

Contenido: Tema 03

3. Fuerzas centrales

3.1 Reducción a un problema de una partícula

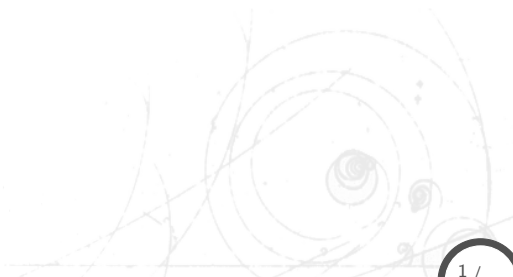
3.2 Ecuaciones de movimiento

3.3 Clasificación de las órbitas

3.4 Ecuación diferencial de la órbita y teorema de Bertrand

3.5 Problema de Kepler

3.6 Dispersión en un campo de fuerzas centrales



3. Fuerzas centrales

3.1 Reducción a un problema de una partícula

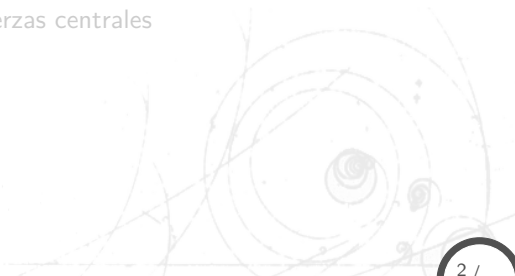
3.2 Ecuaciones de movimiento

3.3 Clasificación de las órbitas

3.4 Ecuación diferencial de la órbita y teorema de Bertrand

3.5 Problema de Kepler

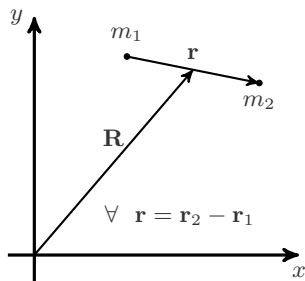
3.6 Dispersión en un campo de fuerzas centrales



Reducción a un problema de una partícula

Transformación del problema de dos cuerpos al de una partícula

Consideremos un sistema monogénico de dos masas puntuales m_1 y m_2 donde las únicas fuerzas provienen del potencial de interacción V , en donde $V = V(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1)$,



entonces, el Lagrangiano es,

$$\begin{aligned} L &= T(\dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2) - V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2), \\ &= T(\dot{\mathbf{R}}, \dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}). \end{aligned}$$

En donde definimos T como,

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\mathbf{R}}^2 + T',$$

$$\text{con } T' = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2'^2,$$

considerando que T' , \mathbf{r}'_1 y \mathbf{r}'_2 son relativos al **centro de masa**:

$$\mathbf{r}'_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{r},$$

$$\mathbf{r}'_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r}.$$

Reducción a un problema de una partícula

Transformación del problema de dos cuerpos al de una partícula

Expresando ahora T' en términos del vector relativo \mathbf{r} ,

$$T' = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}}^2$$

por tanto, el Lagrangiano del sistema queda como,

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}).$$

Se observa que las 3 coord. de \mathbf{R} son **cíclicas** \Rightarrow el momento generalizado relacionado al CM es una **cte. de movimiento**, indicando que el CM se mueve a vel. constante o está en reposo.

Enfocándonos ahora en el movimiento de la **coordenada relativa** \mathbf{r} ,

$$L = \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \quad \forall \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2},$$

en donde μ se le conoce como la **masa relativa** del sistema.

Contenido: Tema 03

3. Fuerzas centrales

3.1 Reducción a un problema de una partícula

3.2 Ecuaciones de movimiento

3.3 Clasificación de las órbitas

3.4 Ecuación diferencial de la órbita y teorema de Bertrand

3.5 Problema de Kepler

3.6 Dispersión en un campo de fuerzas centrales



Ecuaciones de movimiento

Deducción

Analizando potenciales **centrales** y **conservativos** $V(r)$ ¹ tenemos,

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - V(r),$$

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2\text{Sen}^2\theta) - V(r) \quad (\text{coord. esféricas}),$$

en donde al ser $V = V(r)$, se observa:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad \forall \quad \mathbf{F} = -\nabla V(r), \\ \Rightarrow \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= 0 \quad \therefore \mathbf{L} = \text{cte.} \quad \forall \quad \mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \end{aligned}$$

lo cual indica que $\mathbf{L} \perp \mathbf{r}$ & $\mathbf{L} \perp \mathbf{p}$, por tanto \mathbf{r} y \mathbf{p} siempre **permanecen en un plano**, por lo que podemos considerar $\theta = \text{cte} = \pi/2$,

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r) \quad (\text{coord. polares}).$$

¹que dependen sólo de r tal que la fuerza esté en la dirección \mathbf{r} .

Ecuaciones de movimiento

Deducción

De la ecuación anterior se observó que θ es una coord. **cíclica** \Rightarrow el momento generalizado correspondiente es una cantidad **conservada**:

$$p_{\theta} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} = l,$$

lo cual representa una **ecuación de movimiento** del sistema.

Obteniendo ahora la ecuación de Lagrange para r ,

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) - mr\dot{\theta}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0 \Rightarrow m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = f(r) \quad \forall \quad f(r) = -\frac{\partial V}{\partial r},$$

y usando la primera ecuación de movimiento (para θ), tenemos:

$$m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} = f(r),$$

lo cual corresponde a la ec. diferencial que da lugar a la ecuación de **movimiento** de $r(t)$.

Ecuaciones de movimiento

Deducción

De igual manera es posible obtener la ec. de movimiento mediante el uso de la energía E , ya que las fuerzas son **conservativas**,

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r),$$

lo cual también representa una **ecuación de movimiento** del sistema para $r(t)$,

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2} \right)},$$
$$\Rightarrow dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2} \right)}},$$

lo cual integrando, da lugar a lo siguiente:

$$t = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2} \right)}}.$$

Ecuaciones de movimiento

Deducción

Obteniendo ahora la ecuación para $\theta(t)$,

$$mr^2\dot{\theta} = l \Rightarrow d\theta = \frac{l}{mr^2}dt,$$

$$\therefore \theta - \theta_0 = \int_0^t \frac{l}{mr(t)^2}dt.$$

Finalmente, también podemos obtener la ec. de la **trayectoria** $\theta(r)$,

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) = \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2 \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r),$$

$$\Rightarrow E = \frac{l^2}{2mr^4} \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) \quad \forall \quad \dot{\theta}^2 = \frac{l^2}{m^2r^4},$$

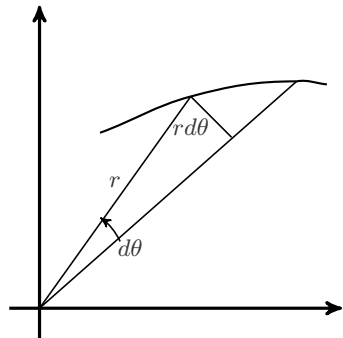
integrando la relación anterior, se tiene:

$$\theta - \theta_0 = \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2m}{l^2} \left(E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2} \right)}}.$$

Ecuaciones de movimiento

Conservación del momento angular: Segunda ley de Kepler

Segunda ley de Kepler: radio vectores en una órbita planetaria barren áreas iguales en tiempos iguales.



