Contenido

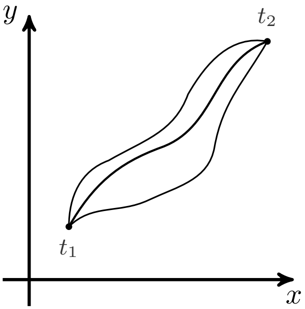
Contenido: Tema 02

Contenido: Tema 02

Cálculo de variaciones

Definiciones

- **Principio diferencial**: Se considera un estado instantáneo del sistema y pequeños desplazamientos virtuales alrededor del mismo.[1]
- **Principio integral**: considera el movimiento completo del sistema entre los tiempos t_1 y t_2 y pequeñas variaciones de su movimiento con respecto al original.



Espacio configuracional: hiperespacio cartesiano en donde las q's forman un conjunto de ejes coordenados de dimensión n.

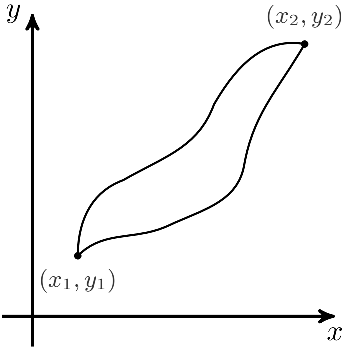
Recorrido del movimiento: curva trazada por el sistema en el espacio configuracional conforme evoluciona el tiempo.

[1] principio de D'Alembert.

Cálculo de variaciones

Fundamentos

Consideremos el siguiente problema básico,



x: variable independiente definida en el intervalo $[x_1, x_2]$.
$y(x)$: función de x definida en el mismo intervalo y diferenciable.

Tenemos la relación,

$$f = f[y(x), y'(x), x],$$

definida en una trayectoria $y(x)$ en el intervalo $[x_1, x_2]$ y en donde:

$$y'(x) \equiv \frac{dy}{dx}.$$

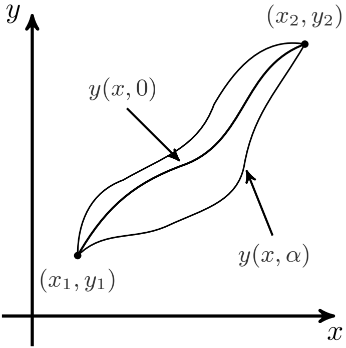
El objetivo fundamental es determinar $y(x)$ tal que:

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y'(x), x)dx$$

sea un **extremal**.

Cálculo de variaciones

Fundamentos



Sea $y(x, 0)$ la trayectoria **solución** y $y(x, \alpha)$ alguna trayectoria **vecina**, tal que,

$$y(x, \alpha) = y(x, 0) + \alpha\eta(x),$$

en donde α es una cantidad infinitesimal y $\eta(x)$ satisface,

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0.$$

Para tal familia de curvas, J se puede expresar como,

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f[y(x, \alpha), y'(x, \alpha), x]dx,$$

con la condición de **extremal** dada como,

$$\left.\frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = 0,$$

para todas las $\eta(x)$ posibles.

Cálculo de variaciones

Ecuación de Euler-Lagrange

Para determinar el resultado de la condición anterior, calculamos la diferencial de la integral $J(\alpha)$,

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f[y(x,\alpha), y'(x,\alpha), x]dx,$$
$$\Rightarrow \quad \frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \alpha}\right] dx,$$

pero recordemos la definición de $y(x,\alpha)$,

$$y(x,\alpha) = y(x,0) + \alpha\eta(x) \;\Rightarrow\; \frac{\partial y}{\partial \alpha} = \eta,$$
$$y'(x,\alpha) = y'(x,0) + \alpha\eta'(x) \;\Rightarrow\; \frac{\partial y'}{\partial \alpha} = \eta' = \frac{\partial \eta}{\partial x},$$

por tanto, sustituyendo:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right] dx.$$

De la expresión anterior, integrando el segundo término por partes,

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial \eta}{\partial x} dx = \left. \frac{\partial f}{\partial y'} \eta(x) \right|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta(x) dx,$$ [2]

debido a la condición de que la familia de curvas (representada por el parámetro α) debe pasar por (x_1, y_1),(x_2, y_2), entonces $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, por tanto,

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right] \eta(x) dx.$$

Con lo cual, la condición de **extremal** estará dada como,

$$\left. \frac{\partial J}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} dx \eta(x) \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right]_{\alpha=0} = 0.$$

[2] $\int u dv = uv - \int v du$

Cálculo de variaciones

Ecuación de Euler-Lagrange

Como $\eta(x)$ es una función arbitraria, entonces $J(\alpha)$ es un extremal si,

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0,$$

lo que se conoce como **ecuación de Euler-Lagrange**.

