

# MECÁNICA CLÁSICA

## MAESTRÍA EN CIENCIAS (FÍSICA)

Curso de Primer Semestre - Otoño 2019

Omar De la Peña-Seaman



Instituto de Física (IFUAP)

# Curso Mecánica Clásica

## Información General

### Período de clases (19 sem.)

1 Agosto – 13 Diciembre 2019

### Horario

Lunes, Miér. y Viernes: 9–11 hrs.

### Criterios de evaluación

- Tareas de cada tema: **40%**
- Exámenes: **60%**
  - Examen 1: temas 01 → 03
  - Examen 2: temas 04 → 06
  - Examen 3: temas 07 → 10

## Bibliografía

1. H. Goldstein, *Classical Mechanics*, 3rd. edition, Addison-Wesley, 2001.
2. W. Greiner, *Classical Mechanics: Systems of Particles and Hamiltonian Dynamics*, Springer-Verlag, 2003.
3. J.V. José, E.V. Saletan, *Classical Dynamics: A Contemporary Approach*, Cambridge University Press, 2012.
4. L.D. Landau, *Mechanics*, 3rd. edition, Butterworth-Heinenann, 2001.

# Curso Mecánica Clásica

## Información General

### Contenido del curso

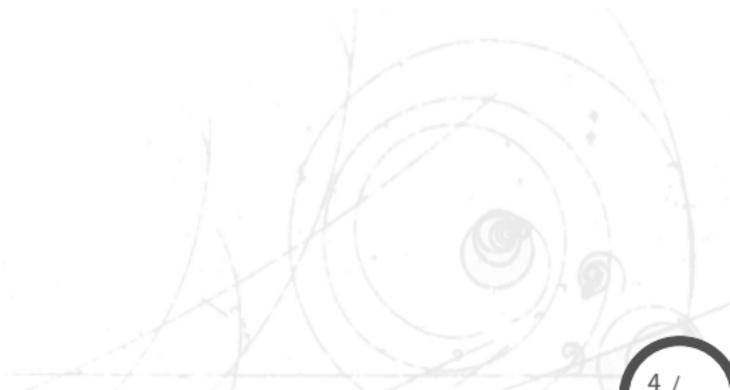
- |   |                |
|---|----------------|
| 1. Ecuaciones de Lagrange                     | (2 sem.)       |
| 2. Principios variacionales                   | (1 & 1/2 sem.) |
| 3. Fuerzas centrales                          | (2 sem.)       |
| 4. Cuerpo rígido I: cinemática                | (2 sem.)       |
| 5. Cuerpo rígido II: ecuaciones de movimiento | (2 sem.)       |
| 6. Oscilaciones                               | (2 sem.)       |
| 7. Ecuaciones de Hamilton                     | (2 sem.)       |
| 8. Transformaciones canónicas                 | (2 sem.)       |
| 9. Teoría de Hamilton-Jacobi                  | (2 sem.)       |
| 10. Teoría canónica de perturbaciones         | (1 & 1/2 sem.) |

Las sesiones de clase, tareas y exámenes estarán disponibles *on-line* al término de cada tema en el siguiente link:

[http://www.ifuap.buap.mx/~oseaman/classical\\_mechanics\\_2019.html](http://www.ifuap.buap.mx/~oseaman/classical_mechanics_2019.html)

# Contenido

## 1. Ecuaciones de Lagrange



# Contenido: Tema 01

1. Ecuaciones de Lagrange
  - 1.1 Principios elementales de la mecánica newtoniana
  - 1.2 Constricciones y coordenadas generalizadas
  - 1.3 Principio de trabajo virtual y principio de D'Alembert
  - 1.4 Ecuaciones de Lagrange y sistemas generalizados

# Contenido: Tema 01

1. Ecuaciones de Lagrange
  - 1.1 Principios elementales de la mecánica newtoniana
  - 1.2 Constricciones y coordenadas generalizadas
  - 1.3 Principio de trabajo virtual y principio de D'Alembert
  - 1.4 Ecuaciones de Lagrange y sistemas generalizados

# Principios elementales de la mecánica newtoniana

## Dinámica de una partícula: principios fundamentales

### Velocidad

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt},$$

### Aceleración

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2},$$

### Momento lineal

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v},$$

### Momento Angular

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p},$$

### Fuerza (2ª Ley de Newton)

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{p}},$$

válida para un marco de referencia **inercial**.

