámetro de orden** que describa la transición superconductor, eligiéndose la **función de onda** $\psi(\mathbf{r})$ que describe a los portadores de carga en la fase superconductor, n_s :

$$\psi(\mathbf{r}) = |\varphi(\mathbf{r})|e^{i\phi(\mathbf{r})}, \quad \text{en donde: } |\psi(\mathbf{r})|^2 = |\varphi(\mathbf{r})|^2 = n_s,$$

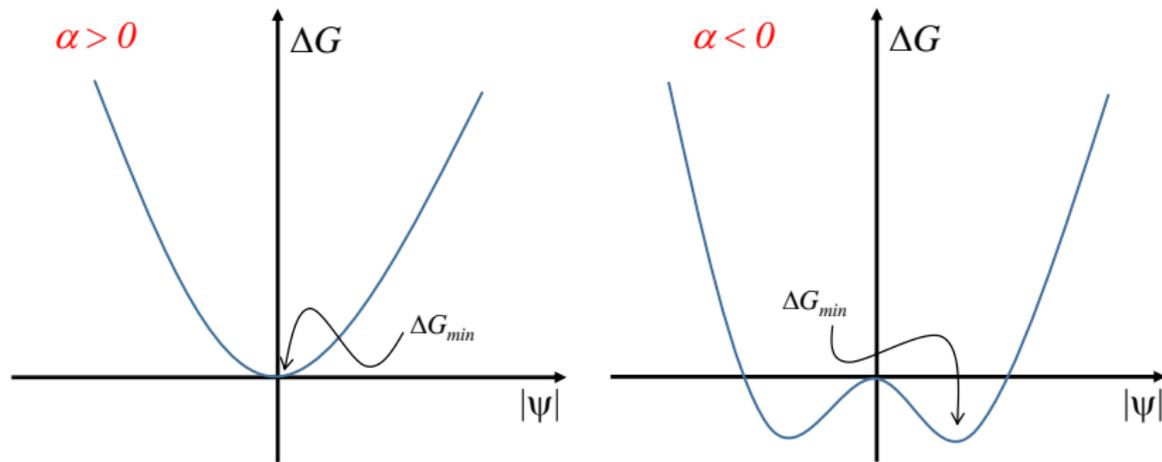
Como ψ es **pequeña** cerca de T_c , ya que n_s lo es en comparación con el num. total de portadores (N), entonces es posible expandir el potencial termodinámico en términos de ψ .

Seleccionando a la energía libre de Gibbs, y en **ausencia** de campo aplicado ($H_a = 0$) tenemos que ψ será **independiente** de las coordenadas, por tanto:

$$\Delta G = G_s - G_n = \alpha|\psi|^2 + \frac{1}{2}\beta|\psi|^4$$
$$\forall \quad \alpha = a\frac{T - T_c}{T_c}, \quad \beta = \text{cte} > 0.$$

Teoría de Ginzburg-Landau

Ecuaciones de Ginzburg-Landau: sin campo aplicado



- $\alpha > 0$: el mínimo se ubica en $|\psi| = 0 \forall T > T_c \Rightarrow$ **estado normal**.
- $\alpha < 0$: el mínimo se localiza en $|\psi| = (-\alpha/\beta)^{1/2} \forall T < T_c \Rightarrow$ **estado superconductor**.

$$\therefore \Delta G_{min,s} = -\frac{\alpha^2}{2\beta}, \quad \text{pero: } \Delta G = -\frac{1}{2}\mu_0 (H_c^2 - H_a^2),$$

$$\Rightarrow \Delta G_{min,s} = -\frac{\alpha^2}{2\beta} = -\mu_0 \frac{H_c^2}{2}, \quad \text{siendo } H_a = 0.$$

Teoría de Ginzburg-Landau

Ecuaciones de Ginzburg-Landau: bajo campo aplicado

En el caso de que el superconductor se encuentre bajo un **campo aplicado**, entonces éste penetrará una cierta distancia en él²,

$$\text{por tanto: } \psi \rightarrow \psi(\mathbf{r}, \mathbf{H}),$$

por tanto el cambio de **energía libre**, $\Delta G = G_s - G_n$, constará de los siguientes términos:

- El término correspondiente **sin campo** magnético aplicado,

$$\alpha|\psi|^2 + \frac{1}{2}\beta|\psi|^4.$$

- La **densidad de energía** debido al campo magnético: $1/2\mu_0 H^2$.
- El término de la **energía cinética** de los portadores de carga: pares de Cooper, con carga $2e$ y masa $2m$,

$$\frac{1}{4m} |(-i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A})|^2.$$

²tal como se vió en la teoría de London.

Teoría de Ginzburg-Landau

Ecuaciones de Ginzburg-Landau: bajo campo aplicado

Por tanto poniendo juntos todas las contribuciones, e integrando sobre el volumen tenemos:

$$\int \Delta G dV = \int (G_s - G_n) dV = \int \left[\alpha |\psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\psi|^4 \right] dV + \dots$$
$$\dots + \int \left[\frac{1}{4m} |(-i\hbar \nabla - 2e\mathbf{A}) \psi|^2 + \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \right] dV,$$

en donde el comportamiento de ψ y \mathbf{A} se obtienen de la condición de que ΔG sea **mínima**, respecto a variaciones del **campo \mathbf{A}** , así como de la **función de onda ψ** .

Realizando la variación con respecto a \mathbf{A} (δ_A):

$$\delta_A \int \Delta G dV = \delta_A \int \frac{1}{4m} [(-i\hbar \nabla - 2e\mathbf{A}) \psi] \cdot [(i\hbar \nabla - 2e\mathbf{A}) \psi^*] dV + \dots$$
$$\dots + \delta_A \int \frac{1}{2\mu_0} (\nabla \times \mathbf{A})^2 dV, \quad \forall \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A}.$$

Teoría de Ginzburg-Landau

Ecuaciones de Ginzburg-Landau: bajo campo aplicado

Del resultado anterior, aplicamos la variación al **primer término**:

$$\begin{aligned} \delta_A \int \frac{1}{4m} [(-i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A})\psi] \cdot [(i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A})\psi^*] dV \\ = \int \frac{1}{4m} \{ [(-i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A})\psi] \cdot (-2e\psi^*\delta\mathbf{A}) + \dots \\ \dots + (-2e\psi\delta\mathbf{A}) \cdot [(i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A})\psi^*] \} dV \\ = \int \left\{ -\frac{ie\hbar}{2m} (\psi\nabla\psi^* - \psi^*\nabla\psi) \cdot \delta\mathbf{A} + \frac{2e^2}{m} |\psi|^2 \mathbf{A} \cdot \delta\mathbf{A} \right\} dV. \end{aligned}$$

Para el caso del **segundo término**,

$$\begin{aligned} \delta_A \int \frac{1}{2\mu_0} (\nabla \times \mathbf{A})^2 dV &= \int \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot (\nabla \times \delta\mathbf{A}) dV, \\ &= \int \frac{1}{\mu_0} [\delta\mathbf{A} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} - \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A} \times \delta\mathbf{A})] dV, \end{aligned}$$

en donde se usó la identidad $\mathbf{a} \cdot \nabla \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{a} - \nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

Teoría de Ginzburg-Landau

Ecuaciones de Ginzburg-Landau: bajo campo aplicado

Analizando a detalle el resultado anterior,

$$\begin{aligned} & \delta_A \int \frac{1}{2\mu_0} (\nabla \times \mathbf{A})^2 dV \\ &= \int \frac{1}{\mu_0} [\delta \mathbf{A} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} - \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A} \times \delta \mathbf{A})] dV \\ &= \int \frac{1}{\mu_0} [\delta \mathbf{A} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}] dV - \oint [\nabla \times \mathbf{A} \times \delta \mathbf{A}] \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

en donde aplicamos el **teorema de Gauss** para el último término,

$$\int \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

el cual se anula, debido a que la superficie se va al infinito, dando $\delta \mathbf{A}|_{\infty} = 0$, con lo cual:

$$\delta_A \int \frac{1}{2\mu_0} (\nabla \times \mathbf{A})^2 dV = \int \frac{1}{\mu_0} [\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \cdot \delta \mathbf{A}] dV.$$

Teoría de Ginzburg-Landau

Ecuaciones de Ginzburg-Landau: bajo campo aplicado

Agrupando los resultados para la variación de ΔG , y aplicando la condición de **extremal**³, tenemos:

$$\delta_A \int \Delta G dV =$$
$$\int \left\{ -\frac{ie\hbar}{2m} (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi) + \frac{2e^2}{m} |\psi|^2 \mathbf{A} + \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \right\} \cdot \delta \mathbf{A} dV = 0,$$
$$\therefore \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu_0 \left[\frac{ie\hbar}{2m} (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi) - \frac{2e^2}{m} |\psi|^2 \mathbf{A} \right],$$

pero de la **ley de Ampère**,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad \forall \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A},$$
$$\Rightarrow \mathbf{J} = \frac{ie\hbar}{2m} (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi) - \frac{2e^2}{m} |\psi|^2 \mathbf{A},$$

obteniendo así una de las **ecuaciones de Ginzburg-Landau**.

$${}^3 \delta_A \int [\dots] dV = 0.$$

Teoría de Ginzburg-Landau

Ecuaciones de Ginzburg-Landau: bajo campo aplicado

Realizando la variación en ΔG respecto a la función de onda ψ^* ($\delta\psi^*$):

$$\begin{aligned}\int \Delta G dV &= \int (G_s - G_n) dV = \int \left[\alpha |\psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\psi|^4 \right] dV + \dots \\ &\dots + \int \left[\frac{1}{4m} |(-i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A})\psi|^2 + \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \right] dV, \\ \delta\psi^* \int \Delta G dV &= \delta\psi^* \int \left[\alpha \psi \psi^* + \frac{\beta}{2} (\psi \psi^*)^2 \right] dV + \dots \\ &\dots + \delta\psi^* \int \frac{1}{4m} [(-i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A})\psi] \cdot [(i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A})\psi^*] dV, \\ &= \int \left[\alpha \psi + \beta |\psi|^2 \psi \right] \delta\psi^* dV + \dots \\ &+ \int \frac{1}{4m} [(-i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A})\psi] \cdot [(i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A})\delta\psi^*] dV.\end{aligned}$$

Teoría de Ginzburg-Landau

Ecuaciones de Ginzburg-Landau: bajo campo aplicado

Analizando a detalle el segundo término de la expresión anterior,

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{4m} [(-i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A})\psi] \cdot [(i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A})\delta\psi^*] dV \\ &= \int \frac{1}{4m} [(-i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A})\psi] \cdot [i\hbar\nabla\delta\psi^*] dV + \dots \\ &\dots + \int \frac{1}{4m} [(-i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A})\psi] \cdot [-2e\mathbf{A}\delta\psi^*] dV, \\ &= \int \frac{1}{4m} \nabla \cdot [i\hbar\delta\psi^* (-i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A})\psi] dV + \dots \\ &\dots + \int \frac{1}{4m} (-i\hbar\delta\psi^*\nabla) \cdot [(-i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A})\psi] dV + \dots \\ &\dots + \int \frac{1}{4m} [(-i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A})\psi] \cdot (-2e\mathbf{A}\delta\psi^*) dV, \end{aligned}$$

en donde se ha utilizado la siguiente propiedad vectorial,

$$\nabla \cdot (\varphi\mathbf{F}) = \nabla\varphi \cdot \mathbf{F} + \varphi\nabla \cdot \mathbf{F},$$

$$\forall \mathbf{F} = (-i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A})\psi \quad \& \quad \varphi = i\hbar\delta\psi^*.$$

Teoría de Ginzburg-Landau

Ecuaciones de Ginzburg-Landau: bajo campo aplicado

Simplificando el resultado anterior, tenemos:

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{4m} \nabla \cdot [i\hbar\delta\psi^* (-i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A}) \psi] dV + \dots \\ & \dots + \int \frac{1}{4m} (-i\hbar\delta\psi^* \nabla) \cdot [(-i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A}) \psi] dV + \dots \\ & \dots + \int \frac{1}{4m} [(-i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A}) \psi] \cdot (-2e\mathbf{A}\delta\psi^*) dV \\ & = \int \frac{1}{4m} \nabla \cdot [i\hbar\delta\psi^* (-i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A}) \psi] dV + \dots \\ & \dots + \int \frac{1}{4m} \delta\psi^* [-i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A}] \cdot [(-i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A}) \psi] dV, \\ & = \oint \frac{i\hbar}{4m} \delta\psi^* [(-i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A}) \psi] \cdot d\mathbf{S} + \int \frac{1}{4m} \delta\psi^* (-i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A})^2 \psi dV, \end{aligned}$$

utilizando para el primer término el teorema de Gauss,

$$\int \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \quad \forall \quad \mathbf{F} = i\hbar\delta\psi^* (-i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A}) \psi.$$

Teoría de Ginzburg-Landau

Ecuaciones de Ginzburg-Landau: bajo campo aplicado

Incluyendo los res. obtenidos en la variación de ΔG ,

$$\delta\psi^* \int \Delta G dV = \int [\alpha\psi + \beta\psi|\psi|^2] \delta\psi^* dV + \dots$$

$$\dots + \oint \frac{i\hbar}{4m} \delta\psi^* [(-i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A})\psi] \cdot d\mathbf{S} + \int \frac{1}{4m} \delta\psi^* (-i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A})^2 \psi dV,$$

aplicando $\delta\psi^* [\dots] = 0$, y siendo $\delta\psi^*$ arbitrario se tiene:

$$0 = \int \delta\psi^* \left[\alpha\psi + \beta\psi|\psi|^2 + \frac{1}{4m} (-i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A})^2 \psi \right] dV + \dots$$

$$\dots + \oint \frac{i\hbar}{4m} \delta\psi^* [(-i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A})\psi] \cdot d\mathbf{S},$$

obteniendo otra de las **ecuaciones de Ginzburg-Landau**, así como la **condición de frontera** que la complementa:

$$\alpha\psi + \beta\psi|\psi|^2 + \frac{1}{4m} (-i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A})^2 \psi = 0,$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (-i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A})\psi|_S = 0, \quad \forall \hat{\mathbf{n}} \perp \text{ a la sup. } S.$$