Además, tenemos que la cantidad

$$d\alpha \frac{\partial y}{\partial \alpha} \equiv \delta y,$$

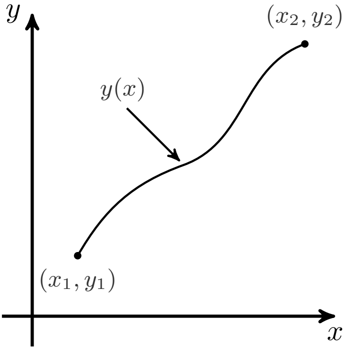
representa el corrimiento infinitesimal del recorrido alterno con respecto al recorrido correcto $y(x)$ en el punto x, por tanto representa un **desplazamiento virtual**.

Esta notación se utiliza también para la condición de extremal,

$$d\alpha \frac{\partial J}{\partial \alpha} \equiv \delta J.$$

Cálculo de variaciones

Ecuación de Euler-Lagrange: distancia más corta entre dos puntos



El elemento diferencial de distancia esta dado por,

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx,$$

siendo la **longitud** total de una curva yendo desde el punto 1 al 2:

$$I = \int_1^2 ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx,$$

con lo cual el funcional del problema es,

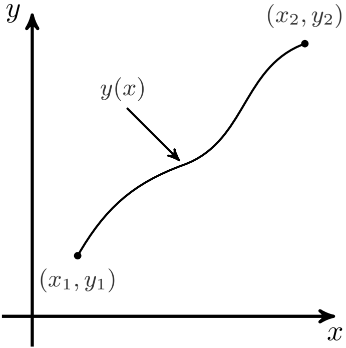
$$f = \sqrt{1 + y'^2}.$$

Sustituyendo en la ecuación de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0,$$

Cálculo de variaciones

Ecuación de Euler-Lagrange: distancia más corta entre dos puntos



calculando las parciales,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = 0,$$

lo que equivale a,

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = c \quad \forall \quad c = \text{cte.}$$

$$\Rightarrow \quad y' = a \quad \forall \quad a = \frac{c}{\sqrt{1-c^2}},$$

$$\Rightarrow \quad y = ax + b,$$

en donde a y b son ctes. de integración determinadas por los puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2).

Cálculo de variaciones

Segunda forma de la ecuación de Euler-Lagrange

La ecuación de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0,$$

puede ser expresada de otra manera, partiendo del funcional $f(y, y', x)$:

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx} &= \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}, \\ &= y'\frac{\partial f}{\partial y} + y''\frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{\partial f}{\partial x}.\end{aligned}$$

Ahora, por otro lado, consideremos:

$$\frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = y''\frac{\partial f}{\partial y'} + y'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right),$$

restando ambas ecuaciones, tenemos:

$$\frac{df}{dx} - \frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = y'\frac{\partial f}{\partial y} - y'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) + \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Cálculo de variaciones

Segunda forma de la ecuación de Euler-Lagrange

De la ecuación anterior agrupando términos,

$$\frac{df}{dx} - \frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = y'\frac{\partial f}{\partial y} - y'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) + \frac{\partial f}{\partial x},$$

$$\frac{d}{dx}\left(f - y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial x} = y'\left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right],$$

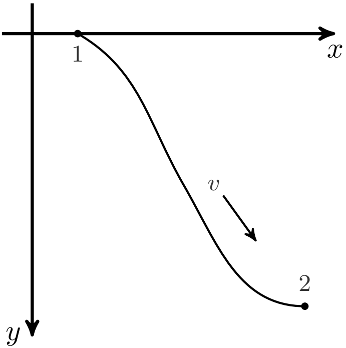
donde se observa que el término de la derecha corresponde a la **ecuación de Euler-Lagrange**,

$$\left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right] = 0,$$

por tanto, tenemos:

$$\frac{d}{dx}\left(f - y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$

lo cual se conoce como **segunda forma** de la ec. de Euler-Lagrange.