### Torque

$$\begin{aligned}\mathbf{N} &= \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \\ &= \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}), \\ &= \frac{d\mathbf{L}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{L}}.\end{aligned}$$

# Principios elementales de la mecánica newtoniana

## Dinámica de una partícula: principios fundamentales

El **trabajo** realizado por una fuerza externa  $\mathbf{F}$  sobre una partícula yendo del punto 1 al punto 2 es:

$$\begin{aligned}W_{12} &= \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = m \int_1^2 \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt, \\ &= \frac{m}{2} \int_1^2 \frac{d}{dt}(v^2) dt, \\ &= \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2).\end{aligned}$$

Siendo la cantidad escalar  $T = mv^2/2$  la **energía cinética** de la partícula, por tanto,

$$W_{12} = T_2 - T_1.$$

# Principios elementales de la mecánica newtoniana

## Dinámica de una partícula: principios fundamentales

Cuando el campo de fuerzas es tal que el trabajo  $W_{12}$  es el **mismo** para cualquier camino posible entre los puntos 1 y 2, entonces se dice que tal campo y sistema son **conservativos**.

Esto se traduce en,

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0,$$

lo cual implica que la **fuerza** es el **gradiente** de alguna función escalar de la posición<sup>1</sup>:

$$\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r}),$$

por tanto tenemos,

$$W_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = V_1 - V_2.$$

---

<sup>1</sup> $V$  viene siendo el **potencial** o **energía potencial**

# Principios elementales de la mecánica newtoniana

## Dinámica de una partícula: principios fundamentales

De los fundamentos anteriores podemos concluir algunos **Teoremas de Conservación**,

- **Momento lineal de una partícula:** si la fuerza total  $\mathbf{F}$  es **cero**, entonces  $\dot{\mathbf{p}} = 0$  y el momento lineal  $\mathbf{p}$  se **conserva**.
- **Momento angular de una partícula:** si el torque total  $\mathbf{N}$  es **cero**, entonces  $\dot{\mathbf{L}} = 0$  y el momento angular  $\mathbf{L}$  se **conserva**.
- **Energía de una partícula:** si las fuerzas que actúan sobre una partícula son **conservativas**, entonces la energía total de la partícula  $T + V$  se **conserva**.<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup>debido a que  $W_{12} = T_2 - T_1 = V_1 - V_2$ , sólo cuando  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r})$ .

# Principios elementales de la mecánica newtoniana

## Dinámica de un sistema partículas

Extrapolando lo visto anteriormente a un **sistema de partículas**, se puede expresar la ecuación de movimiento (2ª ley de Newton) como,

$$\sum_j \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_i^e = \dot{\mathbf{p}}_i,^3$$

sumando sobre todas las partículas tenemos en la ecuación anterior,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \mathbf{r}_i &= \sum_i \mathbf{F}_i^e + \sum_{i \neq j} \mathbf{F}_{ji}, \\ \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \mathbf{r}_i &= \sum_i \mathbf{F}_i^e, \end{aligned}$$

lo anterior debido a la **3ª ley de Newton**,

$$\sum_{i \neq j} \mathbf{F}_{ji} = 0 \quad \text{ya que} \quad \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ji} = 0.$$

---

<sup>3</sup>donde  $F_i^e$  es la fuerza externa al sistema y  $F_{ji}$  es la fuerza de interacción entre partículas  $j$  e  $i$ .

# Principios elementales de la mecánica newtoniana

## Dinámica de un sistema partículas: momento lineal

Usando la definición de **centro de masa**,  
**de masa**,

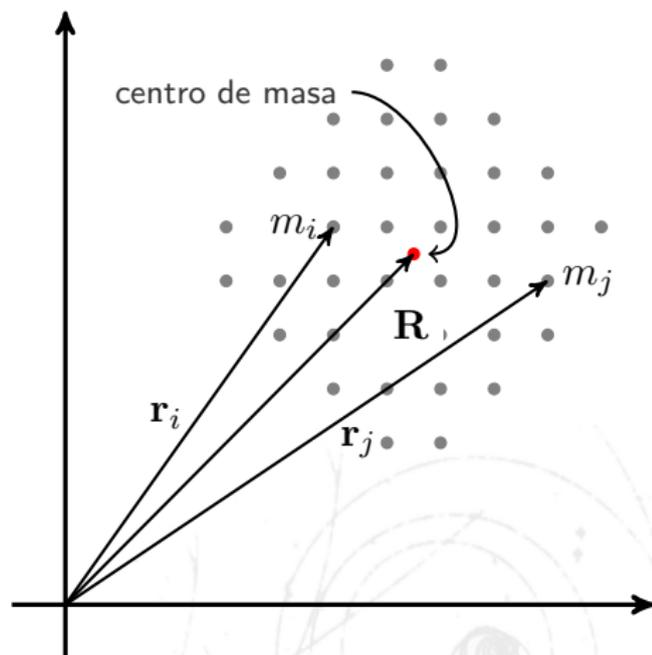
$$\mathbf{R} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{M},$$

se tiene que,

$$M \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = \sum_i \mathbf{F}_i^e \equiv \mathbf{F}^e,$$

lo cual nos lleva al **momento lineal total** del sistema,

$$\mathbf{P} = \sum m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = M \frac{d\mathbf{R}}{dt}.$$