Teoría de Ginzburg-Landau

Ecuaciones de Ginzburg-Landau adimensionales

Para expresar de una manera mas conveniente las ecs. de Ginzburg-Landau, adimensionalizamos la función de onda,

$$\phi = \frac{\psi}{\psi_0} \quad \forall \quad \psi_0^2 = \frac{|\alpha|}{\beta}, \quad \text{con:} \quad \zeta^2 = \frac{\hbar^2}{4m|\alpha|}, \quad \lambda^2 = \frac{m\beta}{2e^2|\alpha|\mu_0}, \quad \Phi_0 = \frac{\hbar\pi}{e},$$

con lo cual las ecuaciones quedan como:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \frac{ie\hbar}{2m}\mu_0 (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi) - \frac{2e^2}{m}\mu_0 |\psi|^2 \mathbf{A},$$

$$\therefore \lambda^2 (\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}) = i \frac{\Phi_0}{4\pi} (\phi \nabla \phi^* - \phi^* \nabla \phi) - |\phi|^2 \mathbf{A},$$

$$\alpha \psi + \beta \psi |\psi|^2 + \frac{1}{4m} (-i\hbar \nabla - 2e\mathbf{A})^2 \psi = 0,$$

$$\therefore -\phi + \phi |\phi|^2 + \zeta^2 \left(-i\nabla - \frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{A} \right)^2 \phi = 0,$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (-i\hbar \nabla - 2e\mathbf{A}) \psi|_S = 0,$$

$$\therefore \hat{\mathbf{n}} \cdot (-i\nabla - [2\pi/\Phi_0]\mathbf{A}) \phi|_S = 0.$$

6. Superconductividad

6.1 Propiedades fundamentales y descripción fenomenológica

6.2 Teoría de Ginzburg-Landau

6.3 Teoría Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS)

6.4 Tunelamiento, efecto Josephson

6.5 Clasificación de materiales superconductores



Teoría Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS)

Interacción electrón–fonón

Aproximación del electrón independiente

- Considera que los electrones (en un metal) forman un gas.
- Funciona muy bien en teoría de bandas para explicar el comportamiento de muchas propiedades de los sólidos.
- **No** considera la correlación o interacción entre los electrones de un cristal.
- Tal interacción electrón-electrón se sustituye por una interacción **promedio**.
- Asume que el movimiento de un electrón es estadísticamente **independiente** de los demás: estudia un electrón, y considera a los restantes como una contribución al potencial promedio, dentro del cual el electrón se mueve.
- La aprox. **Hartree-Fock** introduce la interacción Coulómbica (electrón-electrón), pero no toma en cuenta interacciones **indirectas**.
- Tales interacciones indirectas entre electrones, mediadas por excitaciones, como por ejemplo fonones, son incluidas por **Fröhlich**.

Teoría Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS)

Interacción electrón–fonón

En el Hamiltoniano de **Fröhlich**, aplicando la aprox. **adiabática**, se describe el movimiento de los electrones desacoplado de los iones,

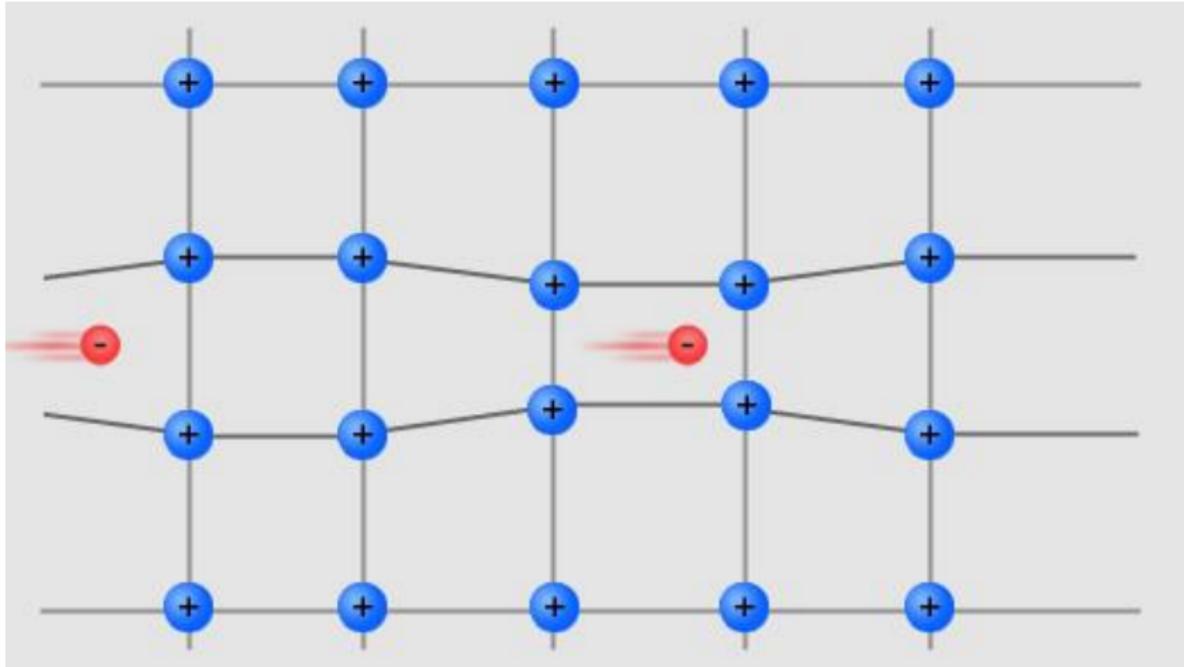
$$H_F = \sum_k \epsilon_k c_k^\dagger c_k + \sum_q \hbar\omega_q a_q^\dagger a_q + \sum_{kk'q} M_{kk'} (a_{-q}^\dagger + a_q) c_k^\dagger c_{k'},$$

- c_k^\dagger, c_k : operadores de **creación** y **aniquilación** para un **electrón** con vector de onda k .
- a_q^\dagger, a_q : operadores de **creación** y **aniquilación** de un **fonón** con vector de onda q .
- $M_{kk'}$: elementos de matriz de la interacción **electrón-fonón**.
- El **momento del fonón** $q = k - k'$ expresa la **conservación** del momento cristalino.
- Los dos primeros términos de H_F representan un sistema con electrones y fonones **no-interactuantes**: H_0 .
- El tercer término corresponde a la interacción **electrón-fonón** propiamente: H_{e-ph} .

Teoría Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS)

Interacción electrón–fonón

Uno de los efectos de la interacción **e-ph** es producir, bajo ciertas circunstancias, una interacción **atractiva** entre electrones.



Teoría Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS)

Interacción electrón–fonón

Para observar de manera mas clara dicha interacción, realicemos una transformación canónica al Hamiltoniano de Fröhlich,

$$\begin{aligned}H_F &= H_0 + H_{e-ph}, \\ \Rightarrow H' &= e^{-s} (H_0 + H_{e-ph}) e^s, \\ &= \left(1 - s + \frac{s^2}{2} - \dots\right) (H_0 + H_{e-ph}) \left(1 + s + \frac{s^2}{2} + \dots\right), \\ &= (H_0 + H_{e-ph}) + (H_0 + H_{e-ph})s + (H_0 + H_{e-ph})\frac{s^2}{2} + \dots \\ &\dots - s(H_0 + H_{e-ph}) - s(H_0 + H_{e-ph})s - s(H_0 + H_{e-ph})\frac{s^2}{2} + \dots \\ &\dots + \frac{s^2}{2}(H_0 + H_{e-ph}) + \frac{s^2}{2}(H_0 + H_{e-ph})s + \frac{s^2}{2}(H_0 + H_{e-ph})\frac{s^2}{2} - \dots\end{aligned}$$

Teoría Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS)

Interacción electrón–fonón

agrupando los términos de manera adecuada, obtenemos:

$$\begin{aligned} H' &= H_0 + H_{e-ph} + [H_0, s] + [H_{e-ph}, s] + \frac{1}{2} [[(H_0 + H_{e-ph}), s], s] + \dots \\ &= H_0 + (H_{e-ph} + [H_0, s]) + \frac{1}{2} [H_{e-ph}, s] + \frac{1}{2} [(H_{e-ph} + [H_0, s]), s] + \dots \end{aligned}$$

escogiendo la función s tal que el conmutador con H_0 **cancela** el término H_{e-ph} , siendo además de la misma magnitud que él⁴:

$$H' = H_0 + \frac{1}{2} [H_{e-ph}, s] \quad \forall \quad H_{e-ph} + [H_0, s] = 0.$$

Para darle una forma funcional a s , recordemos las definiciones:

$$H_0 = \sum_k \epsilon_k c_k^\dagger c_k + \sum_q \hbar \omega_q a_q^\dagger a_q, \quad H_{e-ph} = \sum_{kk'q} M_{kk'} (a_{-q}^\dagger + a_q) c_k^\dagger c_{k'},$$

$$\therefore s = \sum_{kk'q} M_{kk'} (A a_{-q}^\dagger + B a_q) c_k^\dagger c_{k'}.$$

⁴omitiendo términos s^3 o mayores.

Teoría Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS)

Interacción electrón–fonón

Los valores de A y B se determinan de la condición original para s ,

$$H_{e-ph} + [H_0, s] = 0,$$

$$\Rightarrow A = -(\epsilon_k - \epsilon_{k'} + \hbar\omega_{-q})^{-1}, \quad B = -(\epsilon_k - \epsilon_{k'} + \hbar\omega_q)^{-1},$$

sustituyendo los valores en la transformación canónica del Hamiltoniano,

$$H' = H_0 + \frac{1}{2}[H_{e-ph}, s],$$

$$\Rightarrow H' = H_0 - \frac{1}{2} \left[\sum_{kk'q} M_{kk'} (a_{-q}^\dagger + a_q) c_k^\dagger c_{k'}, \right.$$

$$\left. \sum_{k''k'''q'} M_{k''k'''} \left(\frac{a_{-q'}^\dagger}{\epsilon_{k''} - \epsilon_{k'''} + \hbar\omega_{-q'}} + \frac{a_{q'}}{\epsilon_{k''} - \epsilon_{k'''} + \hbar\omega_{q'}} \right) c_{k''}^\dagger c_{k'''} \right].$$

Teoría Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS)

Interacción electrón–fonón

De todos los términos del conmutador, nos centramos en el conjunto que resulta de conmutar los operadores de **fonones**: a_{-q}^\dagger y a_q , y usando el hecho de que $M_{kk'}$ es sólo función de $k - k' = q$ se obtiene:

$$H' = H_0 + \sum_{kk'q} |M_q|^2 \frac{\hbar\omega_q}{(\epsilon_k - \epsilon_{k-q})^2 - (\hbar\omega_q)^2} c_{k'+q}^\dagger c_{k-q}^\dagger c_k c_{k'} + (\text{op. elect.}),$$

de lo anterior se observa que para obtener una interacción **atractiva** se debe cumplir:

$$|\epsilon_k - \epsilon_{k-q}| < \hbar\omega_q,$$

condición que permitiría que **pares** de electrones formen estados **ligados** con **menor** energía que la correspondiente a dos electrones libres.

El resultado obtenido es válido para **cualquier** tipo de excitación, no siendo exclusivo solo para fonones.

Teoría Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS)

Pares de Cooper

La existencia de dichos pares, denominados **pares de Cooper**, formados por dos electrones de k y espín opuesto, formando un **estado apareado**, es la base de la **teoría BCS**.

Consideremos $|0\rangle$ el estado base al nivel de Fermi, entonces:

- $|0\rangle$: representa un producto **antisimétrico** de funciones de onda de todos los electrones con energía $\leq E_F$.
- $c_k^\dagger c_{-k}^\dagger |0\rangle$: será la creación de un par de electrones con números cuánticos $k \equiv k \uparrow$ y $-k \equiv -k \downarrow$, siendo que el momento total del par se debe **conservar**.

Por tanto, podemos expresar de manera general a la función de onda de un **par de Cooper** como una combinación lineal de todos los estados posibles:

$$|\psi\rangle = \sum_{k > k_F} \alpha_k c_k^\dagger c_{-k}^\dagger |0\rangle,$$

en donde expresamente se requiere que $k > k_F$, debido a que el par de Cooper debe permanecer por encima del nivel de Fermi.