Si parte del reposo y v es la velocidad a lo largo de la curva, entonces el t desde 1 hasta 2 es,

$$t = \int_1^2 dt = \int_1^2 \frac{ds}{v}.$$

Ahora, por conservación de energía, junto con $V(y=0)=0$, tenemos que:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gy},$$

Por tanto, sustituyendo en t,

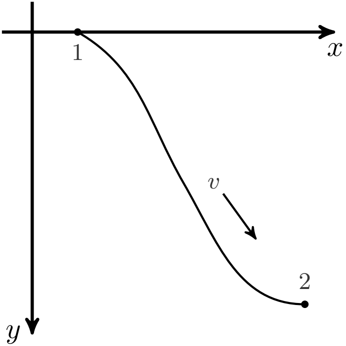
$$t = \int_1^2 \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \int_1^2 \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}dx,$$

se identifica el funcional f como:

$$f = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}.$$

Cálculo de variaciones

Segunda forma de la ecuación de Euler: Braquistocrona



Observamos que f es ind. de x:

$$f(y,y') = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}},$$

ahora, recordando la segunda forma de la ec. de Euler,

$$\frac{d}{dx}\left(f - y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}\left(f - y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0,$$

$$\Rightarrow \quad f - y'\frac{\partial f}{\partial y'} = \text{cte.}$$

Calculando y sustituyendo,

$$\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}} - \frac{y'^2}{\sqrt{2gy(1+y'^2)}} = c,$$

reduciendo llegamos a:

$$y(1+y'^2) = 2a \quad \forall \quad 2a = \text{cte.}$$

Reescribiendo:

$$y(1 + y'^2) = 2a,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2ay - y^2}{y^2} = y'^2,$$

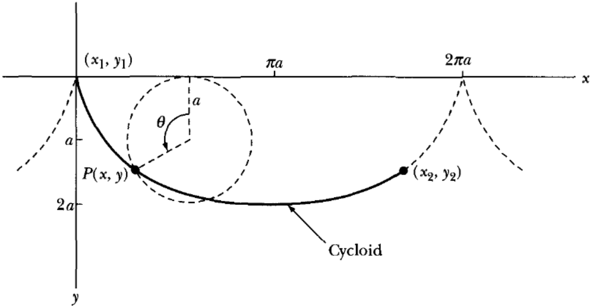
$$\therefore \quad \int \frac{ydy}{\sqrt{2ay - y^2}} = x,$$

proponiendo,

$$y = a(1 - \mathrm{Cos}\,\theta),$$

$$\Rightarrow \quad x = a(\theta - \mathrm{Sen}\,\theta),$$

lo que corresponde a las ecs. paramétricas de una **cicloide**.



Cálculo de variaciones

Generalización a varias variables

Generalizando el prob. fundamental del cálculo de variaciones para el caso donde f es una función de muchas variables y_i y sus derivadas y_i':

$$\delta J = \delta \int_1^2 f(y_1(x), y_2(x), \ldots ; {y'}_1(x), {y'}_2(x), \ldots ; x) dx,$$

considerando que $J = J(\alpha)$ y que α etiqueta un set de curvas $y_i(x, \alpha)$:

$$\begin{aligned}
y_1(x,\alpha) &= y_1(x,0) + \alpha\eta_1(x), \\
y_2(x,\alpha) &= y_2(x,0) + \alpha\eta_2(x), \\
\vdots \quad & \quad \vdots \qquad \vdots \\
y_i(x,\alpha) &= y_i(x,0) + \alpha\eta_i(x), \\
\vdots \quad & \quad \vdots \qquad \vdots
\end{aligned}$$

y donde $y_1(x,0)$, $y_2(x,0)$, etc., son las **soluciones** del problema extremal, mientras que η_1, η_2, etc., son funciones **independientes** arbitrarias (continuas y diferenciables) de x que se anulan en los puntos frontera.

Cálculo de variaciones

Generalización a varias variables

Calculando la variación de J,

$$\delta J = \int_1^2 \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial f}{\partial y_i'}\delta y_i' \right) dx,$$

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha}d\alpha = \int_1^2 \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial \alpha}d\alpha + \frac{\partial f}{\partial y_i'}\frac{\partial y_i'}{\partial \alpha}d\alpha \right) dx,$$

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha}d\alpha = \int_1^2 \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i}\eta_i(x) + \frac{\partial f}{\partial y_i'}\frac{d\eta_i(x)}{dx} \right) d\alpha dx,$$ [3]

integrando por partes el segundo término,

$$\int_1^2 \frac{\partial f}{\partial y_i'}\frac{d\eta_i(x)}{dx}dx = \frac{\partial f}{\partial y_i'}\eta_i(x)\bigg|_1^2 - \int_1^2 \eta_i(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i'}\right)dx,$$

$$= -\int_1^2 \eta_i(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i'}\right)dx = \int_1^2 \frac{\partial y_i}{\partial \alpha}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i'}\right)dx.$$

[3] $\partial y_i/\partial \alpha = \eta(x)$, $\partial y'{}_i/\partial \alpha = d\eta_i(x)/dx$.