# Principios elementales de la mecánica newtoniana

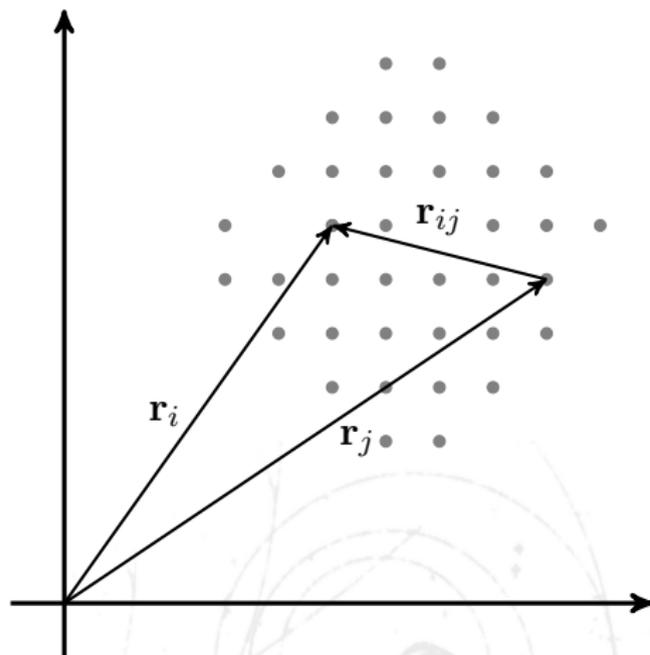
## Dinámica de un sistema partículas: momento angular

Usando la expresión de  $\dot{\mathbf{p}}_i$ , se tiene que el **momento angular total** del sistema se relaciona como sigue:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{L}} &= \sum_i \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i) = \sum_i (\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i), \\ &= \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^e + \sum_{i \neq j} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji}, \\ &= \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^e + \sum_{i \neq j} \mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{F}_{ji}, \\ \Rightarrow \dot{\mathbf{L}} &= \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}^e,\end{aligned}$$

en donde se ha considerado la suma de pares como:

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ij} = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ji}.$$



# Principios elementales de la mecánica newtoniana

## Dinámica de un sistema partículas: momento angular

Para el momento angular centrado en el origen  $O$  tenemos,

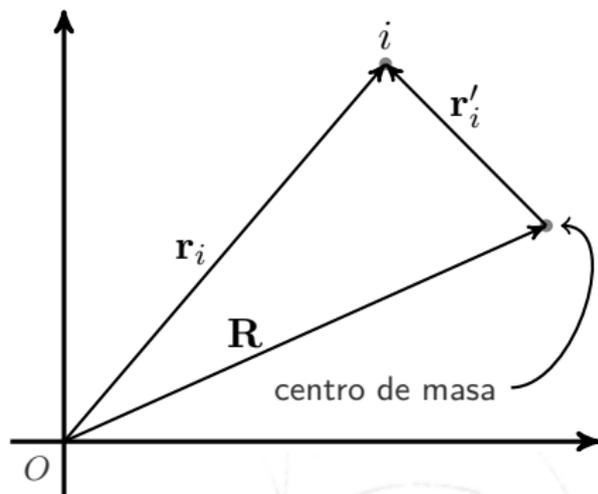
$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i,$$

pero si lo referimos al **centro de masa**,

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i + \mathbf{R}, \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i + \mathbf{v},$$

con lo cual se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_i \mathbf{R} \times m_i \mathbf{v} + \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i + \left( \sum_i m_i \mathbf{r}'_i \right) \times \mathbf{v} + \mathbf{R} \times \frac{d}{dt} \sum_i m_i \mathbf{r}'_i, \\ \Rightarrow \mathbf{L} &= \mathbf{R} \times M \mathbf{v} + \sum_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{p}'_i \quad \forall \quad \sum_i m_i \mathbf{r}'_i = 0. \end{aligned}$$