Teoría Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS)

Pares de Cooper

Construyendo ahora el Hamiltoniano⁵,

$$H = \sum_{k,\sigma} \epsilon_k c_{k\sigma}^\dagger c_{k\sigma} - \sum_{kk'} V_{kk'} c_k^\dagger c_{-k}^\dagger c_{-k'} c_{k'},$$

en donde $\sigma \equiv \uparrow, \downarrow$; $k, k' \equiv k \uparrow, k' \uparrow$; $-k, -k' \equiv -k \downarrow, -k' \downarrow$ y $V_{kk'} > 0$ es el potencial de interacción entre los electrones k y k'

Para hallar el espectro de energía del par de Cooper, apliquemos el Hamiltoniano a la propuesta de función de onda, expand. el espín σ :

$$\begin{aligned} H |\psi\rangle &= \sum_{kq,\sigma} \epsilon_k c_{k\sigma}^\dagger c_{k\sigma} \alpha_q c_q^\dagger c_{-q}^\dagger |0\rangle - \sum_{kk'} V_{kk'} \alpha_q c_k^\dagger c_{-k}^\dagger c_{-k'} c_{k'} c_q^\dagger c_{-q}^\dagger |0\rangle, \\ &= \sum_{kq} \epsilon_k c_{k\uparrow}^\dagger c_{k\uparrow} \alpha_q c_{q\uparrow}^\dagger c_{-q\downarrow}^\dagger |0\rangle + \sum_{kq} \epsilon_k c_{k\downarrow}^\dagger c_{k\downarrow} \alpha_q c_{q\uparrow}^\dagger c_{-q\downarrow}^\dagger |0\rangle + \dots \\ &\dots - \sum_{kk'} V_{kk'} \alpha_q c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\downarrow}^\dagger c_{-k'\downarrow} c_{k'\uparrow} c_{q\uparrow}^\dagger c_{-q\downarrow}^\dagger |0\rangle, \end{aligned}$$

⁵en base a lo observado del Hamiltoniano de Frölich.

Teoría Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS)

Pares de Cooper

analizando los primeros dos términos de la expresión anterior,

$$\begin{aligned} H |\psi\rangle &= \sum_{kq} \epsilon_k c_{k\uparrow}^\dagger c_{k\uparrow} \alpha_q c_{q\uparrow}^\dagger c_{-q\downarrow}^\dagger |0\rangle + \sum_{kq} \epsilon_k c_{k\downarrow}^\dagger c_{k\downarrow} \alpha_q c_{q\uparrow}^\dagger c_{-q\downarrow}^\dagger |0\rangle + \dots \\ &\dots - \sum_{kk'q} V_{kk'q} \alpha_q c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\downarrow}^\dagger c_{-k'\downarrow} c_{k'\uparrow} c_{q\uparrow}^\dagger c_{-q\downarrow}^\dagger |0\rangle, \\ &= \sum_q \epsilon_q \alpha_q c_{q\uparrow}^\dagger c_{-q\downarrow}^\dagger |0\rangle + \sum_q \epsilon_{-q} \alpha_q c_{q\uparrow}^\dagger c_{-q\downarrow}^\dagger |0\rangle + \dots \\ &\dots - \sum_{kk'q} V_{kk'q} \alpha_q c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\downarrow}^\dagger c_{-k'\downarrow} c_{k'\uparrow} c_{q\uparrow}^\dagger c_{-q\downarrow}^\dagger |0\rangle, \end{aligned}$$

en donde recordemos que $\epsilon_k c_{k\sigma}^\dagger c_{k\sigma}$ es un operador que nos arroja la energía del estado sobre el cual **aplica**: $c_{q\uparrow}^\dagger c_{-q\downarrow}^\dagger |0\rangle \Rightarrow \epsilon_q$.
Por tanto, considerando a los primeros términos como H_0 , llegamos a:

$$H_0 = 2 \sum_q \epsilon_q \alpha_q c_{q\uparrow}^\dagger c_{-q\downarrow}^\dagger |0\rangle,$$

ya que la energía solo depende del módulo del **momento**: $\epsilon_q = \epsilon_{-q}$.

Teoría Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS)

Pares de Cooper

Para el caso del término del acoplamiento,

$$\begin{aligned} H_{e-ph} &= \sum_{kk'q} V_{kk'q} \alpha_q c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\downarrow}^\dagger c_{-k'\downarrow} c_{k'\uparrow} c_{q\uparrow}^\dagger c_{-q\downarrow}^\dagger |0\rangle, \\ &= \sum_{kq} V_{kq} \alpha_q c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\downarrow}^\dagger c_{-q\downarrow} c_{-q\downarrow}^\dagger |0\rangle, \\ &= \sum_{kq} V_{kq} \alpha_q c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\downarrow}^\dagger |0\rangle, \end{aligned}$$

en donde hemos utilizado las relaciones de conmutación para fermiones:

$$c_\beta^\dagger c_\gamma + c_\gamma c_\beta^\dagger = \delta_{\beta\gamma}.$$

Por tanto, calculando el valor esperado del Hamiltoniano $H = H_0 - H_{e-ph}$,

$$E = \langle \psi | H | \psi \rangle = 2 \sum_k \epsilon_k |\alpha_k|^2 - \sum_{kq} V_{kq} \alpha_k^* \alpha_q,$$

en donde el estado $|\psi\rangle = \sum_k \alpha_k c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\downarrow}^\dagger |0\rangle$ está normalizado.

Teoría Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS)

Pares de Cooper

Lo que corresponde ahora es calcular los coeficientes del estado $|\psi\rangle$, mediante el método de multiplicadores de Lagrange,

$$E = -\lambda \sum_k \alpha_k^* \alpha_k + \lambda + 2 \sum_k \epsilon_k |\alpha_k|^2 - \sum_{kq} V_{kq} \alpha_k^* \alpha_q \quad \forall \quad \sum_k |\alpha_k|^2 = 1,$$

aplicando la **variación** respecto a α_k^* a E ,

$$\delta E = \left[-\lambda \sum_k \alpha_k + 2 \sum_k \epsilon_k \alpha_k - \sum_{kq} V_{kq} \alpha_q \right] \delta \alpha_k^* = 0,$$

$$\Rightarrow \sum_k \left[(-\lambda + 2\epsilon_k) \alpha_k - \sum_q V_{kq} \alpha_q \right] = 0,$$

$$\therefore (2\epsilon_k - \lambda) \alpha_k - \sum_q V_{kq} \alpha_q = 0.$$

Teoría Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS)

Pares de Cooper

Para conocer el significado del multiplicador de Lagrange λ , multipliquemos la ec. anterior por α_k^* y sumemos respecto a k ,

$$(2\epsilon_k - \lambda)\alpha_k - \sum_q V_{kq}\alpha_q = 0,$$

$$\therefore \sum_k (2\epsilon_k - \lambda)|\alpha_k|^2 - \sum_{kq} V_{kq}\alpha_q\alpha_k^* = 0,$$

$$\sum_k 2\epsilon_k|\alpha_k|^2 - \sum_{kq} V_{kq}\alpha_q\alpha_k^* = \lambda \sum_k |\alpha_k|^2,$$

la cual si comparamos con la ecuación del valor esperado $E = \langle \psi | H | \psi \rangle$ se obtiene que

$$\lambda \sum_k |\alpha_k|^2 = E \Rightarrow \lambda = E,$$

por lo que la ecuación original será,

$$(2\epsilon_k - E)\alpha_k - \sum_q V_{kq}\alpha_q = 0.$$

Teoría Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS)

Pares de Cooper

Para resolver la ecuación anterior, la teoría BCS define el comportamiento de la interacción electrón-fonón V_{kq} como:

$$V_{kq} = \begin{cases} V & \forall |\epsilon_k - \epsilon_F| \leq \hbar\omega_D \quad \& \quad |\epsilon_q - \epsilon_F| \leq \hbar\omega_D \\ 0 & \forall |\epsilon_k - \epsilon_F| > \hbar\omega_D \quad \& \quad |\epsilon_q - \epsilon_F| > \hbar\omega_D \end{cases},$$

lo anterior significa que solo los estados que se encuentran en una franja $\hbar\omega_D$ **alrededor** del nivel de Fermi ϵ_F .

Aplicando la aproximación de la interacción en la ecuación,

$$(2\epsilon_k - E)\alpha_k - \sum_q V_{kq}\alpha_q = 0 \quad \Rightarrow \quad (2\epsilon_k - E)\alpha_k - V \sum_q \alpha_q = 0,$$

$$\therefore \alpha_k = \frac{a}{2\epsilon_k - E} \quad \forall \quad a = V \sum_q \alpha_q = \text{cte.}$$

sustituyendo la expresión anterior en la ec. original para obtener a E :

$$1 - V \sum_q \frac{1}{2\epsilon_q - E} = 0.$$

Teoría Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS)

Pares de Cooper

De la expresión anterior, recordemos que los estados q deben permanecer en una franga angosta de energía ($\hbar\omega_D$) sobre el nivel de Fermi (ϵ_F), por lo que podemos realizar la sig. sustitución,

$$\sum_q \rightarrow N(0) \int_{\epsilon_F}^{\epsilon_F + \hbar\omega_D} d\epsilon,$$
$$\therefore 1 = V \sum_q \frac{1}{2\epsilon_q - E} = N(0)V \int_{\epsilon_F}^{\epsilon_F + \hbar\omega_D} \frac{d\epsilon}{2\epsilon - E},$$
$$\Rightarrow E = 2\epsilon_F + \frac{2\hbar\omega_D}{1 - e^{2/N(0)V}},$$

Para el caso de **acoplamiento débil**, $N(0)V \ll 1^6$, tenemos:

$$\frac{1}{1 - e^{2/N(0)V}} \approx -e^{-2/N(0)V},$$
$$\therefore E \approx 2\epsilon_F - 2\hbar\omega_D e^{-2/N(0)V}.$$

⁶ $N(0)$ es la densidad de estados al nivel de Fermi.

Teoría Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS)

Pares de Cooper

Del resultado anterior,

$$E \approx 2\epsilon_F - 2\hbar\omega_D e^{-2/N(0)V},$$

se observa que dos electrones, sin acoplamiento electrón-fonón, en la superficie de Fermi tendrán una energía de $2\epsilon_F$, mientras que un **par de Cooper** presentará una energía **menor**.

Para el caso de **acoplamiento fuerte**, $N(0)V \gg 1$,

$$\frac{1}{1 - e^{2/N(0)V}} \approx -\frac{N(0)V}{2},$$
$$\therefore E \approx 2\epsilon_F - 2\hbar\omega_D N(0)V,$$

teniendo igualmente el par de Cooper una energía **menor** que el caso de dos electrones sin interacción en la sup. de Fermi.

Teoría Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS)

Transformación de Bogoliubov-Valatin

Un tiempo después del desarrollo de la teoría BCS, se encontró un proceso de diagonalización mediante una nueva transformación caónica alternativa, conocida como transf. de **Bogoliubov-Valatin**,

$$\begin{aligned}\gamma_k &= u_k c_k - v_k c_{-k}^\dagger \Rightarrow \gamma_k^\dagger = u_k c_k^\dagger - v_k c_{-k}, \\ \gamma_{-k} &= u_k c_{-k} + v_k c_k^\dagger \Rightarrow \gamma_{-k}^\dagger = u_k c_{-k}^\dagger + v_k c_k,\end{aligned}$$

conocidos como operadores de **Bogoliubov**, donde las funciones u_k, v_k son funciones reales y simétricas respecto a la transformación $k \rightarrow k'$.

Al tratarse de una transformación canónica **unitaria**, se debe cumplir:

$$u_k^2 + v_k^2 = 1,$$

además de las relaciones de **conmutación** de fermiones⁷,

$$\begin{aligned}\{\gamma_k, \gamma_{k'}\} &= \{\gamma_k, \gamma_{-k'}\} = \{\gamma_k^\dagger, \gamma_{-k'}\} = 0, \\ \{\gamma_k^\dagger, \gamma_{k'}\} &= \{\gamma_{-k}^\dagger, \gamma_{-k'}\} = \delta_{kk'}.\end{aligned}$$

⁷ $\{\hat{A}, \hat{B}\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$

Teoría Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS)

Transformación de Bogoliubov-Valatin

Para poder describir a H_{BCS} en términos de los γ' s, es necesario invertir tales operadores, mediante las relaciones anteriores, obteniendo:

$$\begin{aligned}c_k &= v_k \gamma_{-k}^\dagger + u_k \gamma_k &\Rightarrow c_k^\dagger &= v_k \gamma_{-k} + u_k \gamma_k^\dagger, \\c_{-k} &= u_k \gamma_{-k} - v_k \gamma_k^\dagger &\Rightarrow c_{-k}^\dagger &= u_k \gamma_{-k}^\dagger - v_k \gamma_k.\end{aligned}$$

Con estas expresiones, es posible definir H_{BCS} en términos de γ_k y γ_k' ,

$$H_{BCS} = H_0 + H_{e-ph},$$

$$\forall H_0 = \sum_k \epsilon_k \left(c_{k\uparrow}^\dagger c_{k\uparrow} + c_{-k\downarrow}^\dagger c_{-k\downarrow} \right),$$

$$\Rightarrow H_0 = \sum_k \epsilon_k \left[2v_k^2 + (u_k^2 - v_k^2) (m_k + m_{-k}) + 2u_k v_k \left(\gamma_k^\dagger \gamma_{-k}^\dagger + \gamma_{-k} \gamma_k \right) \right]$$

en donde se ha definido a los operadores de **contador de pares** m ,

$$m_k = \gamma_k^\dagger \gamma_k, \quad m_{-k} = \gamma_{-k}^\dagger \gamma_{-k}.$$

Teoría Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS)

Transformación de Bogoliubov-Valatin

Para el caso del término H_{e-ph} ⁸,

$$H_{e-ph} = - \sum_{kk'} V_{kk'} c_{k'\uparrow}^\dagger c_{-k'\downarrow}^\dagger c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow},$$

$$\Rightarrow H_{e-ph} = - \sum_{kk'} V_{kk'} [u_{k'} v_{k'} u_k v_k (1 - m_{k'} - m_{-k'}) (1 - m_k - m_{-k}) + \dots + u_{k'} v_{k'} (1 - m_{k'} - m_{-k'}) (u_k^2 - v_k^2) (\gamma_{-k} \gamma_k + \gamma_k^\dagger \gamma_{-k}^\dagger)],$$

El Hamiltoniano BCS, debido a la transf. de Bogoliubov-Valatin, tomará por tanto la siguiente forma,

$$H_{BCS} = E_0 + H_0 + H_1,$$

- E_0 : constante **independiente** de los operadores γ y m .
- H_0 : operador **diagonal** que depende de ctes. y los operadores m .
- H_1 : operador **no-diagonal dependiente** de γ y m .