Del esquema tenemos que el área barrida en un tiempo dt es,

$$dA = \frac{1}{2}r(rd\theta),$$

por tanto,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \frac{d\theta}{dt},$$

pero sabemos que en general:

$$\begin{aligned} mr^2\dot{\theta} = l &\Rightarrow \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0, \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}\right) = 0 &\therefore \frac{dA}{dt} = \text{cte.} \end{aligned}$$

3. Fuerzas centrales

3.1 Reducción a un problema de una partícula

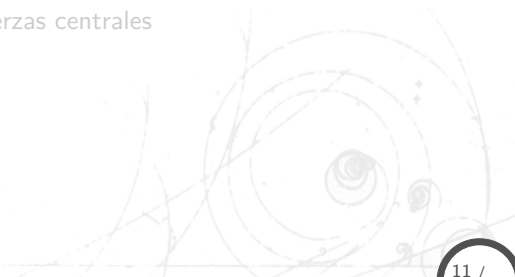
3.2 Ecuaciones de movimiento

3.3 Clasificación de las órbitas

3.4 Ecuación diferencial de la órbita y teorema de Bertrand

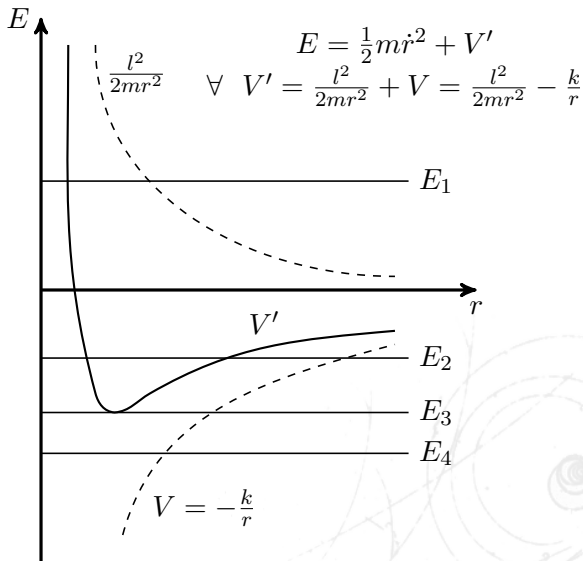
3.5 Problema de Kepler

3.6 Dispersión en un campo de fuerzas centrales



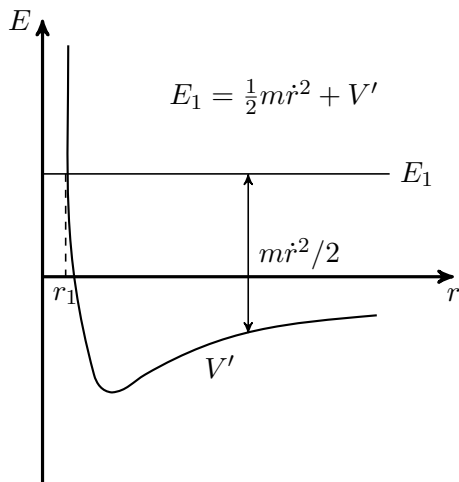
Clasificación de las órbitas

Diagrama de un potencial central: $V(r) = -k/r$

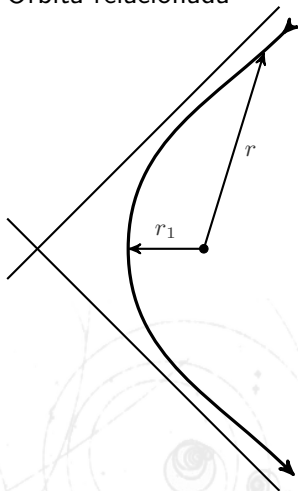


Clasificación de las órbitas

Diagrama de un potencial central: caso $E = E_1$



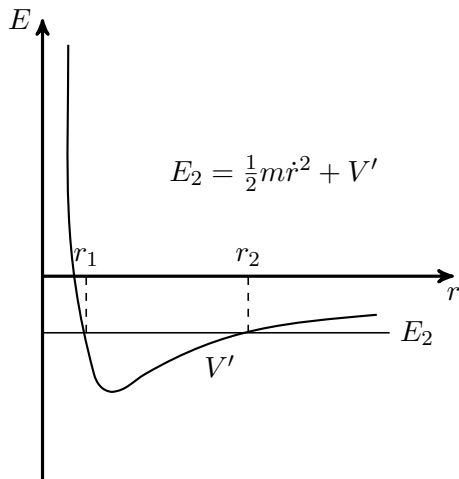
Órbita relacionada



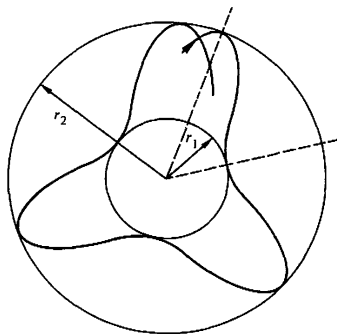
Por tanto, para rangos de energía con **un sólo punto** de interacción con el potencial tendremos **órbitas no-acotadas**.

Clasificación de las órbitas

Diagrama de un potencial central: caso $E = E_2$



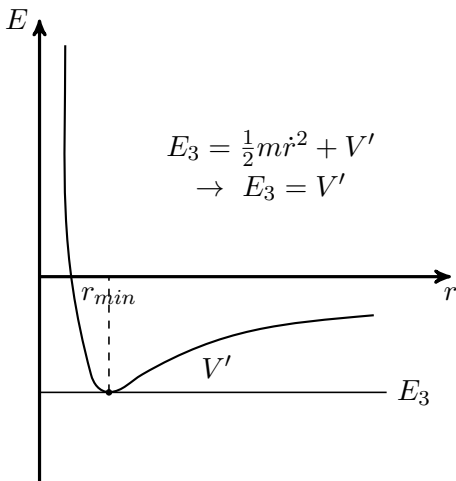
Órbita relacionada



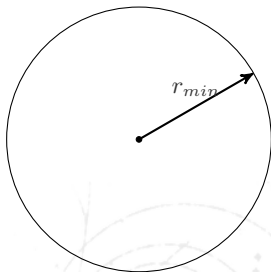
Por tanto, para rangos de energía con **dos** puntos de interacción con el potencial tendremos **órbitas acotadas** entre las dos circunferencias de radios r_1 y r_2 .