Cálculo de variaciones

Generalización a varias variables

Sustituyendo lo anterior en la variación de J,

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} d\alpha = \int_1^2 \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_i'} \right) \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} d\alpha dx,$$

$$\Rightarrow \quad \delta J = \int_1^2 \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_i'} \right) \delta y_i dx,$$

aplicando la **condición extremal** $\delta J = 0$,

$$\int_1^2 \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_i'} \right) \delta y_i dx = 0,$$

debido a que las y_i's son var. **independientes** $\Rightarrow \delta y_i$ también lo son,

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i'} \right) = 0 \;\; \forall \;\; i = 1, 2, \ldots, n$$

la cual representa la generalización a varias variables de la **ecuación de Euler**.

Cálculo de variaciones

Constricciones

Consideremos el caso en el que,

$$f\left\{y_i, y_i', x\right\} = f(y, z, y', z', x)$$

por tanto, la cantidad a la que deseamos hallar su extremal será:

$$J = \int_1^2 f\left\{y_i, y_i', x\right\} dx = \int_1^2 f(y, z, y', z', x) dx,$$

aplicando la condición de extremal,

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} d\alpha = \int_1^2 \left[\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial \alpha}\right] dx = 0,$$

en donde,

$$\int_1^2 \frac{\partial f}{\partial \xi'}\frac{\partial \xi'}{\partial \alpha} dx = \int_1^2 \frac{\partial f}{\partial \xi'}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial \alpha} dx = \left.\frac{\partial f}{\partial \xi'}\frac{\partial \xi}{\partial \alpha}\right|_1^2 - \int_1^2 \frac{\partial \xi}{\partial \alpha}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi'}\right) d\alpha dx,$$

$$= -\int_1^2 \frac{\partial \xi}{\partial \alpha}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi'}\right) dx \quad \forall \quad \xi = y,\, z.$$

Sustituyendo,

$$\int_1^2 \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right] \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \left[\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right)\right] \frac{\partial z}{\partial \alpha} \right\} d\alpha dx = 0.$$

Ahora, para el caso en el que existe una relación de **constricción**,

$$g\left\{y_i, x\right\} = g(y, z, x) = 0,$$

las variaciones $\partial y/\partial\alpha$ y $\partial z/\partial\alpha$ ya no son **independientes**, por tanto las expresiones en $\partial J/\partial\alpha$ **no** se **anulan** término a término.

Para eliminar tal dependencia, tomemos en cuenta la constricción,

$$\frac{dg}{d\alpha} = \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} = -\frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \alpha},$$

por tanto, sustituyendo en la condición extremal;

$$\int_1^2 \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right] - \left[\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right)\right] \frac{\partial g/\partial y}{\partial g/\partial z} \right\} \frac{\partial y}{\partial \alpha} d\alpha dx = 0.$$

Cálculo de variaciones

Constricciones

De la ecuación anterior,

$$\int_1^2 \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right] - \left[\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right)\right] \frac{\partial g/\partial y}{\partial g/\partial z} \right\} \frac{\partial y}{\partial \alpha} d\alpha dx = 0$$

como $\partial y/\partial \alpha$ es una función genérica que multiplica a todo el integrando, se debe cumplir,

$$\left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right] \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^{-1} = \left[\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right)\right] \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^{-1},$$

en donde se observa que el lado **izquierdo** incluye derivadas respecto y y y', mientras que el **derecho** derivadas respecto z y z', por lo que ambas deben ser iguales a una función de x solamente:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right] \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^{-1} = \left[\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right)\right] \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^{-1} = -\lambda(x).$$

Reescribiendo lo anterior, tenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) + \lambda(x)\frac{\partial g}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right) + \lambda(x)\frac{\partial g}{\partial z} = 0,$$

en donde $g(y, z, x) = 0$ y $\lambda(x)$ es una función por determinar, que se le conoce como **multiplicador de Lagrange**.

Generalizando el caso anterior para n variables y m constricciones, se tiene:

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i'}\right) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(x)\frac{\partial g_j}{\partial y_i} = 0,$$
$$g_j\left\{y_i, x\right\} = 0,$$

en donde $i = 1, 2, \ldots, n$ y $j = 1, 2, \ldots, m$.

Las constricciones **isoperimétricas** son aquellas en las cuales se requiere que la integral de una función dada $g(y, y', x)$ sea un **valor fijo** K:

$$J = \int_1^2 f(y, y', x)dx \quad \forall \quad K = \int_1^2 g(y, y', x)dx,$$

en donde K representa por tanto una **constricción integral**.