⁸sin tomar en cuenta términos de orden $O(u_k^4, v_k^4)$ y mayores.

Teoría Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS)

Transformación de Bogoliubov-Valatin

Siendo cada uno de esos términos:

$$E_0 = \sum_k 2\epsilon_k v_k^2 - \sum_{kk'} V_{kk'} u_{k'} v_{k'} u_k v_k,$$

$$H_0 = \sum_k \epsilon_k (u_k^2 - v_k^2) (m_k + m_{-k}) + \sum_{kk'} V_{kk'} u_{k'} v_{k'} u_k v_k (m_{k'} + m_{-k'}) + \dots + \sum_{kk'} V_{kk'} u_{k'} v_{k'} u_k v_k (1 - m_{k'} + m_{-k'}) (m_k + m_{-k}),$$

$$H_1 = \sum_k \left[2\epsilon_k u_k v_k - \sum_{k'} V_{kk'} u_{k'} v_{k'} (1 - m_{k'} - m_{-k'}) (u_k^2 - v_k^2) \right] \times \dots \dots \times (\gamma_k^\dagger \gamma_{-k}^\dagger + \gamma_{-k} \gamma_k).$$

Con el fin de hallar la transf. de **Bogoliubov-Valatin** adecuada, es decir, que diagonalice a H_{BCS} , asumimos:

- En el **estado base** los números de ocupación $m_{k'}$ y $m_{-k'}$ son cero, es decir, no hay estados excitados, cumpliéndose sólo a $T = 0$.
- $H_1 \rightarrow 0$, ya que requerimos que H_{BCS} sea **diagonal**.

Teoría Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS)

Transformación de Bogoliubov-Valatin

Debido a la condición de $H_1 = 0$, tenemos:

$$H_1 = \sum_k \left[2\epsilon_k u_k v_k - V_{kk'} u_{k'} v_{k'} (1 - m_{k'} - m_{-k'}) (u_k^2 - v_k^2) \right] \times \dots \\ \dots \times (\gamma_k^\dagger \gamma_{-k}^\dagger + \gamma_{-k} \gamma_k) = 0,$$

$$\therefore 0 = 2\epsilon_k u_k v_k - \sum_{k'} V_{kk'} u_{k'} v_{k'} (u_k^2 - v_k^2) \quad \forall m_{k'} = m_{-k'} = 0,$$

definiendo de la ec. anterior, al **gap superconductor**,

$$\Delta_k = \sum_{k'} V_{kk'} u_{k'} v_{k'}, \\ \therefore 0 = 2\epsilon_k u_k v_k - \Delta_k (u_k^2 - v_k^2),$$

lo cual, junto con la condición de transformación unitaria: $u_k^2 + v_k^2 = 1$, nos permite determinar u_k y v_k que diagonalicen H_{BCS} .

Teoría Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS)

Transformación de Bogoliubov-Valatin

Resolviendo el sistema de ecuaciones anteriores, se obtiene:

$$u_k = \left[\frac{1}{2} \mp \frac{\epsilon_k}{2(\epsilon_k^2 + \Delta_k^2)^{1/2}} \right]^{1/2}, \quad v_k = \left[\frac{1}{2} \pm \frac{\epsilon_k}{2(\epsilon_k^2 + \Delta_k^2)^{1/2}} \right]^{1/2},$$

con lo cual podemos obtener una ec. para el **gap superconductor**,

$$\begin{aligned} \Delta_k &= \sum_{k'} V_{kk'} u_{k'} v_{k'} = \frac{1}{2} \sum_{k'} V_{kk'} \frac{\Delta_{k'}}{(\epsilon_{k'}^2 + \Delta_{k'}^2)^{1/2}} \\ &= \frac{1}{2} \int D(\epsilon_{k'}) V_{kk'} \frac{\Delta_{k'}}{(\epsilon_{k'}^2 + \Delta_{k'}^2)^{1/2}} d\epsilon_{k'}, \end{aligned}$$

lo cual representa una ecuación **no-lineal** para Δ_k , cuya solución trivial sería $\Delta_k = 0$, es decir, un sistema **no-superconductor** en el estado **normal**.

Teoría Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS)

Transformación de Bogoliubov-Valatin

En el caso del estado **superconductor**, cuya energía del estado base debe ser menor que la del estado **normal**, necesitamos $\Delta_k \neq 0$.

Proponiendo para el potencial de interacción un valor **constante**⁹,

$$V_{kk'} = \begin{cases} V & \forall |\epsilon_k| < \hbar\omega_D, \\ 0 & \forall |\epsilon_k| > \hbar\omega_D, \end{cases}$$

así como también $D(\epsilon_k) \approx N(0)$ ¹⁰, ya que $\hbar\omega_D$ representa una franja muy pequeña en energía, con lo que $\Delta_k \rightarrow \Delta_0$ es independiente de k ,

$$\Delta_k = \frac{1}{2} \int D(\epsilon_{k'}) V_{kk'} \frac{\Delta_{k'}}{(\epsilon_{k'}^2 + \Delta_{k'}^2)^{1/2}} d\epsilon_{k'},$$
$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{2} N(0) V \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} \frac{1}{(\epsilon^2 + \Delta_0^2)^{1/2}} d\epsilon.$$

⁹propuesta hecha originalmente en la teoría BCS.

¹⁰ $N(0)$: densidad de estados al nivel de Fermi.

Teoría Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS)

Transformación de Bogoliubov-Valatin

Integrando el resultado anterior para obtener la expresión del **gap superconductor**,

$$1 = \frac{1}{2} N(0) V \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} \frac{1}{(\epsilon^2 + \Delta_0^2)^{1/2}} d\epsilon,$$
$$\therefore \Delta_0 = \frac{\hbar\omega_D}{\text{Senh}(1/N(0)V)}.$$

Para el caso de **acoplamiento débil**, $N(0)V \ll 1$ ¹¹ se tiene:

$$\Delta_0 = 2\hbar\omega_D e^{-1/N(0)V}.$$

- $N(0)V$ representa la **cte. de acoplamiento** electrón-fonón.
- Δ_0 presenta una **singularidad** en $V = 0$ debido a $e^{-1/N(0)V}$.
- Por tanto, Δ_0 no se puede obtener mediante métodos perturbativos.

¹¹ $\text{Senh}x \approx e^x/2$.

6. Superconductividad

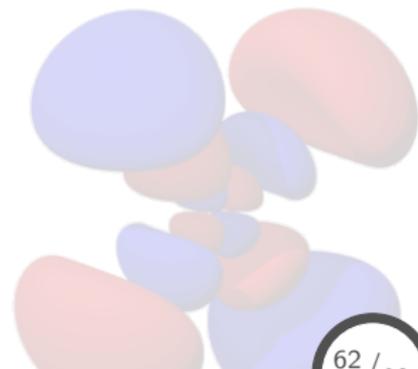
6.1 Propiedades fundamentales y descripción fenomenológica

6.2 Teoría de Ginzburg-Landau

6.3 Teoría Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS)

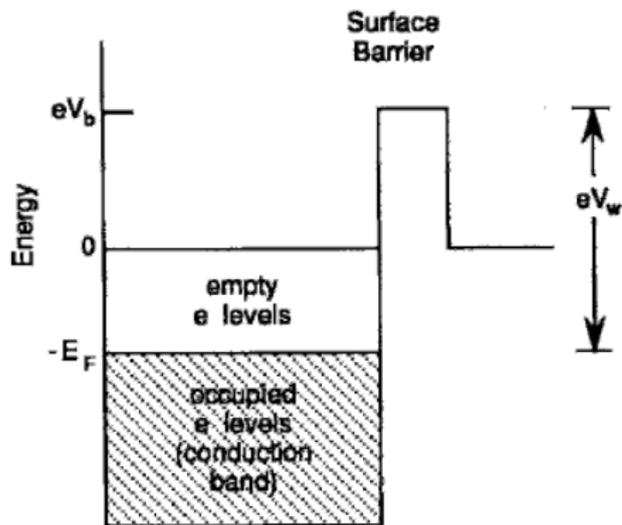
6.4 Tunelamiento, efecto Josephson

6.5 Clasificación de materiales superconductores



Tunelamiento, efecto Josephson

Fenómeno de tunelamiento



En un metal, tenemos diferentes valores de energía para diferentes regiones:

- V_b : barrera de potencial creada por la superficie,
- $-E_F$: energía máxima de los e^- en un metal,
- V_w : potencial de la función de trabajo, energía necesaria para remover un e^- del metal,

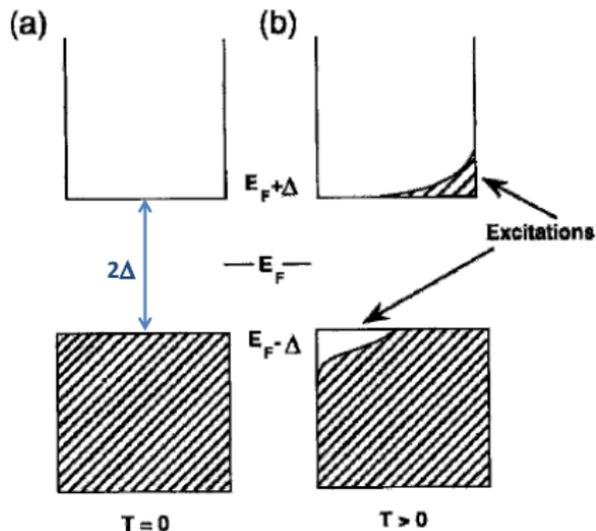
por tanto, el mínimo de energía para extraer un electrón será:

$$eV_w = eV_b + |E_F|.$$

Tunelamiento, efecto Josephson

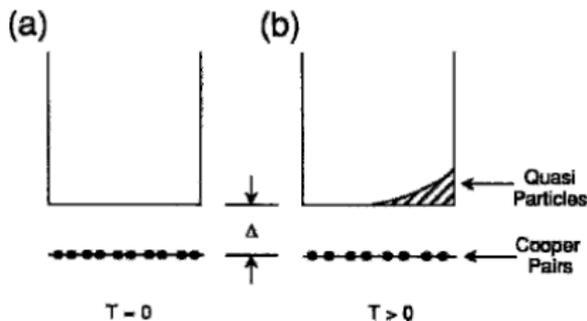
Fenómeno de tunelamiento: esquemas de niveles de energía

Representación de semiconductores (S)



(S) no toma en cuenta el fenómeno de **apareamiento** de electrones.

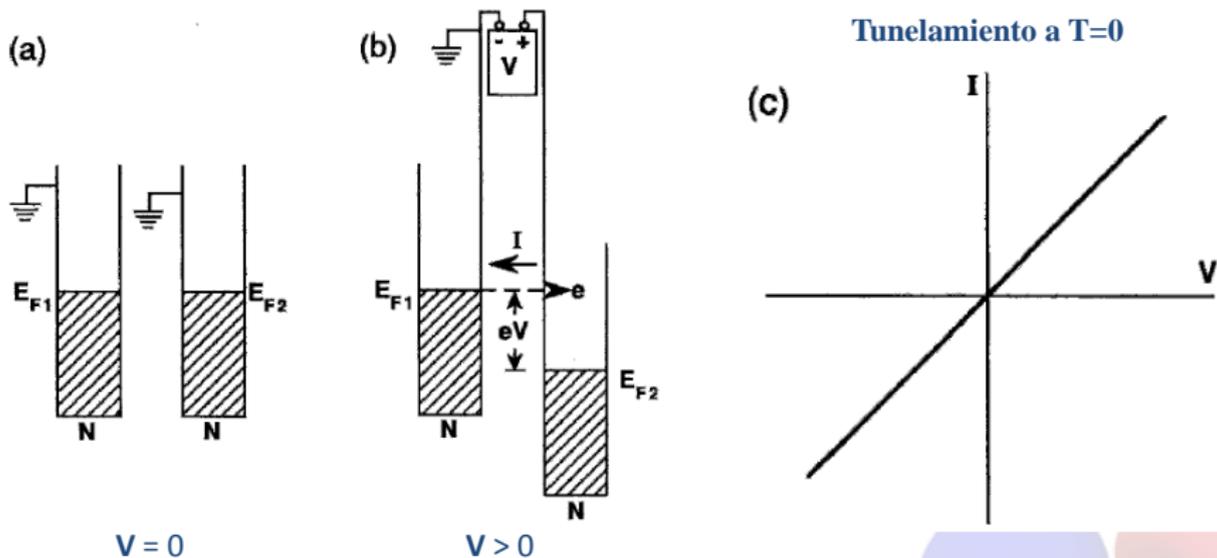
Representación de condensado de Bose (CB)



(CB) toma en cuenta la energía de enlace E_g compartida por dos electrones, $\Delta = E_g/2$.