# Principios elementales de la mecánica newtoniana

## Dinámica de un sistema partículas: energía

Calculando el **trabajo** realizado por todas las fuerzas en un sistema en movimiento desde un punto 1 a un punto 2:

$$W_{12} = \sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{s}_i = \sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i^e \cdot d\mathbf{s}_i + \sum_{i \neq j} \int_1^2 \mathbf{F}_{ji} \cdot d\mathbf{s}_i.$$

Considerando inicialmente el término central de la expresión anterior,

$$\sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{s}_i = \sum_i \int_1^2 m_i \dot{\mathbf{v}}_i \cdot \mathbf{v}_i dt = \sum_i \int_1^2 d\left(\frac{1}{2} m_i v_i^2\right),$$

por tanto, el trabajo total viene dado como:

$$W_{12} = T_2 - T_1 \quad \forall \quad T = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2,$$

en donde  $T$  es la **energía cinética** total del sistema.

# Principios elementales de la mecánica newtoniana

## Dinámica de un sistema partículas: energía

Transf. la **energía cinética** al marco de referencia del centro de masas:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{v}_i^2, \\ \Rightarrow T &= \frac{1}{2} \sum_i m_i (\mathbf{v} + \mathbf{v}'_i) \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{v}'_i) \quad \forall \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{v} + \mathbf{v}'_i, \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i v^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2 + \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} \left( \sum_i m_i \mathbf{r}'_i \right), \\ &= \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2, \quad 4 \end{aligned}$$

la cual consiste de dos partes:

- Una como si toda la masa estuviera **concentrada** en el CM,
- Otra como resultado del mov. de las partículas **alrededor** del CM.

---

<sup>4</sup>de igual manera que en caso de  $L$ , tenemos que  $\sum_i m_i \mathbf{r}'_i = 0$ .

# Principios elementales de la mecánica newtoniana

## Dinámica de un sistema partículas: energía

Considerando ahora la parte derecha de la ecuación de trabajo expuesta anteriormente,

$$W_{12} = \sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{s}_i = \sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i^e \cdot d\mathbf{s}_i + \sum_{i \neq j} \int_1^2 \mathbf{F}_{ji} \cdot d\mathbf{s}_i,$$

para el caso de que tengamos **fuerzas conservativas**<sup>5</sup>

$$\sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i^e \cdot d\mathbf{s}_i = - \sum_i \int_1^2 \nabla_i V_i \cdot d\mathbf{s}_i = - \sum_i V_i \Big|_1^2.$$

Para las **fuerzas internas**, consideremos la interacción mutua entre las partículas  $i$  y  $j$ ,

$$\mathbf{F}_{ji} = -\nabla_i V_{ji} = -\nabla_{ij} V_{ij} = +\nabla_j V_{ij} = -\mathbf{F}_{ij} \quad \forall \quad V_{ij} = V_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|).$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbf{F}_{ji} \cdot d\mathbf{s}_i &= \mathbf{F}_{ji} \cdot d\mathbf{s}_i + \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{s}_j = \mathbf{F}_{ji} \cdot (d\mathbf{s}_i - d\mathbf{s}_j), \\ &= \mathbf{F}_{ji} \cdot (d\mathbf{r}_i - d\mathbf{r}_j) = \mathbf{F}_{ji} \cdot d\mathbf{r}_{ij} = -\nabla_{ij} V_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij}. \end{aligned}$$

<sup>5</sup>del tipo  $F = -\nabla V \quad \forall \quad V = V(\mathbf{r})$ .

# Principios elementales de la mecánica newtoniana

## Dinámica de un sistema partículas: energía

Por tanto, el **trabajo** de las fuerzas internas viene dado como,

$$\sum_{i \neq j} \int_1^2 \mathbf{F}_{ji} \cdot d\mathbf{s}_i = -\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \int_1^2 \nabla_{ij} V_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij} = -\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V_{ij} \Big|_1^2 .^6$$

Definiendo por tanto un **potencial total** del sistema,

$$V = \sum_i V_i + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V_{ij}.$$

El término del potencial **interno** no tiene porque ser constante, ya que puede variar conforme el sistema evoluciona en el tiempo. Solo para casos particulares la energía o potencial interna es constante (ejem: **cuerpos rígidos**).

---

<sup>6</sup>el  $1/2$  aparece porque hemos dividido por pares la suma, contando doblemente cada término, primero en la suma de  $i$  y luego en la de  $j$ .