Clasificación de las órbitas

Diagrama de un potencial central: caso $E = E_3$



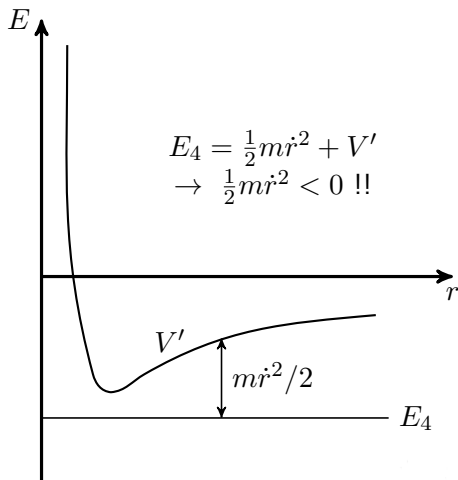
Órbita relacionada



En este caso el movimiento sólo es posible a **un valor** de $r = r_{min}$, por lo que $\dot{r} = 0$ y la órbita será **circular**.

Clasificación de las órbitas

Diagrama de un potencial central: caso $E = E_4$



El movimiento no es posible ya que para ello se debería tener $m\dot{r}^2/2 < 0$, lo que implica una velocidad imaginaria.

Por tanto, **no existe** un movimiento en el que la energía del sistema E_4 sea **menor** que la del mínimo del potencial efectivo V' .

Clasificación de las órbitas

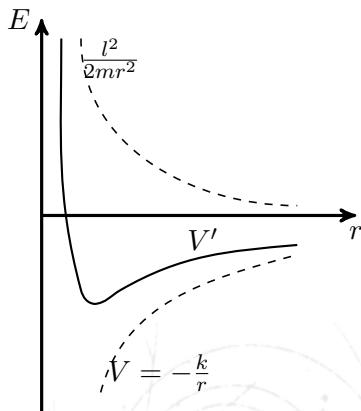
Potenciales atractivos generales

La clasificación de órbitas para:

$$V' = \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{k}{r},$$

se puede resumir como sigue:

- **No-acotadas**: cuando se tiene solo un punto de interacción.
- **Acotadas**: cuando se tienen dos puntos de interacción.
- **Circulares**: solo es posible un valor de r para el movimiento.



Esta clasificación se puede mantener para potenciales atractivos generales tal que se cumpla:

- **Decaigan** más lento que $1/r^2$ en $r \rightarrow \infty$,
- **Tiendan al infinito** más lento que $1/r^2$ en $r \rightarrow 0$.

3. Fuerzas centrales

3.1 Reducción a un problema de una partícula

3.2 Ecuaciones de movimiento

3.3 Clasificación de las órbitas

3.4 Ecuación diferencial de la órbita y teorema de Bertrand

3.5 Problema de Kepler

3.6 Dispersión en un campo de fuerzas centrales



Ecuación diferencial de la órbita

Potenciales integrables

En la ecuación de la órbita,

$$\theta - \theta_0 = \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2m}{l^2} \left(E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2} \right)}},$$

se tiene que para $V(r)$ en **funciones de potencias** de r es de los pocos casos en que se puede resolver la ecuación anterior de manera analítica,

$$V(r) = ar^{n+1} \quad \ni \quad f(r) \propto r^n.$$

Sustituyendo,

$$\begin{aligned} \theta - \theta_0 &= \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2m}{l^2} \left(E - ar^{n+1} - \frac{l^2}{2mr^2} \right)}}, \\ \Rightarrow \quad \theta - \theta_0 &= \int_{r_0}^r \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2ma}{l^2} u^{-n-1} - u^2}}, \end{aligned}$$

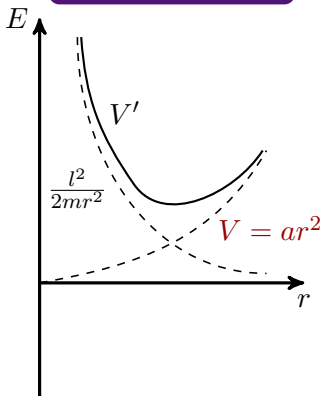
en donde $u = 1/r \rightarrow du = -(1/r^2)dr$.

Ecuación diferencial de la órbita

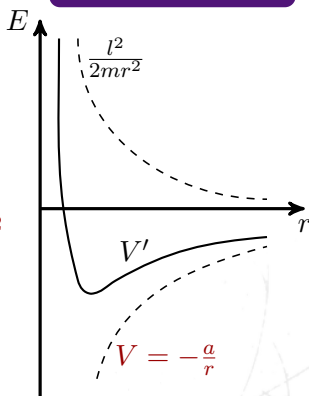
Potenciales integrables

La ecuación anterior tendrá soluciones **sencillas**² cuando n sea uno de los siguientes casos:

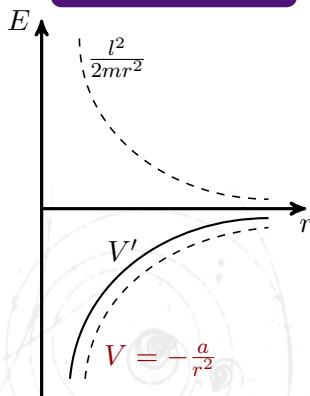
$$n = 1 \quad (f \propto r)$$



$$n = -2 \quad (f \propto r^{-2})$$



$$n = -3 \quad (f \propto r^{-3})$$



²en términos de funciones trigonométricas.

Ecuación diferencial de la órbita

Teorema de Bertrand: condiciones para órbitas cerradas

Recordemos las ecuaciones de movimiento obtenidas para **potenciales centrales**,

$$m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} = f(r) = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow m\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{l^2}{mr^3} = f(r),$$
$$mr^2\dot{\theta} = l \Rightarrow \frac{d}{dt} = \frac{l}{mr^2} \frac{d}{d\theta}.$$

Relacionando las ecuaciones anteriores,

$$f(r) = m\frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \right) - \frac{l^2}{mr^3} = \frac{l^2}{mr^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) - \frac{l^2}{mr^3},$$

definiendo,

$$u = \frac{1}{r} \rightarrow \frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta},$$

y sustituyendo, se obtiene:

$$f(1/u) = -\frac{l^2 u^2}{m} \frac{d^2 u}{d\theta^2} - \frac{l^2 u^3}{m} \rightarrow -\frac{m}{u^2 l^2} f(1/u) = \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u.$$

Ecuación diferencial de la órbita

Teorema de Bertrand: condiciones para órbitas cerradas

Expresando lo anterior en términos del potencial,

$$\begin{aligned}f(r) &= -\frac{dV}{dr}, \\ \rightarrow f(1/u) &= -\frac{dV}{du} \frac{du}{dr} = u^2 \frac{dV}{du}, \\ \Rightarrow \frac{1}{u^2} f(1/u) &= \frac{d}{du} V(1/u).\end{aligned}$$