Para resolver el problema aplicamos el método de multiplicadores de Lagrange,

$$h(y, y', x) = f(y, y', x) + \lambda g(y, y', x),$$

entonces ahora tendremos un nuevo funcional h **libre de constricciones**:

$$H = \int_1^2 h(y, y', x)dx,$$

el cual nos arroja la siguiente ec. de Euler modificada:

$$\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial h}{\partial y'}\right) = 0.$$

Contenido: Tema 02

Principio de Hamilton

El movimiento de un sistema desde el tiempo t_1 hasta el tiempo t_2 es tal que la integral de línea, llamada **acción** o **integral de acción**:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad \forall \quad L = T - V,$$

tiene un valor **estacionario** para la trayectoria actual del movimiento.

Sistemas monogénicos

sistemas mecánicos para los cuales todas las fuerzas (excepto las de constricción) son derivables de potenciales escalares generalizados que pueden ser función de las coordenadas, velocidades y el tiempo.[4]

[4] Cuando el potencial sólo depende de las coordenadas, entonces se dice que el sistema es conservativo.

Principio de Hamilton y ecuaciones de Lagrange

Principio de Hamilton

El **principio de Hamilton** se puede expresar, por tanto, como la **variación de la acción** I:

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt,$$

tal que cuando se conozca la trayectoria actual del movimiento arroje un valor **estacionario**:

$$\delta I = 0 \quad \forall \quad L(q_i, \dot{q}_i, t) \quad \Leftarrow \quad \text{trayectoria del movimiento.}$$

Se observa que el planteamiento del principio de Hamilton es similar al problema fundamental del cálculo de variaciones, para el caso de un funcional $f = f(y_i, y_i', x)$ en donde se requiere encontrar el extremal de J,

$$\delta J = \delta \int_1^2 f(y_i, y_i', x) dx \;\; \forall \;\; i = 1, \ldots, n.$$

Del cálculo de variaciones se obtuvo la **ecuación de Euler**:

$$J = \int_1^2 f(y_i, y_i', x)dx \quad \Rightarrow \quad \partial J = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i'}\right) = 0,$$

haciendo ahora el símil con el **principio de Hamilton**,

$$I = \int_1^2 L(q_i, \dot{q}_i, t)dt,$$

y mediante las siguientes transformaciones:

$$x \ \rightarrow \ t, \quad y_i \ \rightarrow \ q_i, \quad y_i' \ \rightarrow \ \dot{q}_i, \quad f(y_i, \dot{y}_i, x) \ \rightarrow \ L(q_i, \dot{q}_i, t),$$

se obtienen las ecuaciones de movimiento de **Lagrange** correspondientes a la acción I:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \ \ \forall \ \ i = 1, 2, \ldots, n-k.$$

en donde se asume que las q_i's son independientes, por tanto el problema requiere que las k constricciones sean **holonómicas**.

Contenido: Tema 02

Multiplicadores de Lagrange, fuerzas generalizadas

Extensión del principio de Hamilton a sistemas semi-holonómicos

Al contar con un sistema que posee constricciones **semi-holonómicas** tipo:

$$f_k(q_1, q_2, \ldots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n) = 0, \quad \forall \quad k = 1, 2, \ldots, m$$ [5]

ya no es posible aplicar de manera estándar el principio de Hamilton para obtener las ecuaciones de movimiento de Lagrange, debido a que las q_i's ya no son **independientes**.

El procedimiento para eliminar tal inconveniente y poder aplicar Lagrange es desacoplar las fuerzas de constricción del lagrangiano de manera explícita mediante el método de los **multiplicadores de Lagrange**:

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k f_k = 0,$$ [6]

[5] restricción holonómica: $f(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) = 0$.

[6] los multiplicadores de Lagrange λ_k son funciones indeterminadas.

Multiplicadores de Lagrange, fuerzas generalizadas

Extensión del principio de Hamilton a sistemas semi-holonómicos

Para sistemas semi-holonómicos el principio de Hamilton se mantiene:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0,$$

$$\Rightarrow \quad \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt = 0.$$

Sin embargo, anular término a término cada elemento de la sumatoria ya no es posible ya que las q_j no son **independientes** debido a que aún están mezcladas mediante las k constricciones.

Para desacoplar las q_j hacemos uso de los **multiplicadores de Lagrange**,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(L + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k f_k \right) dt = 0.$$

De esta manera, ya podemos aplicar la variación por separado:

$$\delta q_j \;\; \forall \;\; j = 1, 2, \ldots, n, \;\; \& \;\; \delta\lambda_k \;\; \forall \;\; k = 1, 2, \ldots, m,$$

teniendo así $n + m$ variables por determinar.