Tunelamiento, efecto Josephson

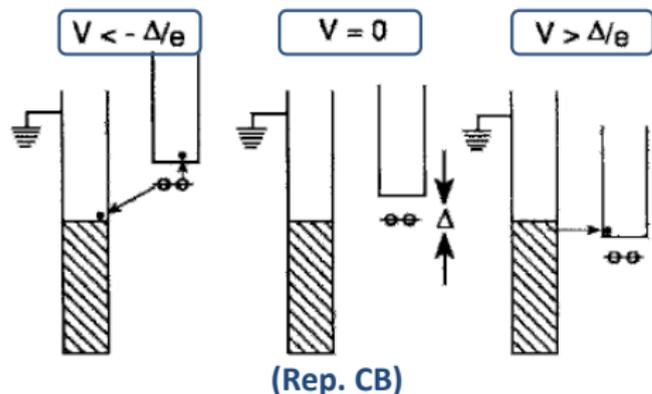
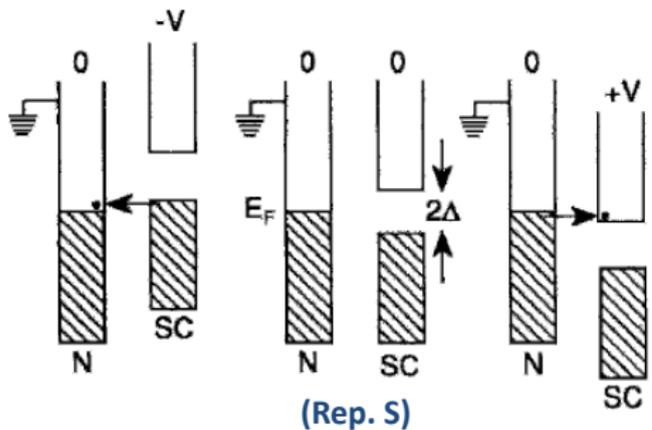
Procesos de tunelamiento: Metal normal–Metal normal (N–I–N)



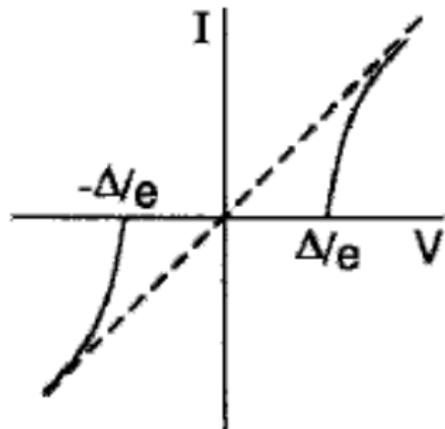
- El potencial **positivo** bajará los niveles de energía del metal (o SC) en el cual se **conecta**.
- La **corriente** I fluye en dirección al metal con potencial **negativo**.
- Los electrones de **tunelamiento** fluyen en dirección al metal con potencial **positivo**.

Tunelamiento, efecto Josephson

Procesos de tunelamiento: Metal normal–Superconductor (N–I–SC)



Tunelamiento a $T=0$

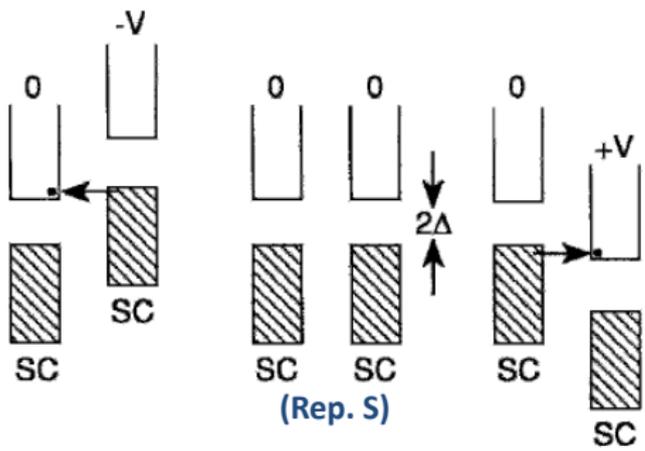


No hay tunelamiento en la región intermedia, definida por:

$$-\Delta/e < V < \Delta/e.$$

Tunelamiento, efecto Josephson

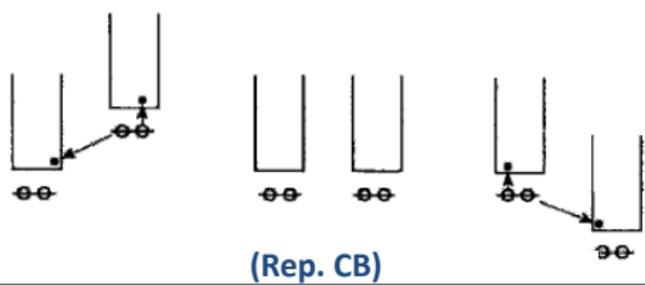
Procesos de tunelamiento: Superconductor–Superconductor (SC–I–SC)



$V < -2\Delta/e$

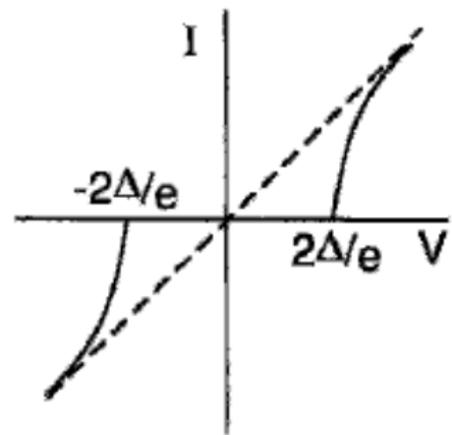
$V = 0$

$V > 2\Delta/e$



(Rep. CB)

Tunelamiento a T=0



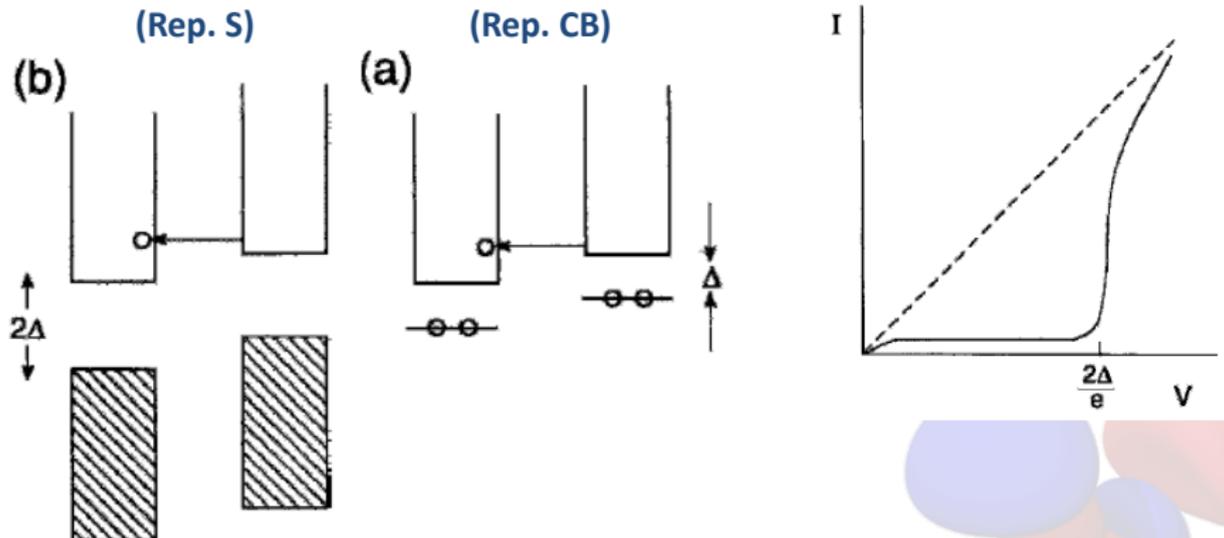
No hay tunelamiento en la región intermedia, definida por:

$$-2\Delta/e < V < 2\Delta/e.$$

Tunelamiento, efecto Josephson

Procesos de tunelamiento: Superconductor–Superconductor (SC–I–SC)

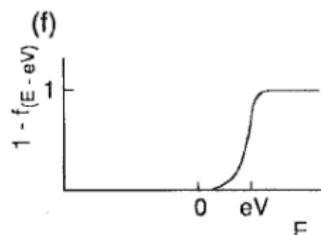
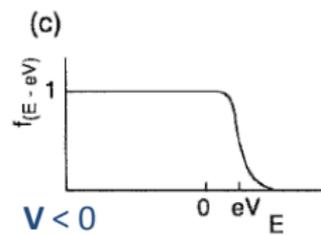
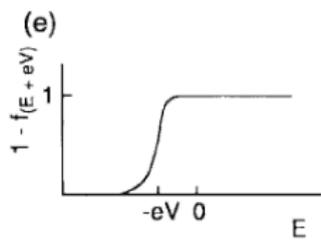
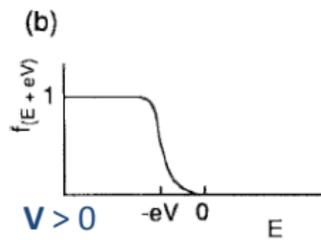
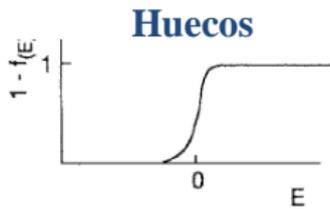
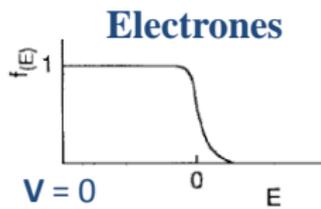
Tunelamiento a $T > 0$



Existe un tunelamiento **finito** en $|V| < 2\Delta/e$ debido a excitaciones térmicas de las cuasi-partículas más energéticas.

Tunelamiento, efecto Josephson

Tratamiento cuantitativo: función de distribución Fermi-Dirac ($T > 0$)



Electrones bajo un potencial aplicado V ,

$$f(E + eV) = \frac{1}{1 + \exp[(E + eV)/k_B T]}$$

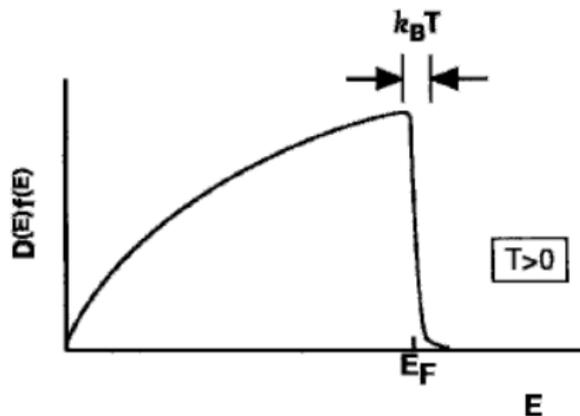
Huecos (estados desocupados) bajo un potencial aplicado V ,

$$1 - f(E + eV) = \frac{1}{1 + \exp[-(E + eV)/k_B T]}$$

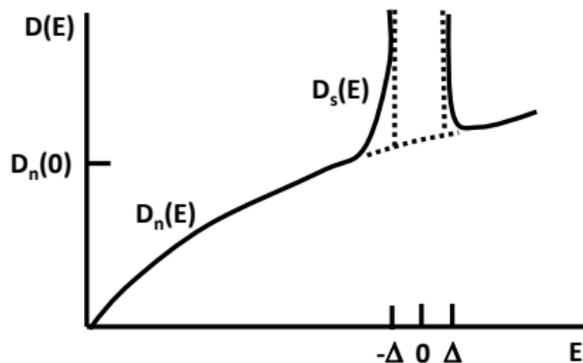
Tunelamiento, efecto Josephson

Tratamiento cuantitativo: densidad de estados (DOS)

DOS metal normal



DOS estado superconductor



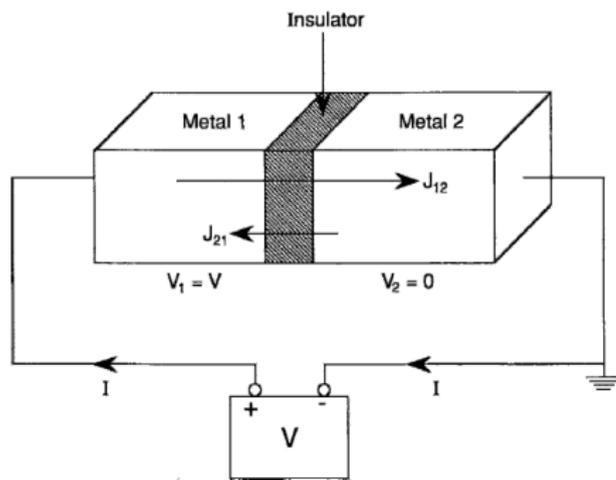
$$D_n(E) = D_n(0) \left(\frac{E_F + E}{E_F} \right)^{1/2},$$

considerando que $|E| \ll E_F$,
entonces tendremos que
 $D_n(E) \approx D_n(0)$, donde:
 $-eV_{max} < E < eV_{max}$.

$$D_s(E) = \begin{cases} \frac{D_n(0)|E|}{(E^2 - \Delta^2)^{1/2}} & E < -\Delta \\ 0 & -\Delta < E < \Delta \\ \frac{D_n(0)|E|}{(E^2 - \Delta^2)^{1/2}} & E > \Delta \end{cases}$$

Tunelamiento, efecto Josephson

Tratamiento cuantitativo: corriente de tunelamiento



Número de estados iniciales **ocupados**,

$$N_2(E)f(E),$$

Número de estados finales **desocupados** (vacíos),

$$N_1(E + eV) [1 - f(E + eV)].$$

Para calcular $J = J_{1 \rightarrow 2} - J_{2 \rightarrow 1}$, primero obtenemos:

$$J_{1 \rightarrow 2} = A|T|^2 \int_{-\infty}^{\infty} N_1(E + eV) [1 - f(E + eV)] N_2(E) f(E) dE,$$

$$J_{2 \rightarrow 1} = A|T|^2 \int_{-\infty}^{\infty} N_1(E + eV) f(E + eV) N_2(E) [1 - f(E)] dE,$$

$$\therefore J = A|T|^2 \int_{-\infty}^{\infty} N_1(E + eV) N_2(E) [f(E) - f(E + eV)] dE.$$