Sust. en la ecuación diferencial de la **trayectoria** anterior para $u(\theta)$,

$$\begin{aligned}\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u &= -\frac{m}{u^2 l^2} f(1/u), \\ &= -\frac{m}{l^2} \frac{d}{du} V(1/u), \\ \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u &= J(u) \quad \forall \quad J(u) = -\frac{m}{l^2} \frac{d}{du} V(1/u).\end{aligned}$$

Ecuación diferencial de la órbita

Teorema de Bertrand: condiciones para órbitas cerradas

Para que tengamos una **órbita circular** ($r = r_0$) se debe cumplir:

$$r = \text{cte.} \quad \forall \theta \quad \rightarrow \quad \frac{dr}{d\theta} = \frac{d^2r}{d\theta^2} = \frac{d^2u}{d\theta^2} = 0,$$

por tanto, de la ecuación anterior,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = J(u) \quad \Rightarrow \quad J(u) = u \quad \forall \quad u = u_0 = 1/r_0.$$

Si la energía varía muy poco respecto a la condición de **órbita circular**,³
 \Rightarrow se mantendrá la **órbita cerrada**, existiendo muy poca variación respecto a u_0 , por lo que podemos expandir $J(u)$ en una serie de Taylor:

$$J(u) = u_0 + (u - u_0) \frac{dJ}{du} + O[(u - u_0)^2] \quad \forall \quad \frac{dJ}{du_0} = \left. \frac{dJ}{du} \right|_{u_0}.$$

³y el potencial es estable en r_0 : $d^2V'/dr^2|_{r_0} > 0$.

Ecuación diferencial de la órbita

Teorema de Bertrand: condiciones para órbitas cerradas

Haciendo un cambio de variable $x = u - u_0$ en la ec. anterior obtenemos:

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + \beta^2 x = 0 \quad \forall \quad \beta^2 = 1 - \frac{dJ}{du_0},$$

y si deseamos que x describa una **oscilación acotada y cerrada** se debe cumplir $\beta^2 > 0$, por tanto, hallando dJ/du_0 ,

$$J = -\frac{m}{u^2 l^2} f(1/u) \quad \rightarrow \quad \frac{dJ}{du} = -\frac{2J}{u} - \frac{m}{u^2 l^2} \frac{d}{du} f(1/u),$$

evaluando en u_0 ,

$$\frac{dJ}{du_0} = -\frac{2J}{u_0} - \frac{m}{u_0^2 l^2} \frac{df}{du_0} = -2 + \frac{u_0}{f_0} \frac{df}{du_0}, \quad \forall \quad f_0 = f(1/u_0), \quad \frac{df}{du_0} = \left. \frac{df}{du} \right|_{u_0},$$

en donde se han usado las condiciones de **órbitas circulares** ($r = r_0$):

$$J(u) = u_0 \quad \& \quad f(1/u_0) = -\frac{l^2 u_0^3}{m}.$$

Ecuación diferencial de la órbita

Teorema de Bertrand: condiciones para órbitas cerradas

Sustituyendo lo anterior en la expresión de β^2 ,

$$\begin{aligned}\beta^2 &= 1 - \frac{dJ}{du_0} = 3 - \frac{u_0}{f_0} \frac{df}{du_0}, \\ &= 3 + \left[\frac{r}{f} \frac{df}{dr} \right]_{r_0} \quad \forall \quad u = \frac{1}{r}, \quad \frac{df}{du} = -r^2 \frac{df}{dr}.\end{aligned}$$

Ahora, de la ecuación de la **órbita modificada**,

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + \beta^2 x = 0,$$

podemos proponer la siguiente solución,

$$x = a \cos \beta \theta \quad \forall \quad \beta^2 > 0,$$

\Rightarrow para que la órbita perturbada (en l o E) continúe cerrada, β debe ser un **número racional**,

$$\beta = \frac{p}{q} \quad \forall \quad p, q \in \mathbf{Z}.$$

Ecuación diferencial de la órbita

Teorema de Bertrand: condiciones para órbitas cerradas

Por tanto, de la ec. de β^2 queremos encontrar $f(r)$ para muchas conf. de E , l y condiciones iniciales u_0 tal que las órbitas sean **cerradas**:⁴

$$\beta^2 = 3 + \frac{r}{f} \frac{df}{dr},$$

$$\rightarrow \beta^2 - 3 = \frac{d(\ln f)}{d(\ln r)},$$

$$(\beta^2 - 3)d(\ln r) = d(\ln f),$$

$$(\beta^2 - 3)\ln r + \ln(A) = \ln f,$$

$$\rightarrow \ln(Ar^{\beta^2-3}) = \ln f,$$

$$\therefore \frac{A}{r^{3-\beta^2}} = -\frac{k}{r^{3-\beta^2}} = f(r).$$

Ejemplos,

$$\beta = 1 \rightarrow f(r) = -\frac{k}{r^2},$$

$$\beta = 2 \rightarrow f(r) = -kr,$$

$$\beta = \frac{1}{2} \rightarrow f(r) = -\frac{k}{r^{11/4}},$$

\vdots

$$\beta = 0 \rightarrow f(r) = -\frac{k}{r^3},$$

$\beta = 0$ representa la solución trivial del problema ya que el mínimo se ubica en $r = \infty$, por tanto **no** representa una órbita **cerrada**.

⁴ligeramente desviadas de la condición de órbitas circulares.

Ecuación diferencial de la órbita

Teorema de Bertrand: condiciones para órbitas cerradas

El análisis anterior fué realizado con al restricción de que la órbita varía **ligeramente** de la órbita circular.

Para encontrar las condiciones de **órbitas cerradas** con desviaciones considerables de la circular, hacemos:

$$J(u) = u_0 + (u - u_0) \frac{dJ}{du_0} + \frac{(u - u_0)^2}{2} \frac{d^2J}{du_0^2} + \frac{(u - u_0)^3}{6} \frac{d^3J}{du_0^3} + O[(u - u_0)^4],$$

en donde definimos $x = u - u_0$, entonces:

$$J(u) = u_0 + x \frac{dJ}{du_0} + \frac{x^2}{2} \frac{d^2J}{du_0^2} + \frac{x^3}{6} \frac{d^3J}{du_0^3} + O(x^4).$$

Recordando ahora la **ecuación de la órbita**,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = J(u),$$

Ecuación diferencial de la órbita

Teorema de Bertrand: condiciones para órbitas cerradas

podemos sustituir la expansión de $J(u)$ en ella:

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + \beta^2 x = \frac{x^2}{2} \frac{d^2J}{du^2} + \frac{x^3}{6} \frac{d^3J}{du^3} \quad \forall \quad \beta^2 = 1 - \frac{dJ}{du_0},$$

donde la solución de la ec. anterior representa **órbitas cerradas** desviadas considerablemente de la órbita circular.