Considerando $\lambda_k = \lambda_k(t)$, entonces, las n ecuaciones para δq_j son:[7]

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j \;\; \forall \;\;\; j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\text{con:} \;\; Q_j = \sum_{k=1}^{m} \left\{ \lambda_k \left[\frac{\partial f_k}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f_k}{\partial \dot{q}_j}\right) \right] - \frac{d\lambda_k}{dt}\frac{\partial f_k}{\partial \dot{q}_j} \right\},$$

mientras que $\delta\lambda_k$ nos da las m ecuaciones de **constricción**,

$$f_k(q_1, q_2, \ldots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n) = 0 \;\;\; \forall \;\; k = 1, 2, \ldots, m,$$

y en donde Q_j son las **fuerzas generalizadas** del sistema.

[7] J. Ray, *Amer. J. Phys.* **34**, 406 (1966).

Multiplicadores de Lagrange, fuerzas generalizadas

Extensión del principio de Hamilton a sistemas semi-holonómicos: ejemplo

Consideremos una partícula cuyo Lagrangiano es,

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - V(x,y,z),$$

sujeto a la constricción

$$f(\dot{x},\dot{y},y) = \dot{x}\dot{y} + ky = 0 \quad \forall \quad k = \text{cte}.$$

Las ecuaciones de movimiento se obtendrán aplicando las ecuaciones de Lagrange, incluyendo los **multiplicadores de Lagrange**:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = Q_q \quad \forall \quad q = x, y, z,$$

$$\text{con:} \qquad Q_q = \lambda\left[\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}}\right)\right] - \frac{d\lambda}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{q}}.$$

Multiplicadores de Lagrange, fuerzas generalizadas

Extensión del principio de Hamilton a sistemas semi-holonómicos: ejemplo

Aplicando las ecuaciones anteriores se llegan a las siguientes ecuaciones de movimiento,

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + \lambda\ddot{y} + \dot{\lambda}\dot{y} + \frac{\partial V}{\partial x} &= 0, \\ m\ddot{y} + \lambda\ddot{x} - k\lambda + \dot{\lambda}\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y} &= 0, \\ m\ddot{z} + \frac{\partial V}{\partial z} &= 0, \end{aligned}$$

sujeto a la constricción:

$$\dot{x}\dot{y} + ky = 0.$$

Lo anterior representa un sistema de **cuatro** ecuaciones diferenciales, que constan de **cuatro** variables independientes:

- **Tres** coordenadas generalizadas (x, y, z),
- **Un** multiplicador de Lagrange (λ), el cual está relacionado con la condición de constricción.

Multiplicadores de Lagrange, fuerzas generalizadas

Sistemas con constricciones holonómicas

Recordando la expresión para las **fuerzas generalizadas**,

$$Q_j = \sum_{k=1}^{m} \left\{ \lambda_k \left[\frac{\partial f_k}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f_k}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] - \frac{d\lambda_k}{dt} \frac{\partial f_k}{\partial \dot{q}_j} \right\},$$

se observa que puede ser reducida para para sistemas con **constricciones holónomicas** del tipo $f_k(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) = 0$:

$$Q_j = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial q_j} \quad \forall \quad k = \text{núm. de constricciones.}$$

Las razones para aplicar tal formalismo[8] con constricciones holonómicas son:

(1) No es deseable reducir todas las q's a coordenadas independientes,

(2) Se desean obtener las **fuerzas de constricción**.

[8] descripción explícita de las relaciones de constricción en el problema.

Contenido: Tema 02

Momento generalizado

Consideremos un sistema holonómico (y conservativo), el cual tiene $n-m$ coordenadas q_i **independientes**,[9] y por tanto el mismo número de ecuaciones de Lagrange dadas por,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \ \ \forall \ \ i = 1, 2, \ldots, n-m.$$

Al tener un sistema **conservativo**, entonces $V = V(q_1, q_2, \ldots, q_{n-m})$, por lo tanto, las ec. de Lagrange se pueden expresar como:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0 \ \ \forall \ \ T = T(\dot{q}_i).$$

Expandiendo el primer término se obtiene:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \sum_{j=1}^{n-m} \frac{1}{2} m \dot{q}_j^2 = m\dot{q}_i = p_i.$$

[9] donde m es el número de constricciones.