# Contenido: Tema 01

## 1. Ecuaciones de Lagrange

1.1 Principios elementales de la mecánica newtoniana

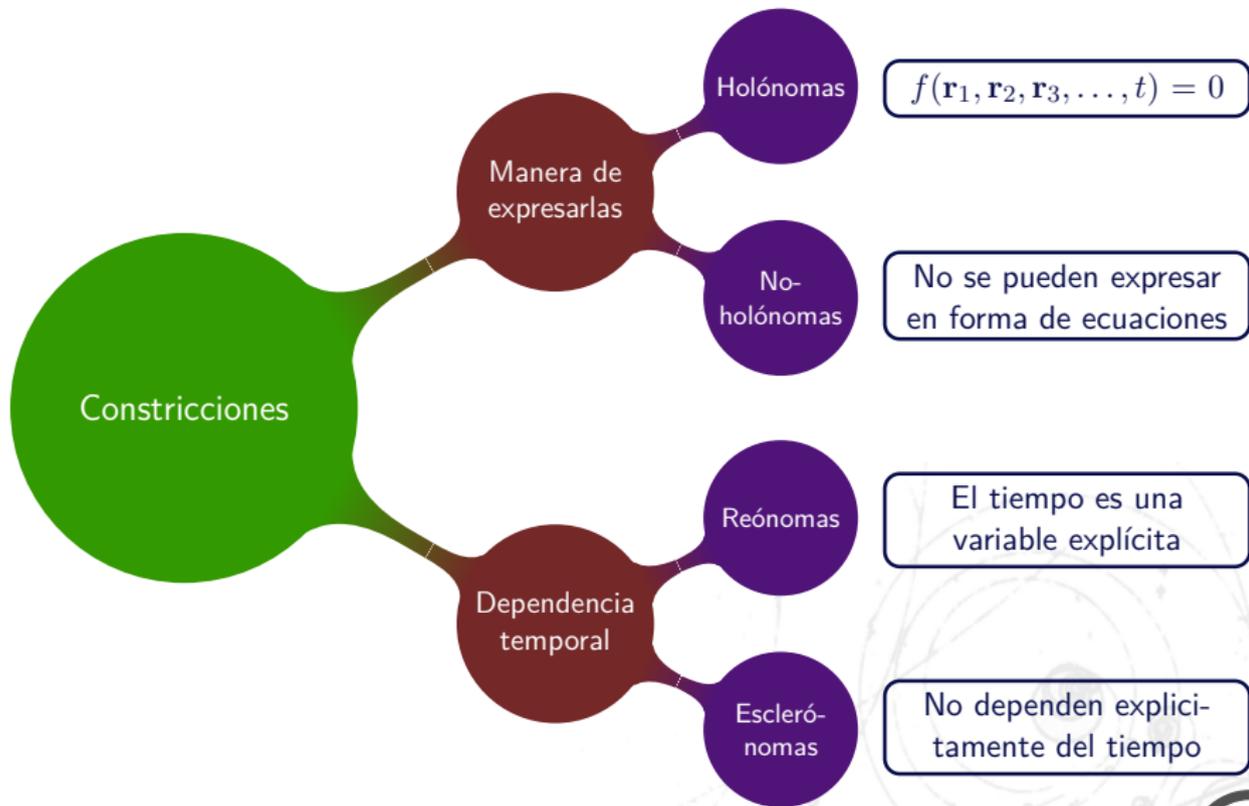
1.2 Constricciones y coordenadas generalizadas

1.3 Principio de trabajo virtual y principio de D'Alembert

1.4 Ecuaciones de Lagrange y sistemas generalizados

# Constricciones y coordenadas generalizadas

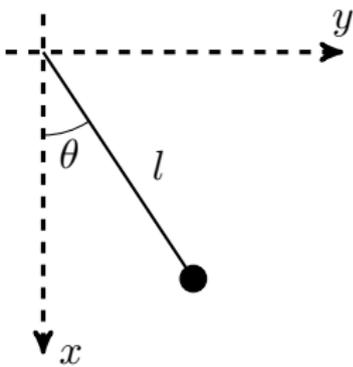
## Clasificación de constricciones



# Constricciones y coordenadas generalizadas

## Ejemplos de constricciones

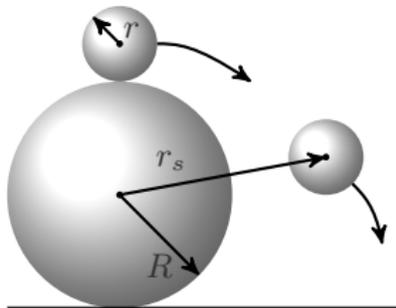
### Péndulo simple



$$x^2 + y^2 - l^2 = 0$$

- Holónoma
- Esclerónoma

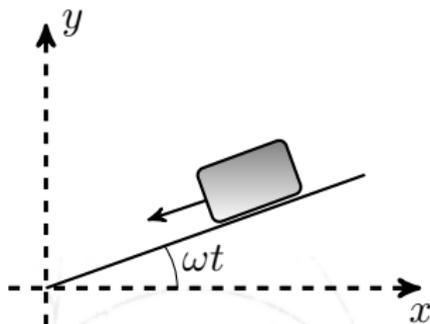
### Esfera deslizante



$$r_s \geq R + r$$

- No-holónoma
- Esclerónoma

### Cuerpo en plano inclinado



$$\frac{y}{x} - \text{Tg}(\omega t) = 0$$

- Holónoma
- Reónoma

# Constricciones y coordenadas generalizadas

## Coordenadas generalizadas

En el caso más general, tenemos un sistema que consta de:

$N$  partículas,  $n = 3N$  grados de libertad,  $k$  const. holonómicas.<sup>7</sup>

### Coordenadas generalizadas

Conjunto de coordenadas independientes que especifican completamente la configuración del sistema:  $\{q_1, q_2, \dots, q_{n-k}\}$ .

El sistema de coordenadas original (cartesiano, por ejemplo) puede ser expresado en términos de las **coordenadas generalizadas** como,

$$x_1 = x_1(q_1, q_2, \dots, q_{n-k}, t),$$

$$x_2 = x_2(q_1, q_2, \dots, q_{n-k}, t),$$

$$\vdots$$

$$x_n = x_n(q_1, q_2, \dots, q_{n-k}, t).$$

---

<sup>7</sup>del tipo  $f(x_1, x_2, x_3, \dots, t) = 0$ .

# Constricciones y coordenadas generalizadas

## Coordenadas generalizadas

Suponiendo que todas las **coordenadas generalizadas** y el tiempo cambian ligeramente<sup>8</sup> por las cantidades  $\{dq_i\}$  y  $dt$ , entonces el cambio inducido en (por ejemplo)  $x_1$  será:

$$dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x_1}{\partial q_2} dq_2 + \dots + \frac{\partial x_1}{\partial q_{n-k}} dq_{n-k} + \frac{\partial x_1}{\partial t} dt,$$

tenemos por tanto que el **desplazamiento general** para la coordenada  $x_i = x_i\{q_\alpha, t\}$  esta dado por,

$$dx_i = \sum_{\alpha=1}^{n-k} \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \frac{\partial x_i}{\partial t} dt \quad \forall \quad i = 1, \dots, n$$

así como la **velocidad**  $\dot{x}_i = \dot{x}_i\{q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t\}$ :

$$\frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i = \sum_{\alpha=1}^{n-k} \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} \frac{dq_\alpha}{dt} + \frac{\partial x_i}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{n-k} \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial x_i}{\partial t}.$$

<sup>8</sup>Por ejemplo, representar el cambio dinámico en la configuración del sistema cuando  $t$  se incrementa a  $t + dt$ .

# Constricciones y coordenadas generalizadas

## Coordenadas generalizadas

### Desplazamientos virtuales

$\delta x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) está definido como un desplazamiento **instantáneo e infinitesimal** de las coordenadas  $x_1, \dots, x_n$  consistente con las restricciones y las fuerzas de restricción que ocurren en un instante dado ( $\Delta t = 0$ ).

Imaginemos el sistema congelado en un instante de tiempo, entonces efectuamos desplazamientos **infinitesimales**  $\delta x_i$  permitidos por las restricciones.

Por tanto, el **desplazamiento virtual** estará dado por,

$$\delta x_i = \sum_{\alpha=1}^{n-k} \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha \quad \forall \quad i = 1, \dots, n^9$$

---

<sup>9</sup>La única diferencia entre  $\delta x_i$  y  $dx_i$ , es que en la primera no aparece el tiempo debido a que los desplazamientos virtuales son **instantáneos**.

# Contenido: Tema 01

## 1. Ecuaciones de Lagrange

1.1 Principios elementales de la mecánica newtoniana

1.2 Constricciones y coordenadas generalizadas

1.3 Principio de trabajo virtual y principio de D'Alembert

1.4 Ecuaciones de Lagrange y sistemas generalizados

# Principio de trabajo virtual y principio de D'Alembert

## Principio de trabajo virtual

Tenemos que en un **sistema en equilibrio** la fuerza total en cada partícula se anula,  $\mathbf{F}_i = 0$ . Por tanto, multiplicando por un **desplazamiento virtual**<sup>10</sup>, y sumando para todas las partículas:

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0,$$
$$\sum_i \mathbf{F}_i^a \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_i \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad \forall \quad \mathbf{f}_i = \text{fuerza de constricción.}$$

En general, el **trabajo virtual** de las fuerzas de constricción es **cero**, ya que el desplazamiento es perpendicular a estas fuerzas, por tanto,

$$\sum_i \mathbf{F}_i^a \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad \forall \quad \mathbf{F}_i^a \neq 0,$$

lo cual representa el **principio de trabajo virtual**, y en donde los  $\delta \mathbf{r}_i$  **no son independientes**, debido a las constricciones.