Para el caso cuando la ecuación es igual a **cero** obteníamos las sig. ley de fuerzas y ec. de la órbita,

$$f(r) = -\frac{k}{r^{3-\beta^2}}, \quad x = a \cos \beta \theta \quad \forall \quad \beta = p/q, \quad \text{donde: } p, q \in \mathbb{Z}.$$

Podemos considerar la sol. anterior como el primer término de una expansión en Fourier de la órbita, por lo que tomando más términos tendríamos la sol. de la **ecuación general de la órbita**,

$$x = a_0 + a_1 \cos \beta \theta + a_2 \cos 2\beta \theta + a_3 \cos 3\beta \theta,$$

en donde $a_0, a_2 \ll a_1$ y $a_3 \ll a_2, a_0$.

Ecuación diferencial de la órbita

Teorema de Bertrand: condiciones para órbitas cerradas

Sustituyendo la sol. propuesta de x en la ecuación de la órbita, considerando las sig. identidades,

$$\cos \beta\theta \cos 2\beta\theta = \frac{1}{2}(\cos \beta\theta + \cos 3\beta\theta),$$

$$\cos^3 \beta\theta = \frac{1}{4}(3\cos \beta\theta + \cos 3\beta\theta) \quad \& \quad \cos^2 \beta\theta = \frac{1}{2}(\cos 2\beta\theta + 1),$$

llegamos a lo siguiente,

$$\beta^2 a_0 - 3\beta^2 a_2 \cos 2\beta\theta - 8\beta^3 a_3 \cos 3\beta\theta = \dots$$

$$\dots = \frac{a_1^2}{4} \frac{d^2 J}{du_0^2} + \left[\frac{2a_1 a_0 + a_1 a_2}{2} \frac{d^2 J}{du_0^2} + \frac{a_1^3}{8} \frac{d^3 J}{du_0^3} \right] \cos \beta\theta + \dots$$

$$\dots + \frac{a_1^2}{4} \frac{d^2 J}{du_0^2} \cos 2\beta\theta + \left[\frac{a_1 a_2}{2} \frac{d^2 J}{du_0^2} + \frac{a_1^3}{24} \frac{d^3 J}{du_0^3} \right] \cos 3\beta\theta.$$

Ecuación diferencial de la órbita

Teorema de Bertrand: condiciones para órbitas cerradas

Para que la ec. anterior tenga solución, los coeficientes correspondientes a las funciones $\text{Cos } n\theta\beta$ deben de **anularse**,

$$\text{Cos } (0)\beta\theta : \beta^2 a_0 = \frac{a_1^2}{4} \frac{d^2 J}{du_0^2}; \quad \text{Cos } \beta\theta : \frac{2a_1 a_0 + a_1 a_2}{2} \frac{d^2 J}{du_0^2} + \frac{a_1^3}{8} \frac{d^3 J}{du_0^3} = 0;$$

$$\text{Cos } 2\beta\theta : -3\beta^2 a_2 = \frac{a_1^2}{4} \frac{d^2 J}{du_0^2}; \quad \text{Cos } 3\beta\theta : -8\beta^3 a_3 = \frac{a_1 a_2}{2} \frac{d^2 J}{du_0^2} + \frac{a_1^3}{24} \frac{d^3 J}{du_0^3}.$$

El siguiente paso es encontrar las derivadas de $J(u)$, usando lo siguiente,

$$J(u) = -\frac{m}{l^2 u^2} f(1/u) = \frac{mk}{l^2} u^{1-\beta^2} \quad \forall \quad f(1/u) = -ku^{3-\beta^2}$$

por tanto, hallando las derivadas,

$$\frac{d^2 J}{du_0^2} = -\beta^2(1 - \beta^2)/u_0, \quad \frac{d^3 J}{du_0^3} = \beta^2(1 - \beta^2)(1 + \beta^2)/u_0^2.$$

Ecuación diferencial de la órbita

Teorema de Bertrand: condiciones para órbitas cerradas

En principio, podemos resolver el problema,⁵ pero antes realicemos un análisis de órdenes de magnitud en las ecs. de los coef. a_i 's,

$$\beta^2 a_0 = \frac{a_1^2}{4} \frac{d^2 J}{du_0^2} \Rightarrow \frac{a_0}{a_1} = -\frac{a_1}{u_0} \frac{1 - \beta^2}{4},$$

$$-3\beta^2 a_2 = \frac{a_1^2}{4} \frac{d^2 J}{du_0^2} \Rightarrow \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_1}{u_0} \frac{1 - \beta^2}{12},$$

$$-8\beta^3 a_3 = \frac{a_1 a_2}{2} \frac{d^2 J}{du_0^2} + \frac{a_1^3}{24} \frac{d^3 J}{du_0^3} \Rightarrow \frac{a_3}{a_1} = -\frac{a_2}{u_0} \frac{1 - \beta^2}{16\beta} - \frac{a_1^2}{u_0^2} \frac{1 - \beta^4}{8 \cdot 24\beta},$$

en donde: $a_0/a_1 \propto a_1/u_0 \ll 1$, $a_2/a_1 \propto a_1/u_0 \ll 1$,

$$a_3/a_1 \propto a_2/u_0 - a_1^2/u_0^2 \ll 1,$$

por tanto sólo sobrevive una ecuación por resolver,

$$\frac{2a_1 a_0 + a_1 a_2}{2} \frac{d^2 J}{du_0^2} + \frac{a_1^3}{8} \frac{d^3 J}{du_0^3} = 0.$$

⁵encontrar los valores de los coeficientes a_i 's en la solución propuesta.

Ecuación diferencial de la órbita

Teorema de Bertrand: condiciones para órbitas cerradas

Usando las relaciones de los coeficientes a_1 , a_2 , a_0 en la ec. anterior:

$$\frac{2a_1a_0 + a_1a_2}{2} \frac{d^2J}{du_0^2} + \frac{a_1^3}{8} \frac{d^3J}{du_0^3} = 0,$$

$$\Rightarrow \frac{5}{\beta^2} \left(\frac{d^2J}{du_0^2} \right)^2 + 3 \frac{d^3J}{du_0^3} = 0,$$

$$\therefore \beta^2(1 - \beta^2)(4 - \beta^2) = 0,$$

por tanto, para **desviaciones** de la órbita circular tenemos,

$$\beta^2 = 1 \rightarrow f(r) = -\frac{k}{r^2},$$

$$\beta^2 = 4 \rightarrow f(r) = -kr,$$

\therefore las únicas dos fuerzas que generan órbitas cerradas a cualquier valor de E y l (que den órbitas acotadas) desviándose de la órbita circular son la fuerza de **inverso cuadrado** y la **ley de Hooke**.