De lo anterior se puede definir una cantidad conocida como el **momento generalizado** o **momento canónico**,

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}.$$

En general, el Lagrangiano L depende de las q_i's y $\dot{q}_i$'s:

$$L = L(q_1, q_2, \ldots, q_{n-m}; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_{n-m}; t),$$

pero, si L no contiene explícitamente alguna coordenada q_i[10] se dice que q_i es una **coordenada cíclica**, obteniendo así de la ec. de Lagrange,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{dp_i}{dt} = \dot{p}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad p_i = \text{cte.}$$

[10] aunque si puede contener la correspondiente $\dot{q}_i$.

Teoremas de conservación y propiedades de simetría

Momento generalizado, coordenadas cíclicas y propiedades de simetría

Del resultado anterior podemos llegar al siguiente

Teorema de conservación

El momento generalizado p_i correspondiente a una coordenada **cíclica** es una **constante de movimiento**, es decir, se conserva.

Se observa que existe una relación entre la **simetría** del problema y las cantidades que se conservan, la cual se da mediante las **coordenadas cíclicas**.

Si el sistema es invariante bajo la **transformación** contínua de alguna coord. generalizada, q_i, entonces T y V no variarán ante los cambios de q_i, por tanto,

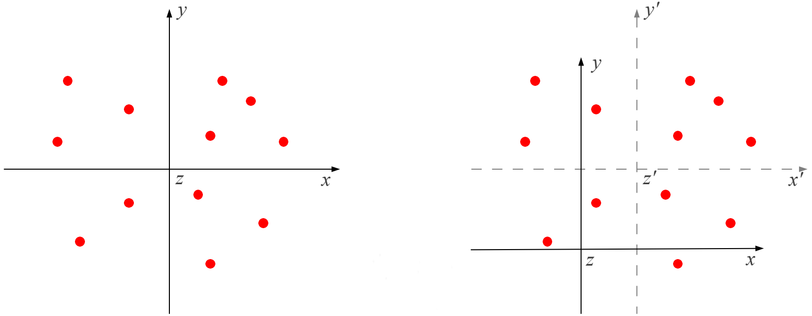
$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_i = \text{cte.}$$

invariante ante operaciones de transformación contínua (simetrías)

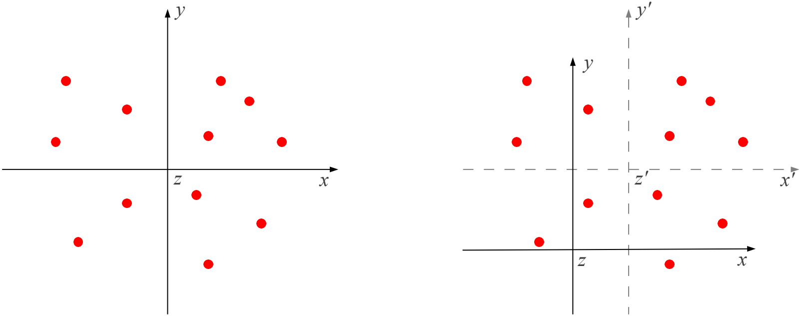
↔

cantidades que se conservan: momentos generalizados relacionados con tal transformación

Traslación en un potencial constante $V \neq V(x, y)$



Traslación en un potencial constante $V \neq V(x,y)$

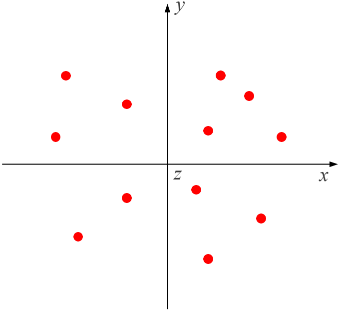


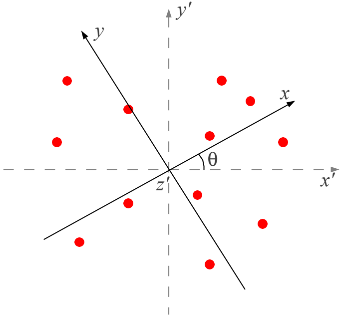
En este caso al tener $V \neq V(x,y)$, el problema es **invariante** ante la operación de **traslación** en el plano x-y:

$$x \to x + \alpha, \quad y \to y + \beta,$$

por lo que las comp. de P_x y P_y serán **constantes de movimiento**.