Tunelamiento, efecto Josephson

Tratamiento cuantitativo: corriente de tunelamiento N-I-N

De la expresión anterior para la corriente total J , redefinimos la escala de energía: $E + eV \rightarrow E$

$$J = A|T|^2 \int_{-\infty}^{\infty} N_1(E + eV)N_2(E) [f(E) - f(E + eV)] dE,$$

$$\Rightarrow J = A|T|^2 \int_{-\infty}^{\infty} N_1(E)N_2(E - eV) [f(E - eV) - f(E)] dE.$$

En el caso de una **unión N-I-N**, podemos aproximar la densidad de estados a su valor al nivel de Fermi:

$$N_1(E) \approx N_1(0) \quad \& \quad N_2(E - eV) \approx N_2(0),$$

por tanto,

$$J_{NN} = A|T|^2 N_{1N}(0)N_{2N}(0) \int_{-\infty}^{\infty} [f(E - eV) - f(E)] dE,$$

$$J_{NN} = A|T|^2 N_{1N}(0)N_{2N}(0)eV = G_{nn}V,$$

en donde G_{nn} es la **conductancia de tunelaje** en una unión N-I-N

Tunelamiento, efecto Josephson

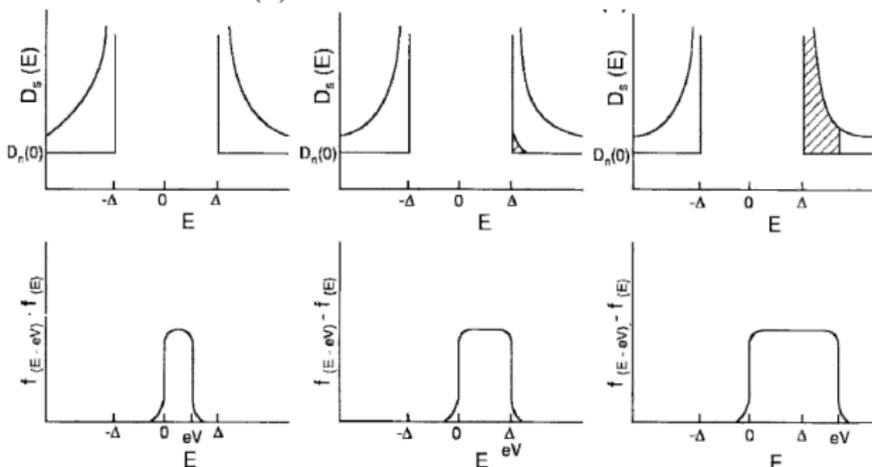
Tratamiento cuantitativo: corriente de tunelamiento N-I-S

Para una **unión N-I-S** la expresión de la corriente queda como,

$$J = A|T|^2 \int_{-\infty}^{\infty} N_{1SC}(E) N_{2N}(E - eV) [f(E - eV) - f(E)] dE,$$

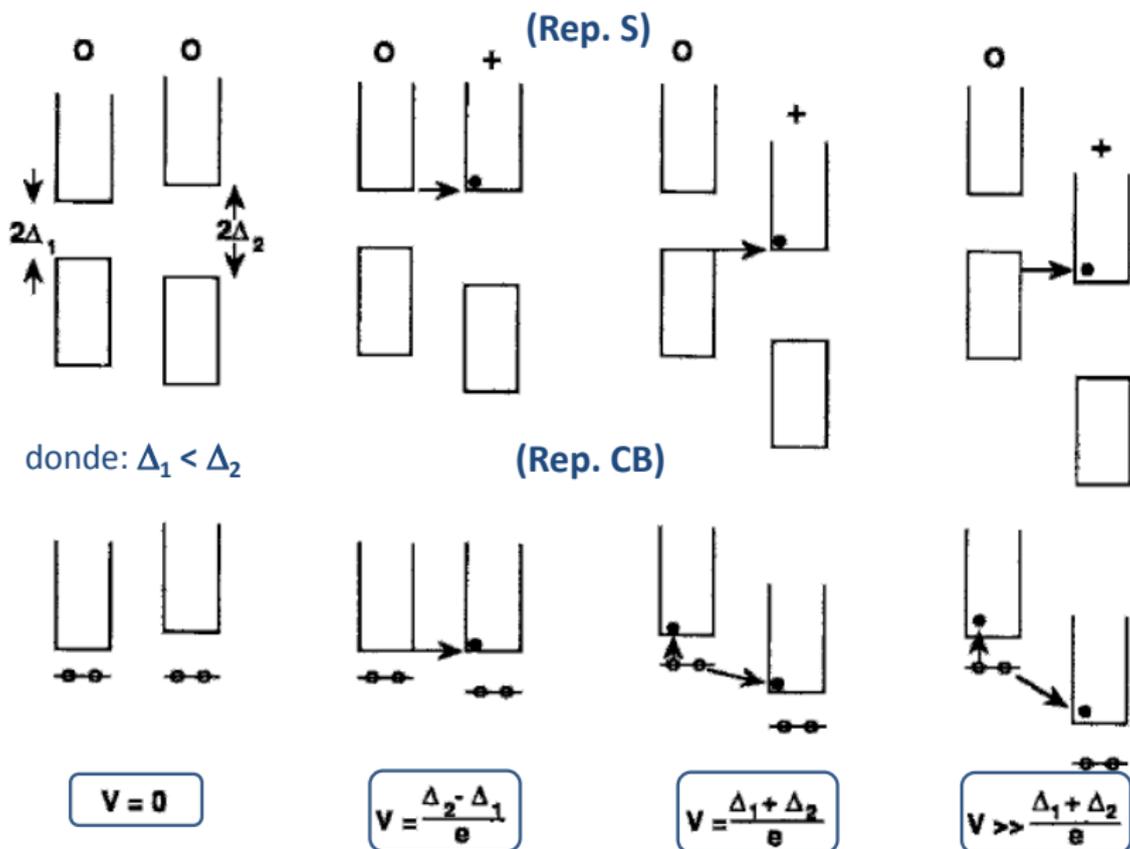
$$\Rightarrow J = A|T|^2 N_{2N}(0) \int_{-\infty}^{\infty} N_{1SC}(E) [f(E - eV) - f(E)] dE,$$

$$\therefore J = \frac{G}{e} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_{1SC}(E)}{N_{1N}(0)} [f(E - eV) - f(E)] dE.$$



Tunelamiento, efecto Josephson

Tratamiento cuantitativo: corriente de tunelamiento S-I-S



Tunelamiento, efecto Josephson

Tratamiento cuantitativo: corriente de tunelamiento S-I-S

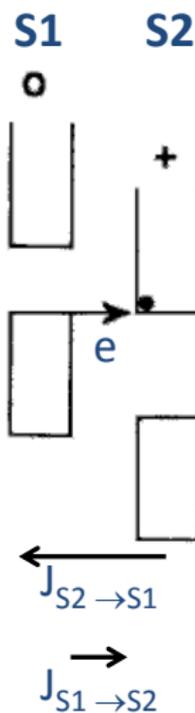
$$J_{2S \rightarrow 1S} = A|T|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \{N_{1S}(E)f(E)N_{2S}(E + eV) \times [1 - f(E + eV)]\} dE,$$

$$J_{1S \rightarrow 2S} = A|T|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \{N_{1S}(E)[1 - f(E)] \times N_{2S}(E + eV)f(E + eV)\} dE,$$

$$J_{SS} = A|T|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \{N_{1S}(E)N_{2S}(E + eV) \times [f(E) - f(E + eV)]\} dE,$$

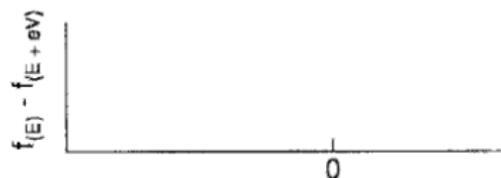
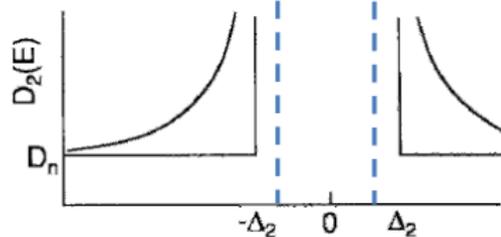
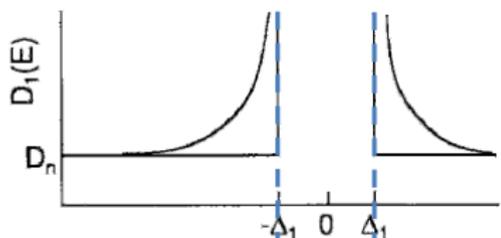
$$J_{SS} = \frac{G_{nn}}{e} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{N_{1S}(E)}{N_{1N}(0)} \frac{N_{2S}(E + eV)}{N_{2N}(0)} \times [f(E) - f(E + eV)] \right\} dE,$$

$$\forall J_{SS} = J_{2S \rightarrow 1S} - J_{1S \rightarrow 2S}.$$

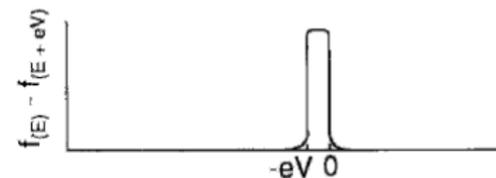
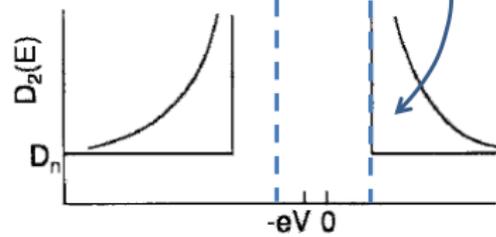
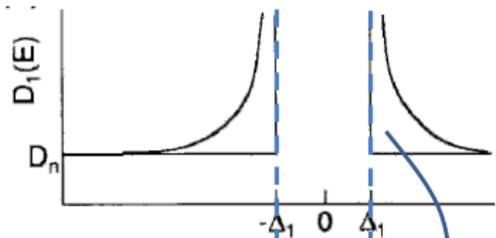


Tunelamiento, efecto Josephson

Tratamiento cuantitativo: corriente de tunelamiento S-I-S



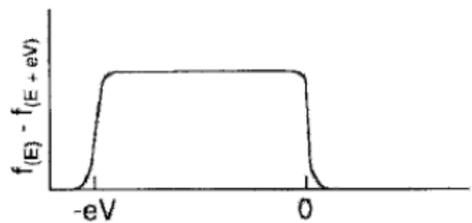
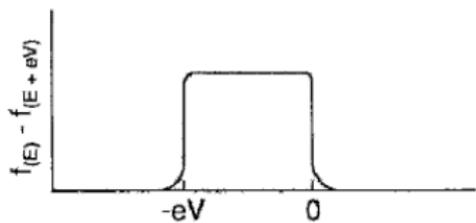
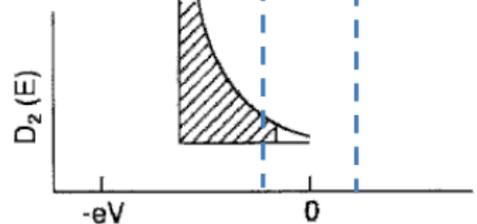
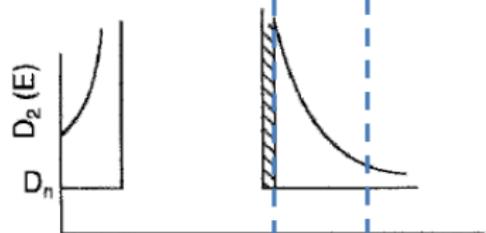
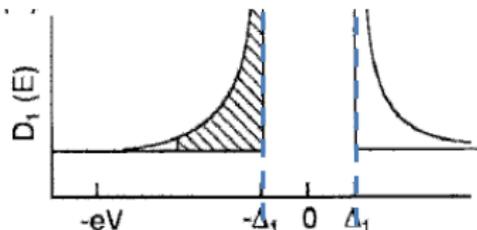
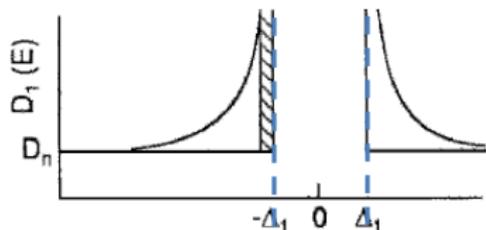
$$V = 0$$