3. Fuerzas centrales

3.1 Reducción a un problema de una partícula

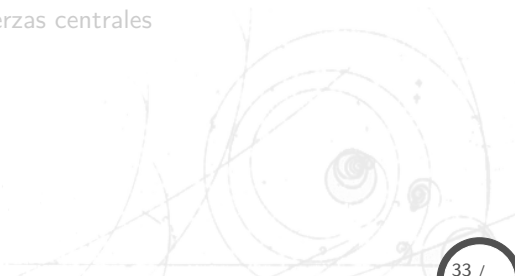
3.2 Ecuaciones de movimiento

3.3 Clasificación de las órbitas

3.4 Ecuación diferencial de la órbita y teorema de Bertrand

3.5 Problema de Kepler

3.6 Dispersión en un campo de fuerzas centrales



Problema de Kepler

Fuerzas tipo inverso cuadrado

Para sistemas con campo de fuerzas tipo **inverso cuadrado**,

$$f = -\frac{k}{r^2}, \quad V = -\frac{k}{r},$$

se tiene que la **ecuación de la órbita** se expresa como:

$$\theta - \theta' = \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2m}{l^2} \left(E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2} \right)}},$$
$$\rightarrow \theta = \theta' - \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} + \frac{2mku}{l^2} - u^2}} \quad \forall \quad u = 1/r,$$

se observa que la integral anterior tiene la siguiente solución general,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2}} = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \text{ArcCos} \left(-\frac{\beta + 2\gamma x}{\sqrt{q}} \right) \quad \forall \quad q = \beta^2 - 4\alpha\gamma.$$

Problema de Kepler

Fuerzas tipo inverso cuadrado

Para el problema del campo de fuerzas expuesto⁶, se tiene que:

$$\alpha = \frac{2mE}{l^2}, \quad \beta = \frac{2mk}{l^2}, \quad \gamma = -1, \quad q = \left(\frac{2mk}{l^2}\right)^2 \left(1 + \frac{2El^2}{mk^2}\right),$$

entonces la **ecuación de la órbita** viene dada por:

$$\theta = \theta' - \text{ArcCos} \left(\frac{\frac{l^2 u}{mk} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}} \right),$$

la cual, resolviendo para $u = 1/r$, nos arroja:

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}} \text{Cos}(\theta - \theta') \right),$$

en donde θ' representa uno de los *turning angles* de la órbita obtenida.

⁶inverso cuadrado.

Problema de Kepler

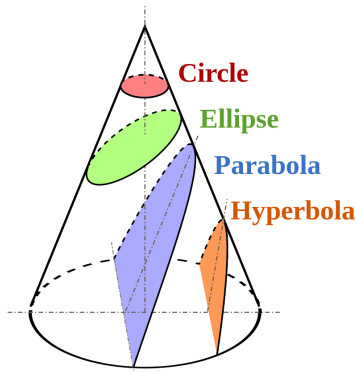
Fuerzas tipo inverso cuadrado: curvas de sección cónica

Por otro lado, se sabe que la ecuación de las curvas de **sección cónica** vienen expresadas en coordenadas polares como:

$$\frac{1}{r} = C[1 + e\cos(\theta - \theta')] \quad \forall \quad e = \text{excentricidad.}$$

Se tienen diferentes curvas, dependiendo del corte en la sección cónica:

- **Círculo** → plano paralelo a la base.
- **Elipse** → plano oblicuo
- **Parábola** → plano paralelo a una línea generadora.
- **Hipérbola** → plano no-paralelo.



Problema de Kepler

Fuerzas tipo inverso cuadrado: clasificación de órbitas

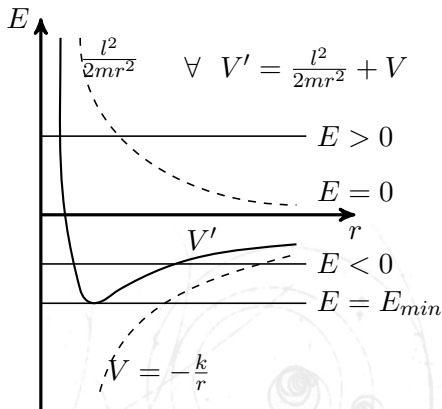
Relacionando lo anterior con la ecuación de la órbita $r(\theta)$ obtenida, encontramos que la **excentricidad** e queda expresada como:

$$e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}, \quad \text{con: } C = \frac{mk}{l^2}.$$

Clasificación

- $e > 1 \Rightarrow E > 0 \rightarrow$ hipérbola
- $e = 1 \Rightarrow E = 0 \rightarrow$ parábola
- $e < 1 \Rightarrow E < 0 \rightarrow$ elipse
- $e = 0 \Rightarrow E = E_{min} \rightarrow$ círculo

en donde $E_{min} = -mk^2/2l^2$.



Problema de Kepler

Ecuaciones de movimiento: $r(t)$ y $\theta(t)$

Recordemos las **ecuaciones de movimiento** para potenciales centrales,

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{E + \frac{k}{r} - \frac{l^2}{2mr^2}}} \Rightarrow r(t),$$

$$t = \frac{l^3}{mk^2} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{[1 + e \cos(\theta - \theta')]^2} \Rightarrow \theta(t) \quad \forall \quad dt = \frac{mr(\theta)^2}{l} d\theta,$$

en donde se ha utilizado la ecuación de la órbita $r(\theta)$ obtenida anteriormente y la expresión para la excentricidad e .

En general, estas ecuaciones se pueden expresar en términos de funciones elementales, sin embargo la inversión de las mismas es complicada, por ejemplo en casos de órbitas **parabólicas** o **elípticas**.

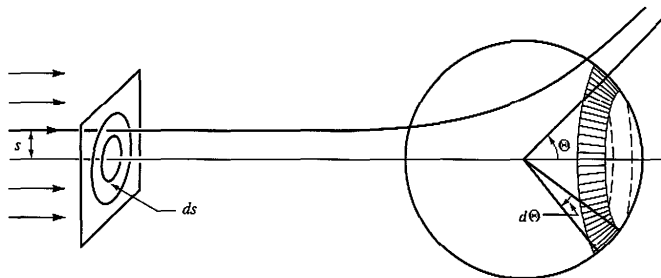
3. Fuerzas centrales

- 3.1 Reducción a un problema de una partícula
- 3.2 Ecuaciones de movimiento
- 3.3 Clasificación de las órbitas
- 3.4 Ecuación diferencial de la órbita y teorema de Bertrand
- 3.5 Problema de Kepler
- 3.6 Dispersión en un campo de fuerzas centrales



Dispersión en un campo de fuerzas centrales

Sección transversal



En el problema de **dispersión** de una haz de partículas por un centro de fuerzas tenemos lo siguiente:

- **Intensidad I** : número de partículas atravesando una unidad de área normal al haz por unidad de tiempo.
- **Sección transversal $d\sigma(\Omega)$** :

$$d\sigma(\Omega) = \frac{\text{num. de part. dispersadas en } d\omega \text{ por unidad de tiempo}}{\text{intensidad incidente}} = \frac{dN}{I}$$

Dispersión en un campo de fuerzas centrales

Sección transversal

Analizando la expresión de la **sección transversal**,

$$d\sigma(\Omega) = dN/I,$$

sabemos que,

partículas **incidentes** en ds = partículas **dispersas** en $d\Omega$,

por tanto,

$$2\pi s ds I = dN \Rightarrow 2\pi s ds = dN/I = d\sigma(\Omega).$$

Expresando $d\sigma$ por unidad de ángulo de dispersión, $d\Omega$:

$$\frac{d\sigma(\Omega)}{d\Omega} = \frac{2\pi s ds}{2\pi \text{Sen } \Theta d\Theta} \Rightarrow \frac{d\sigma(\Theta)}{d\Omega} = \frac{s}{\text{Sen } \Theta} \left| \frac{ds}{d\Theta} \right|,^7$$

obteniendo el **elemento diferencial** de la sección transversal en Θ .