<sup>10</sup>Un desp. virtual no genera cambios en las fuerzas aplicadas y de constricción

# Principio de trabajo virtual y principio de D'Alembert

## Principio de D'Alembert

La ecuación de movimiento es,

$$\mathbf{F}_i = \dot{\mathbf{p}}_i \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i = 0,$$

por tanto, el sistema estará en equilibrio.

Aplicando ahora el producto con un **desplazamiento virtual**,<sup>11</sup>

$$\begin{aligned} \sum_i (\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i &= 0, \\ \Rightarrow \sum_i (\mathbf{F}_i^a - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_i \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i &= 0. \end{aligned}$$

Centrándonos en sistemas donde el trabajo virtual de las fuerzas de restricción es cero, se llega al **principio de D'Alembert**,

$$\sum_i (\mathbf{F}_i^a - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0.$$

---

<sup>11</sup>de la misma manera que en caso del principio de trabajo virtual.

# Contenido: Tema 01

## 1. Ecuaciones de Lagrange

1.1 Principios elementales de la mecánica newtoniana

1.2 Constricciones y coordenadas generalizadas

1.3 Principio de trabajo virtual y principio de D'Alembert

1.4 Ecuaciones de Lagrange y sistemas generalizados

# Ecuaciones de Lagrange y sistemas generalizados

Principio de D'Alembert en coordenadas generalizadas

El **principio de D'Alembert**,

$$\sum_i (\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0,$$

aún no nos puede dar información del movimiento del sistema debido a que los  $\delta \mathbf{r}_i$  están **acoplados**, por lo que los coeficientes no se anulan término a término.

Para desacoplar los  $\delta \mathbf{r}_i$  es necesario pasar la descripción del problema a un sistema de **coordenadas generalizadas**,

$$\delta x_i = \sum_{\alpha=1}^{n-k} \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha \quad \Rightarrow \quad \delta \mathbf{r}_i = \sum_{\alpha=1}^{N-k} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha \quad \forall \quad n = 3N.$$

Expresando en términos de las **coord. generalizadas** primeramente el **trabajo virtual** de  $\mathbf{F}_i$ ,

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i,\alpha} \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha = \sum_\alpha Q_\alpha \delta q_\alpha.$$

# Ecuaciones de Lagrange y sistemas generalizados

## Principio de D'Alembert en coordenadas generalizadas

En la expresión anterior  $Q_\alpha$  se le conoce como la **fuerza generalizada**,

$$Q_\alpha = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha}.$$

Para el segundo término del principio de D'Alembert tenemos,

$$\sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i,\alpha} \left( m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) \delta q_\alpha,$$

analizando el término en paréntesis,

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} = \sum_i m_i \frac{d\dot{\mathbf{r}}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha},$$

pero,

$$\frac{d}{dt} \left( \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) = \frac{d\dot{\mathbf{r}}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} + \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \right),$$

# Ecuaciones de Lagrange y sistemas generalizados

Principio de D'Alembert en coordenadas generalizadas

entonces,

$$\frac{d\dot{\mathbf{r}}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt} \left( \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) - \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \right).$$

Para eliminar los términos de derivadas de  $\delta \mathbf{r}_i$  de la expresión anterior, recordemos,

$$\begin{aligned} d\mathbf{r}_i &= \sum_{\alpha} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} dt, \\ \Rightarrow \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} &= \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{\alpha} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}. \end{aligned}$$

Por otro lado, aprovechamos que los operadores de derivada conmutan,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) = \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \left( \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right) = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_\alpha}.$$

# Ecuaciones de Lagrange y sistemas generalizados

## Principio de D'Alembert en coordenadas generalizadas

Además, como  $\mathbf{r}_i$  es función sólomente de  $q_\alpha$  y  $t$ , entonces se tiene que  $\dot{\mathbf{r}}_i$  es una función lineal de las **velocidades generalizadas**  $\dot{q}_\alpha$ ,

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{r}}_i(q_1, q_2, \dots, q_{N-k}; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_{N-k}; t) \quad \forall \quad i = 1, 2, 3, \dots, N,$$
$$\Rightarrow \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} \left[ \sum_{\alpha} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right] = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha}.$$