$$V = -\frac{\Delta_2 - \Delta_1}{e}$$

Tunelamiento, efecto Josephson

Tratamiento cuantitativo: corriente de tunelamiento S-I-S

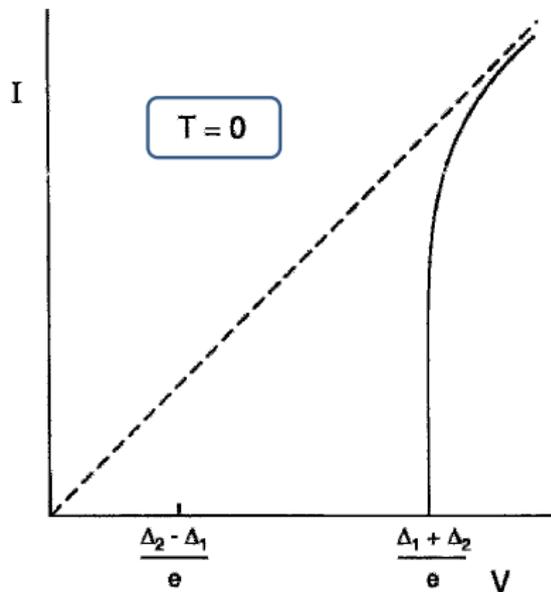
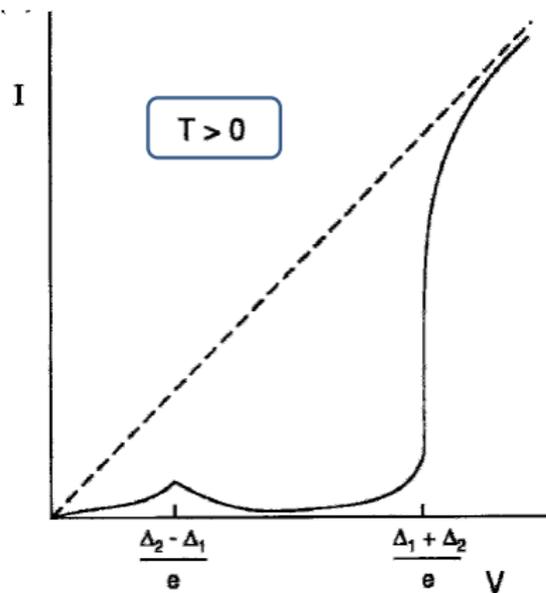


$$V \sim -\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{e}$$

$$V \ll -\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{e}$$

Tunelamiento, efecto Josephson

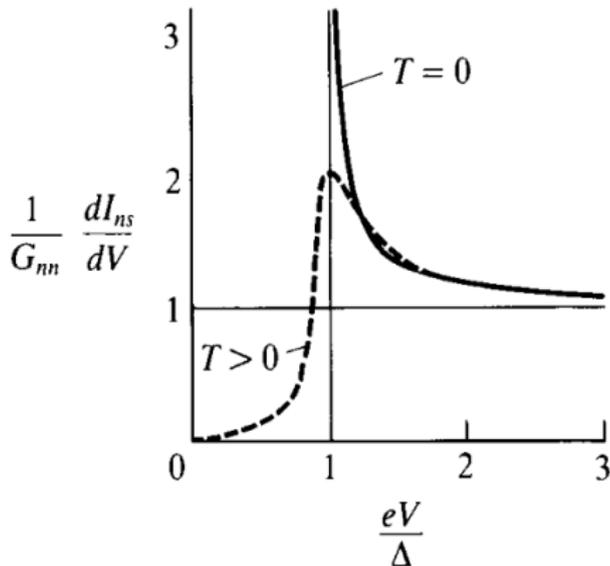
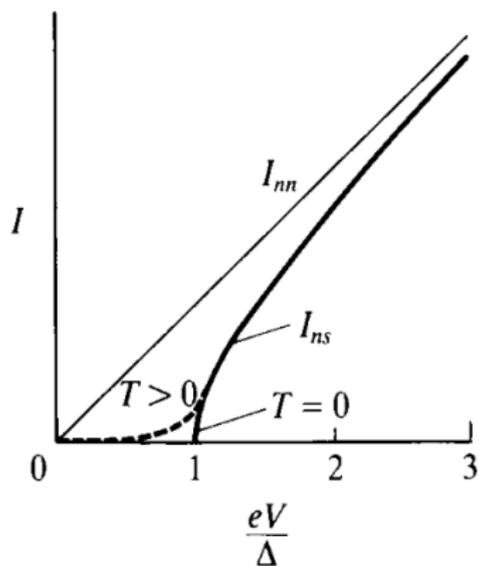
Tratamiento cuantitativo: corriente de tunelamiento S-I-S



Tunelamiento, efecto Josephson

Mediciones de tunelamiento

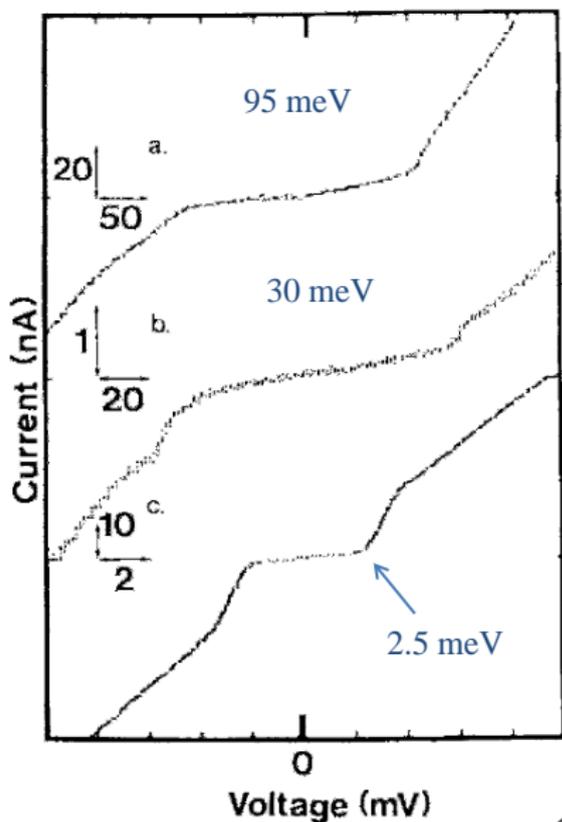
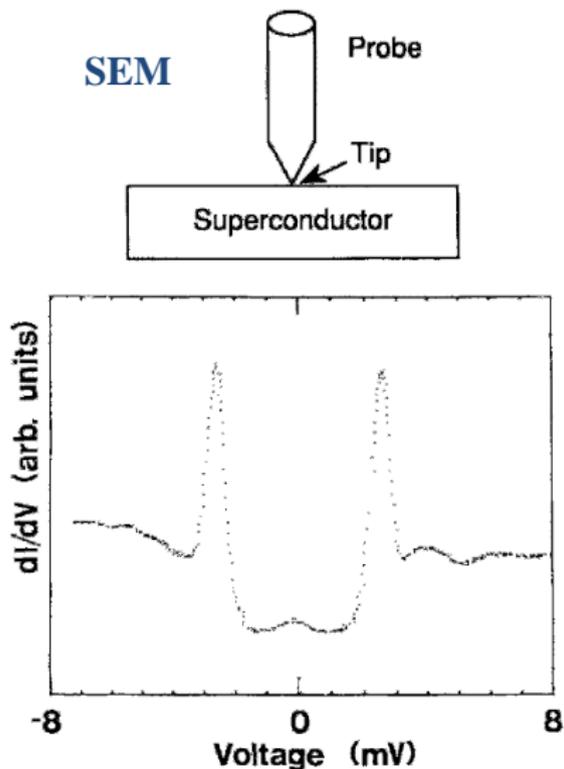
Normalmente se reportan mediciones de **corriente** vs **voltaje**, o **variaciones de corriente** vs **voltaje** aplicado,



Tunelamiento, efecto Josephson

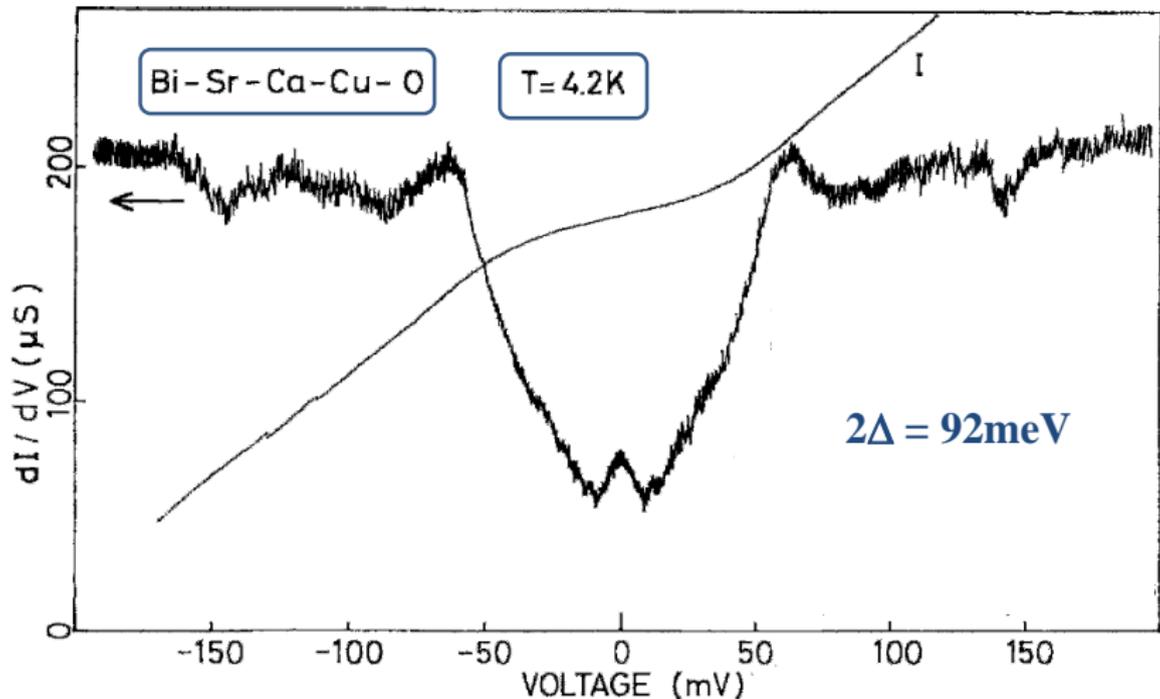
Mediciones de tunelamiento: N-I-S

$\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{6.5+x}$ @ 4.2K



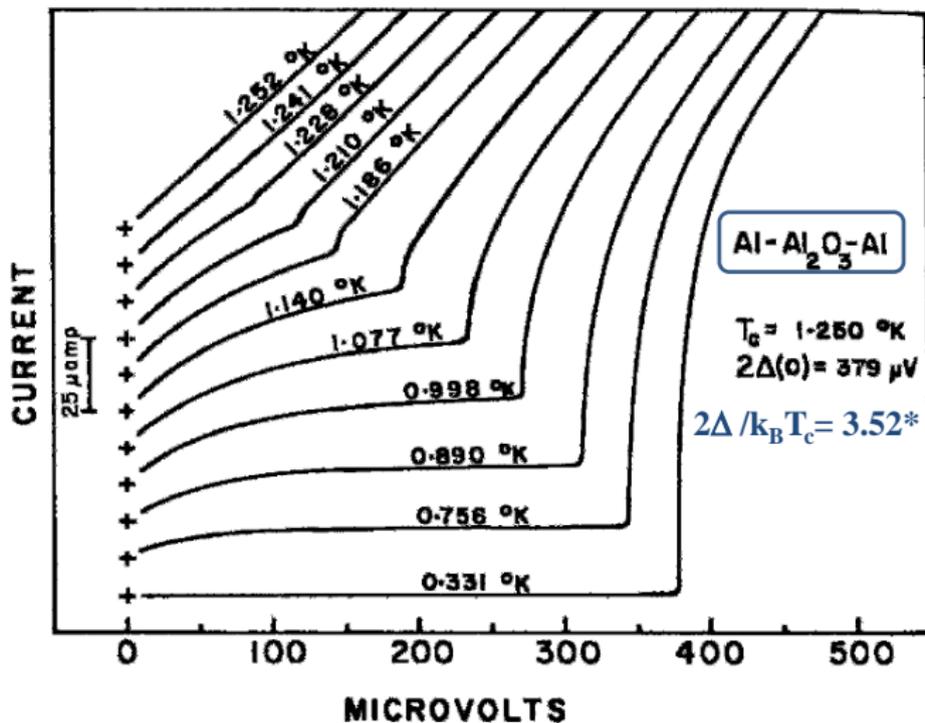
Tunelamiento, efecto Josephson

Mediciones de tunelamiento: N-I-S



Tunelamiento, efecto Josephson

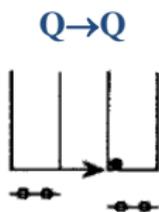
Mediciones de tunelamiento: S-I-S



*Valor de referencia BCS: $(2\Delta/K_B T_c)_{\text{BCS}} = 3.53$.

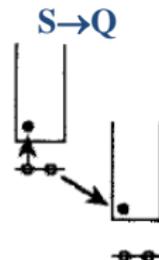
Tunelamiento, efecto Josephson

Efecto Josephson: tunelamiento S-I-S



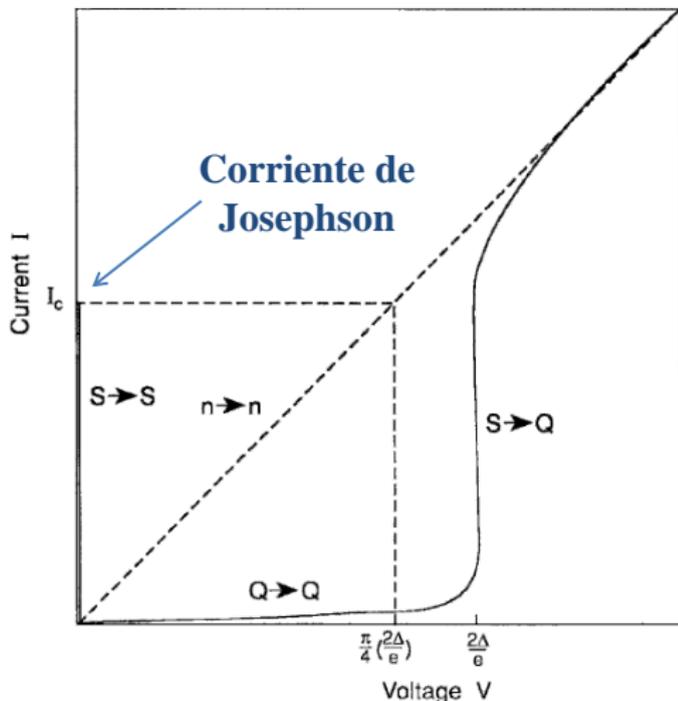
$$V = 0$$

$$V = \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{e}$$



$$V = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{e}$$

$$V \gg \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{e}$$



Tunelamiento, efecto Josephson

Efecto Josephson: modelos de tunelamiento de pares de Cooper

1. **Efecto Josephson dc**: flujo de corriente dc,

$$J = J_0 \text{Sen} \delta,$$

a través de la unión en ausencia de campo aplicado (eléctrico o magnético).