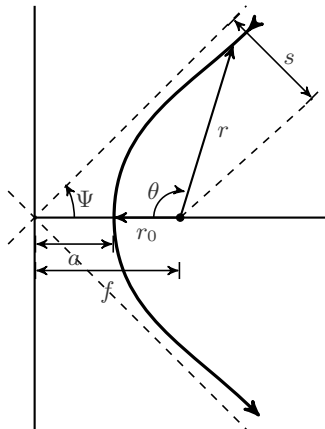
⁷En donde lleva el absoluto ya que $d\sigma(\Theta)/d\Omega > 0$ mientras que $ds/d\Theta < 0$.

Dispersión en un campo de fuerzas centrales

Dispersión

Por tanto, para conocer la naturaleza de la **dispersión** debemos conocer las trayectorias de **entrada** y **salida** del haz.

Tales trayectorias la podemos conocer gracias a la **ec. de la órbita**,



$$\frac{1}{r} = C[1 + e \cos(\theta - \theta')],$$

$$\forall C = \frac{mk}{l^2}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}} > 1,$$

considerando las prop. de la **hipérbola**,

$$e = \frac{f}{a} > 1, \quad a^2 + s^2 = f^2, \quad \cos \Psi = \frac{1}{e},$$

con las sig. condiciones para E y l :

$$E = mv_0^2/2, \quad l = mv_0s \quad \forall v_0 = v(r \rightarrow \infty)$$

Dispersión en un campo de fuerzas centrales

Dispersión

Expresando los elementos de la **ec. de la órbita**, C y e , en términos de los parámetros del problema, v_0 y s :

$$C = \frac{mk}{l^2} = \frac{k}{mv_0^2 s^2}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{mv_0^2 s}{k}\right)^2}.$$

Otra propiedad de interés es la **distancia mínima** r_0 a la que puede acercarse la partícula al centro de dispersión:

$$r_0 = f - a, \quad \text{pero } e = \frac{f}{a} \rightarrow r_0 = a(e - 1),$$

además: $f^2 = a^2 + s^2 \rightarrow a^2(e^2 - 1) = s^2,$

$$\therefore a = \frac{s}{(e - 1)^{1/2}(e + 1)^{1/2}},$$

sustituyendo, $r_0 = s \left(\frac{e - 1}{e + 1}\right)^{1/2}.$

Dispersión en un campo de fuerzas centrales

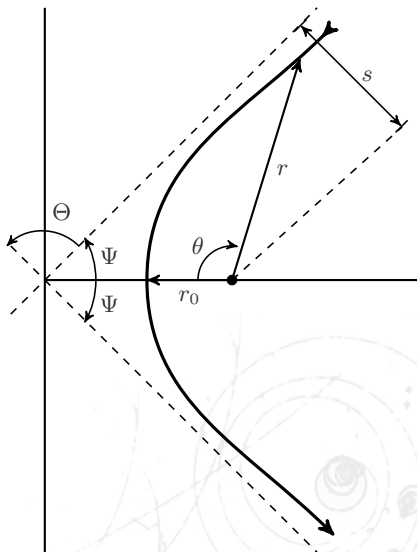
Dispersión

De la **sección transversal** $d\sigma(\Omega)$ se observó que ésta depende de $d\Omega$, la cual viene dada como:

$$d\Omega = 2\pi \text{Sen } \Theta d\Theta,$$

donde Θ es el **ángulo de dispersión** entre el haz incidente y el reflejado, con:

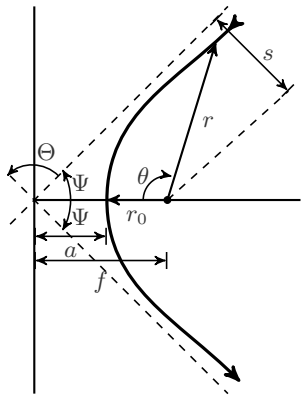
$$\Theta = \pi - 2\Psi.$$



Dispersión en un campo de fuerzas centrales

Dispersión

Expresando Θ en términos de los parámetros del problema, v_0 y s :



$$\Theta = \pi - 2\Psi \rightarrow \frac{\Theta}{2} = \frac{\pi}{2} - \Psi,$$

$$\therefore \text{Sen} \frac{\Theta}{2} = \text{Cos} \Psi = \frac{1}{e}.$$

$$\begin{aligned} \text{Cos} \frac{\Theta}{2} &= \text{Cos} \left(\frac{\pi}{2} - \Psi \right), \\ &= \text{Sen} \Psi = \frac{s}{f}, \end{aligned}$$

$$\rightarrow \text{Cos} \frac{\Theta}{2} = \frac{s}{ae} = \frac{(e^2 - 1)^{1/2}}{e}.$$

Relacionando,

$$\text{Ctg} \frac{\Theta}{2} = \frac{\text{Cos} (\Theta/2)}{\text{Sen} (\Theta/2)},$$

$$\rightarrow \text{Ctg} \frac{\Theta}{2} = (e^2 - 1)^{1/2} = \frac{mv_0^2 s}{k},$$

$$\forall e^2 = 1 + \left(mv_0^2 s / k \right)^2.$$

Dispersión en un campo de fuerzas centrales

Dispersión de Rutherford

La **dispersión de Rutherford** está relacionada con la dispersión de partículas cargadas por un campo Coulómbico, el cual proviene de una carga fija $-Ze$ interactuando con part. incidentes de carga $-Z'e$, por tanto:

$$f = \frac{ZZ'e^2}{r^2}, \quad V(r) = \frac{ZZ'e^2}{r},$$

dando como resultado un campo de fuerzas y potencial **repulsivos**.

El análisis realizado previamente fue para un potencial **atractivo**,

$$V(r) = -k/r,$$

sin embargo, podemos utilizar los resultados obtenidos anteriormente haciendo,

$$k = -ZZ'e^2,$$

en donde la **energía** sigue siendo $E > 0$, y el **momento angular** l se conserva.