Rotación en un potencial constante $V \neq V(x,y)$



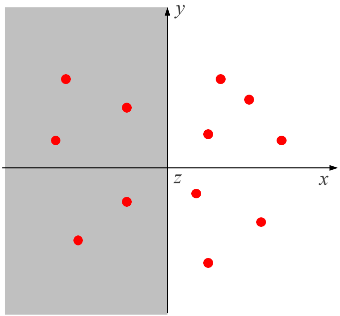


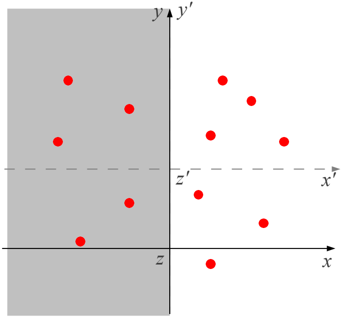
El sistema también será **invariante** ante la operación de **rotación** respecto al eje z:

$$\hat{\mathbf{x}} \to \mathrm{Cos}\,\theta\hat{\mathbf{x}}' + \mathrm{Sen}\,\theta\hat{\mathbf{y}}', \quad \hat{\mathbf{y}} \to -\mathrm{Sen}\,\theta\hat{\mathbf{x}}' + \mathrm{Cos}\,\theta\hat{\mathbf{y}}',$$

por lo que la comp. L_z será también una **cte. de movimiento**.

Potencial constante $V = V_1 \;\; \forall \;\; x \leq 0$ **&** $V = V_2 \;\; \forall \;\; x > 0$





En este caso como el potencial no es el mismo en todo el espacio, entonces el problema es **invariante** solamente ante la operación de **traslación** en y:

$$y \rightarrow y + \beta,$$

y por tanto solo P_y será **cte. de movimiento**.

Consideremos un lagrangiano general, el cual puede ser función de las coord. q_i, las velocidades $\dot{q}_i$ y posiblemente el tiempo t, entonces la derivada total de L con respecto a t es

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d\dot{q}_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d\dot{q}_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t},$$

pero de las ecs. de Lagrange tenemos,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

por tanto, sustituyendo en dL/dt,

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d\dot{q}_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} = \sum_i \frac{d}{dt}\left(\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial L}{\partial t}.$$

Del resultado anterior reacomodamos términos,

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt}\left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial L}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L\right) + \frac{\partial L}{\partial t} = 0.$$

La cantidad en paréntesis la llamamos **función de energía**[11]:

$$h(q_1, q_2, \ldots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n; t) = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L,$$

por tanto tenemos:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Si el lagrangiano no depende explícitamente del tiempo, entonces $dh/dt = 0$. Por tanto, se dice que h se **conserva** o que se trata de una **constante de movimiento**.

[11] ya que h tiene unidades de energía.

Para conocer el significado físico de h, consideremos un sistema de N partículas con const. holonómicas, además de fuerzas conservativas.

Para este sistema la **energía cinética** es,

$$T = \frac{1}{2}\sum_k m_k \dot{\mathbf{r}}_k^2 \quad \forall \quad k = 1, 2, \ldots, N \quad \& \quad \mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k(q_1, q_2, \ldots, q_n).$$

Como las const. son holonómicas y no-dependientes del tiempo,

$$\dot{\mathbf{r}}_k = \sum_i \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i}\dot{q}_i,$$

sustituyendo lo anterior en la **energía cinética**,

$$T = \frac{1}{2}\sum_k m_k \sum_{ij}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i}\dot{q}_i\right)\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j}\dot{q}_j\right),$$

$$\Rightarrow \quad T = \sum_{ij}\left(\frac{1}{2}\sum_k m_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j}\right)\dot{q}_i\dot{q}_j = \sum_{ij} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j.$$

La energía cinética, por tanto, es una **función cuadrática homogénea** de las vel. generalizadas, con **coeficientes de masa** simétricos[12]

$$a_{ij} = \frac{1}{2}\sum_k m_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j}.$$

Por otro lado, del **teorema de Euler de funciones homogéneas** se establece que si f es una función homogénea de rango $n \Rightarrow$

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_k) = \lambda^n f(x_1, x_2, \ldots, x_k),$$

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = n f(x_1, x_2, \ldots, x_k).$$

Entonces, aplicando el teorema de Euler a la energía cinética $(n = 2)$,

$$T = \sum_{ij} a_{ij}\dot{q}_i \dot{q}_j \quad \Rightarrow \quad \sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = 2T.$$

[12] $a_{ij} = a_{ji}$.

Como se ha considerado que las fuerzas son **conservativas**[13] $\Rightarrow$

$$L = T - V \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_i} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i},$$

por tanto, sustituyendo en h,

$$\begin{aligned} h &= \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L, \\ &= \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - L, \\ &= 2T - (T - V), \\ \Rightarrow \quad h &= T + V = E. \end{aligned}$$

entonces, la función de energía es, de hecho, la **energía total** del sistema.

[13] el potencial es función de las coord. solamente: $V = V(q_1, q_2, \ldots, q_n)$.