Sustituyendo los dos resultados anteriores en la expresión original,

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{\mathbf{r}}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} &= \frac{d}{dt} \left( \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) - \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \right), \\ &= \frac{d}{dt} \left( \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_\alpha}. \end{aligned}$$

# Ecuaciones de Lagrange y sistemas generalizados

## Principio de D'Alembert en coordenadas generalizadas

Introduciendo ahora el resultado anterior en la expresión del segundo término del principio de D'Alembert,

$$\begin{aligned}\sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i &= \sum_{\alpha} \left[ \sum_i m_i \frac{d\dot{\mathbf{r}}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_{\alpha}} \right] \delta q_{\alpha}, \\ &= \sum_{\alpha} \left[ \sum_i \frac{d}{dt} \left( m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \right) - \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_{\alpha}} \right] \delta q_{\alpha}, \\ &= \sum_{\alpha} \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \left( \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_{\alpha}} \left( \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 \right) \right\} \delta q_{\alpha}, \\ &= \sum_{\alpha} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_{\alpha}} \right] \delta q_{\alpha},\end{aligned}$$

en donde se ha identificado al término de la **energía cinética** total del sistema,

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2.$$

# Ecuaciones de Lagrange y sistemas generalizados

## Principio de D'Alembert en coordenadas generalizadas

Con la ecuación anterior y la del trabajo virtual obtenida se puede expresar el principio de D'Alembert en coord. generalizadas,

$$\sum_i (\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_i (\mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i - \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i) = 0,$$

por tanto:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} Q_{\alpha} \delta q_{\alpha} - \sum_{\alpha} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_{\alpha}} \right] \delta q_{\alpha} &= 0, \\ \Rightarrow \sum_{\alpha} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_{\alpha}} - Q_{\alpha} \right] \delta q_{\alpha} &= 0. \end{aligned}$$

Debido a que las variaciones de las coord. generalizadas son **independientes**, entonces cada término de la expresión anterior se debe anular uno a uno:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_{\alpha}} = Q_{\alpha} \quad \forall \quad \alpha = 1, 2, \dots, n - k.$$

# Ecuaciones de Lagrange y sistemas generalizados

## Ecuaciones de Lagrange

Para el caso de que las fuerzas sean derivables de un potencial escalar  $V^{12}$  tenemos,

$$\mathbf{F}_i = -\nabla_i V,$$

por lo que las fuerzas generalizadas pueden ser expresadas como,

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} = - \sum_i \nabla_i V \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha}, \\ &= - \sum_{ij} \frac{\partial V}{\partial x_{ij}} \frac{\partial x_{ij}}{\partial q_\alpha} = - \frac{\partial V}{\partial q_\alpha}. \end{aligned}$$

Además, como consideramos que  $V$  es **conservativo**,<sup>13</sup> por tanto,

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_\alpha} = 0 \quad \& \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) = 0.$$

---

<sup>12</sup>lo cual se considera como un sistema de fuerzas conservativas.

<sup>13</sup>no depende de  $\dot{q}_\alpha$  ni de  $t$ .

# Ecuaciones de Lagrange y sistemas generalizados

## Ecuaciones de Lagrange

Sustituyendo las expresiones anteriores en la ecuación obtenida del principio de D'Alembert:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha,$$
$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial(T - V)}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial(T - V)}{\partial q_\alpha} = 0,$$

definiendo una nueva función, el **Lagrangiano**  $L$ , como

$$L = T - V,$$

la ecuación obtenida puede ser expresada como:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \quad \forall \quad \alpha = 1, 2, \dots, n - k.$$

Al set de ecuaciones anteriores se les conoce como las **ecuaciones de Lagrange**.

# Ecuaciones de Lagrange y sistemas generalizados

## Ecuaciones de Lagrange: fuerzas no-conservativas

Si en el sistema se tienen:

- **Fuerzas no-conservativas**: provenientes de potenciales dependientes de la velocidad,<sup>14</sup>
- Combinación de **fuerzas conservativas** y **no-conservativas**,<sup>15</sup>

las ecuaciones de Lagrange aún pueden ser expresadas de manera estándar con ciertas consideraciones,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = Q'_\alpha,$$

- $L$  contiene el potencial de las fuerzas **conservativas**,
- $Q'_\alpha$  representa las fuerzas que **no** son obtenidas de un potencial y dependen de la velocidad de las partículas del sistema.

---

<sup>14</sup>como por ejemplo las fuerzas electromagnéticas de una partícula en movimiento:  
 $\mathbf{F} = q[\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})].$

<sup>15</sup>cuando se tienen fuerzas de fricción:  $F_{fx} = -k_x v_x$