Dispersión en un campo de fuerzas centrales

Dispersión de Rutherford

Por tanto, de los resultados anteriores,

$$\frac{1}{r} = C [1 + \epsilon \cos(\theta - \theta')], \quad \text{Ctg} \frac{\Theta}{2} = \frac{mv_0^2 s}{k},$$
$$\forall C = \frac{k}{mv_0^2 s^2}, \quad \epsilon = \sqrt{1 + \left(\frac{mv_0^2 s}{k}\right)^2},$$

realizamos la sustitución $k = -ZZ'e^2$, obteniendo:

$$\frac{1}{r} = C [1 - \epsilon \cos \theta], \quad \text{Ctg} \frac{\Theta}{2} = \frac{mv_0^2 s}{ZZ'e^2},$$
$$\forall C = \frac{-ZZ'e^2}{mv_0^2 s^2}, \quad \epsilon = \sqrt{1 + \left(\frac{mv_0^2 s}{ZZ'e^2}\right)^2},$$

en donde hemos aplicado la condición inicial $\theta' = \pi$.

Dispersión en un campo de fuerzas centrales

Dispersión de Rutherford

Aplicando las ecs. anteriores a la expresión para la **sección transversal**,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{s}{\text{Sen } \Theta} \left| \frac{ds}{d\Theta} \right| \quad \forall \quad s = \frac{ZZ'e^2}{mv_0^2} \text{Ctg } \frac{\Theta}{2},$$

por tanto,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{ZZ'e^2}{mv_0^2} \frac{\text{Ctg } (\Theta/2)}{2\text{Sen } (\Theta/2)\text{Cos } (\Theta/2)} \left| \frac{ZZ'e^2}{mv_0^2} \frac{-1}{2\text{Sen}^2(\Theta/2)} \right|,$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4} \left(\frac{ZZ'e^2}{mv_0^2} \right)^2 \frac{1}{\text{Sen}^4(\Theta/2)},$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4} \left(\frac{ZZ'e^2}{2E} \right)^2 \text{Csc}^4(\Theta/2).$$

Dispersión en un campo de fuerzas centrales

Dispersión de Rutherford: problema inverso

En experimentos de dispersión, lo que se obtiene es la **sección transversal** o información relacionada a ella, y lo que se pretende obtener es el **campo de fuerzas** o **potencial** que produce tal dispersión:

$$\frac{d\sigma(\Theta)}{d\Omega} = \frac{s}{\text{Sen}\Theta} \left| \frac{ds}{d\Theta} \right| \Rightarrow \Theta(s).$$

Para ese fin, retomemos la **ecuación integral** de la órbita:

$$\int_{\infty}^{r_0} d\theta = \int_{\infty}^{r_0} \frac{dr}{r^2 \left(\frac{2m}{l^2} \right)^{1/2} \sqrt{E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2}}},$$

en donde aplicando $l = mv_0s$ y $E = mv_0^2/2$ obtenemos:

$$\int_{\infty}^{r_0} d\theta = \Psi - \pi = \int_{\infty}^{r_0} \frac{sdr}{r\sqrt{r^2(1 - V(r)/E) - s^2}}.$$

Dispersión en un campo de fuerzas centrales

Dispersión de Rutherford: problema inverso

En la ec. anterior relacionamos Ψ con el ángulo de dispersión Θ :

$$\Theta = \pi - 2s \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r\sqrt{r^2(1 - V(r)/E) - s^2}} \quad \forall \quad \Theta = \pi - 2\Psi,$$

y definiendo la función $y(r)$:

$$y(r) \equiv r\sqrt{1 - V(r)/E},$$

se substituye en la ec. de la órbita, arrojando:

$$I = 2s \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r\sqrt{y^2 - s^2}} \quad \forall \quad \pi - \Theta = I,$$

en donde $s(\Theta)$ es conocido, y por tanto $I = I(\Theta)$, así como también se ha asumido que $y(r)$ es **invertible**, de tal manera que se pueda obtener $V(r)$.

Dispersión en un campo de fuerzas centrales

Dispersión de Rutherford: problema inverso

Aplicando la condición de que $y(r)$ sea invertible \rightarrow existe una $r(y)$, por tanto, haciendo el cambio de variable en la integral anterior:

$$I = 2s \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r\sqrt{y^2 - s^2}} = 2s \int_s^{\infty} \frac{r'(y)dy}{r(y)\sqrt{y^2 - s^2}} = 2s \int_s^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{y^2 - s^2}} \frac{d}{dy} \ln r$$

en donde $dr = r'(y)dy$ y s representa el límite debido a que es la raíz del radical.

Como tenemos que $\pi - \Theta = I$, entonces expresemos π en términos integrales al estilo de I :

$$\pi = 2s \int_s^{\infty} \frac{dy}{y\sqrt{y^2 - s^2}} = 2s \int_s^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{y^2 - s^2}} \frac{d}{dy} \ln y,$$

sustituyendo las expresiones integrales de I , π y relacionando se tiene:

$$\Theta(s) = \pi - I = 2s \int_s^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{y^2 - s^2}} \frac{d}{dy} \ln \left(\frac{y}{r} \right).$$

Dispersión en un campo de fuerzas centrales

Dispersión de Rutherford: problema inverso

En vez de resolver la integral anterior, definamos una función relacionada, desde la cual se pueda obtener $y(r)$, en el supuesto de que es posible resolverla:

$$T(y) = \frac{1}{\pi} \int_y^\infty \frac{\Theta(s) ds}{\sqrt{s^2 - y^2}},$$

sustituyendo en la integral la expresión de $\Theta(s)$ obtenida anteriormente,

$$T(y) = \frac{1}{\pi} \int_y^\infty \frac{2s}{\sqrt{s^2 - y^2}} \left[\int_s^\infty \frac{du}{\sqrt{u^2 - s^2}} \frac{d}{du} \ln \left(\frac{u}{r(u)} \right) \right] ds,$$

e invirtiendo el orden de las integrales,⁸ se tiene:

$$T(y) = \frac{1}{\pi} \int_y^\infty \left[\frac{d}{du} \ln \left(\frac{u}{r(u)} \right) \right] \left[\int_y^u \frac{2s ds}{\sqrt{s^2 - y^2} \sqrt{u^2 - s^2}} \right] du.$$

⁸y sus límites, ya que $y < s < u$

Dispersión en un campo de fuerzas centrales

Dispersión de Rutherford: problema inverso

Para resolver lo anterior primero se integra en s , obteniendo:

$$\int_y^u \frac{2s ds}{\sqrt{s^2 - y^2} \sqrt{u^2 - s^2}} = \pi,$$

por tanto,

$$T(y) = \int_y^\infty \frac{d}{du} \ln \left(\frac{u}{r(u)} \right) du, = \ln \left(\frac{r(y)}{y} \right),$$

de donde se puede obtener $y(r)$,

$$y \exp(T(y)) = r(y),$$

siendo que $T(y)$ es en principio conocida, ya que proviene de la integral relacionada con $\Theta(s)$, con lo que finalmente se puede calcular el **potencial** $V(r)$:

$$y = r \sqrt{1 - V(r)/E} \quad \Rightarrow \quad V(r) = \left(1 - y^2/r^2\right) E.$$