2. **Efecto Josephson ac**: flujo de una corriente sinusoidal,

$$J = J_0 \text{Sen} [\delta - 4\pi e V t / h],$$

con un voltaje aplicado V y frecuencia de oscilación $\nu = 2eV/h$.

3. **Efecto Josephson ac inverso**: el voltaje V es inducido en una unión mediante radiación incidente o por una corriente de radio-frecuencia (rf).
4. **Efectos macroscópicos de interferencia cuántica**: involucran una corriente de tunelamiento J con términos oscilatorios dependientes de un flujo de campo aplicado $\text{Sen} (\pi\phi/\phi_0)$.

Tunelamiento, efecto Josephson

Efecto Josephson dc

Si el grosor de la barrera es lo suficientemente grande, entonces podemos considerar,

$$i\hbar \frac{d\Psi_1}{dt} = E_1 \Psi_1, \quad i\hbar \frac{d\Psi_2}{dt} = E_2 \Psi_2,$$

donde Ψ_i y E_i representan la función de onda y la energía del **estado base** de los SC a cada lado de la barrera.

En el caso de que la barrera permita una **interacción** entre los SC:

$$i\hbar \frac{d\Psi_1}{dt} = E_1 \Psi_1 + K \Psi_2, \quad i\hbar \frac{d\Psi_2}{dt} = E_2 \Psi_2 + K \Psi_1,$$

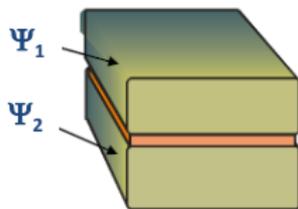
en donde $K \in \mathbb{R}$ describe el **acoplamiento** entre SC's.

Asumiendo que existe un potencial V aplicado a través del sistema,

$$\Rightarrow E_1 - E_2 = 2eV,$$

en donde el cero de energía es definido como el punto intermedio:

$$E_1 = eV, \quad E_2 = -eV.$$



Tunelamiento, efecto Josephson

Efecto Josephson dc

Sustituyendo lo anterior en las ecuaciones de onda para cada SC:

$$i\hbar \frac{d\Psi_1}{dt} = E_1\Psi_1 + K\Psi_2 \rightarrow i\hbar \frac{d\Psi_1}{dt} = eV\Psi_1 + K\Psi_2,$$

$$i\hbar \frac{d\Psi_2}{dt} = E_2\Psi_2 + K\Psi_1 \rightarrow i\hbar \frac{d\Psi_2}{dt} = -eV\Psi_2 + K\Psi_1,$$

proponiendo como soluciones:

$$\Psi_1 = |\Psi_1|e^{i\theta_1}, \quad \Psi_2 = |\Psi_2|e^{i\theta_2}, \quad \forall \phi = \theta_2 - \theta_1.$$

Sustituyendo las soluciones propuestas en las ecuaciones y relacionando los términos reales e imaginarios,

$$\hbar \frac{d|\Psi_1|^2}{dt} = 2K|\Psi_1||\Psi_2|\text{Sen}\phi, \quad \hbar \frac{d\theta_1}{dt} = -K \frac{|\Psi_2|}{|\Psi_1|} \text{Cos}\phi - eV,$$

$$\hbar \frac{d|\Psi_2|^2}{dt} = -2K|\Psi_1||\Psi_2|\text{Sen}\phi, \quad \hbar \frac{d\theta_2}{dt} = -K \frac{|\Psi_1|}{|\Psi_2|} \text{Cos}\phi + eV,$$

recordando que: $|\Psi_1|^2 = N_{1S}$ y $|\Psi_2|^2 = N_{2S}$.

Tunelamiento, efecto Josephson

Efecto Josephson dc

Además, se tiene:

$$J_1 = e \frac{dN_{1S}}{dt}, \quad J_2 = e \frac{dN_{2S}}{dt},$$

por tanto, de las ecuaciones anteriores tenemos:

$$J_1 = \frac{2Ke}{\hbar} (N_{1S}N_{2S})^{1/2} \text{Sen}\phi, \quad J_2 = -\frac{2Ke}{\hbar} (N_{1S}N_{2S})^{1/2} \text{Sen}\phi.$$

Relacionado ahora las ecuaciones de las fases,

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{2eV}{\hbar} = \frac{V}{\Phi_0} \quad \forall \quad \Phi_0 = \frac{\hbar}{2e} = \text{cuanto de flujo.}$$

Finalmente, para la **densidad de corriente**,

$$J = J_1 - J_2 = J_c \text{Sen}\phi \quad \forall \quad J_c = \frac{4Ke}{\hbar} (N_{1S}N_{2S})^{1/2},$$

de donde se obtiene la **corriente total**,

$$I = I_c \text{Sen}\phi \quad \forall \quad I = AJ.$$

Tunelamiento, efecto Josephson

Efecto Josephson dc

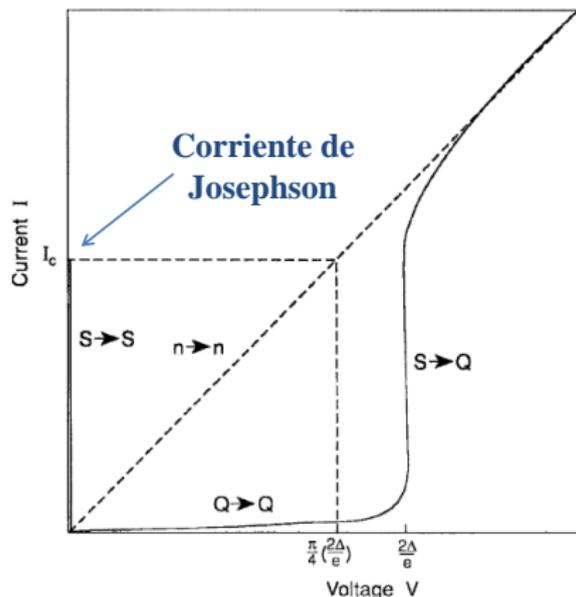
Para el caso de tunelamiento de pares de Cooper entre dos SC **idénticos**, con gaps $\Delta(T)$, la **corriente crítica** está dada por:

$$I_c(T) = \frac{\pi G_{nn}}{4} \left[\frac{2\Delta(T)}{e} \right] \text{Tanh} \frac{\Delta(T)}{2k_B T},$$

con los diferentes límites,

$$T \approx 0: \quad I_c(0) = \frac{1}{4} \pi G_{nn} \left[\frac{2\Delta(0)}{e} \right],$$

$$T \approx T_c: \quad I_c(T_c) = \frac{1}{4} \pi G_{nn} \left[\frac{\Delta^2(T_c)}{ek_B T_c} \right].$$



Por tanto, la **corriente máxima** ocurre para $T = 0$ con $\phi = \pi/2$, siendo $\pi/4 \approx 80\%$ del voltaje del gap: $V = 2\Delta/e$.

Tunelamiento, efecto Josephson

Efecto Josephson ac

Del **efecto Josephson dc** se observó que I_c se genera debido a una **diferencia de fase**.

Por tanto, analizando ésta:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{2eV}{\hbar} = \frac{V}{\Phi_0} \quad \forall \quad \Phi_0 = \frac{\hbar}{2e},$$

y resolviendo la ec. diferencial anterior tenemos,

$$\phi(t) = \phi_0 + \frac{2eV}{\hbar}t = \phi_0 + \frac{V}{\Phi_0}t,$$

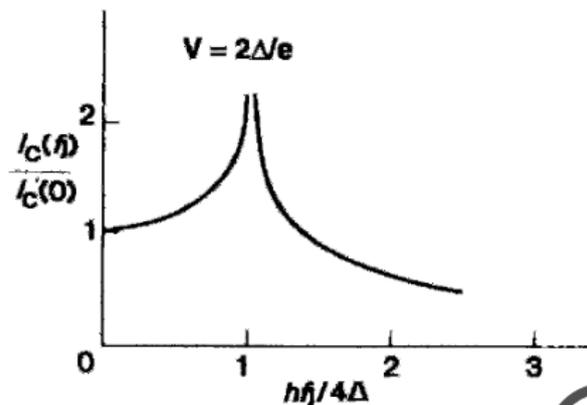
en donde se define la **frecuencia de Josephson**,

$$\nu_J = \frac{2eV}{\hbar} = \frac{V}{\Phi_0} = 483.6 \times 10^{12} V \text{ Hz.}$$

Finalmente, la **corriente total ac** vendrá dada como,

$$J = J_c \text{Sen} \phi = J_c \text{Sen} (\omega_J t + \phi_0),$$

con $\omega_J = 2\pi\nu_J$.



6. Superconductividad

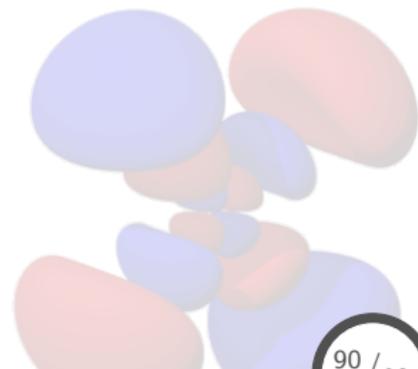
6.1 Propiedades fundamentales y descripción fenomenológica

6.2 Teoría de Ginzburg-Landau

6.3 Teoría Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS)

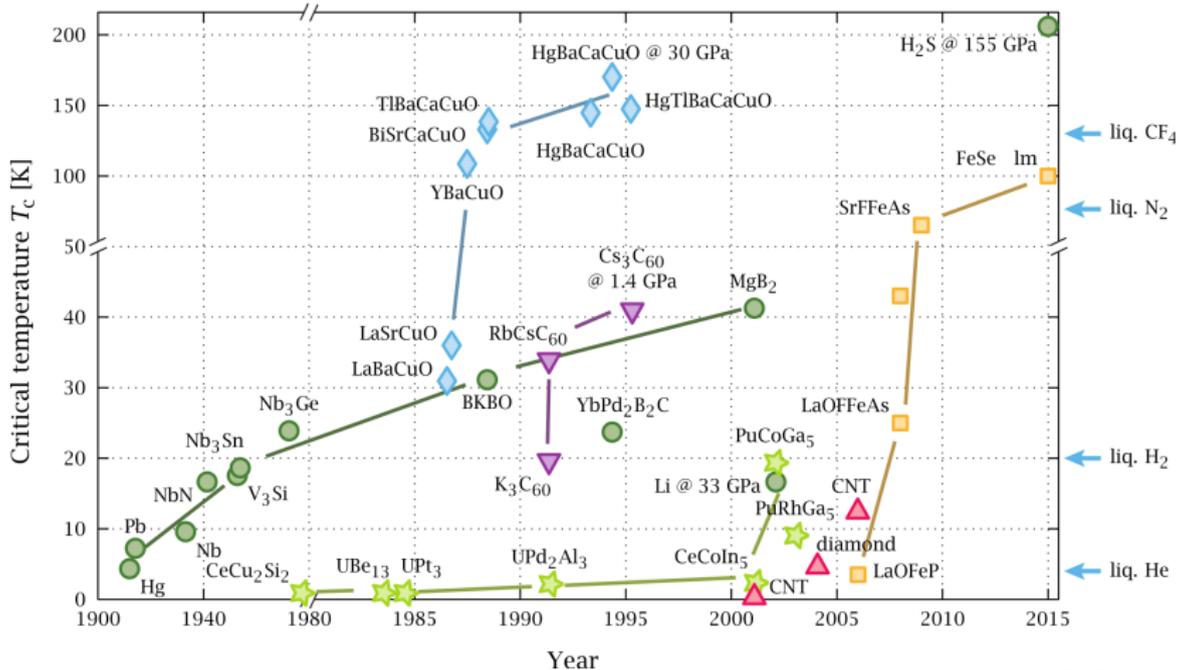
6.4 Tunelamiento, efecto Josephson

6.5 Clasificación de materiales superconductores



Clasificación de materiales superconductores

Materiales superconductores



Clasificación de materiales superconductores

Materiales superconductores

Temas de exposición

- Superconductores tipo BCS (hasta MgB_2): **Refugio**
- Superconductores de alta T_c : **Alberto**
- Pnictides & chalcogenides: **José**
- Metal hydrides: **David Chong**
- Grafeno (strain, twist): **David Mora**

Temática

- Descubrimiento.
- Mecanismo de interacción (propuesto o demostrado).
- Características mas importantes.
- Comportamiento de T_c bajo influencias externas (dopaje, presión, tensión, etc.)