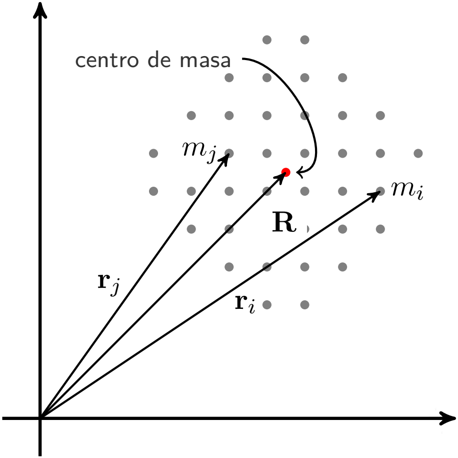
Contenido: Tema 04

Contenido: Tema 04

Cosenos directores

Coordenadas independientes de un cuerpo rígido

Para definir el movimiento de un **cuerpo rígido** de N partículas, de las $3N$ coordenadas sólo se necesitan de **seis** coordenadas independientes:



- **Tres** coordenadas externas $\mathbf{R}$, que especifiquen la posición de algún punto de referencia en el sólido,
- **Tres** coordenadas adicionales $\mathbf{r}_o$ para especificar como el sólido está orientado con respecto a las coordenadas externas.

Lo anterior se debe a las constricciones de **rigidez** del sólido:

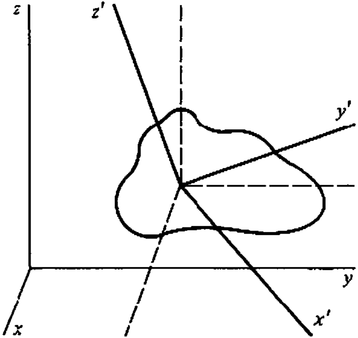
$$r_{ij} = c_{ij} \quad \forall \quad c_{ij} = \text{cte.},$$

donde: $\quad r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|.$

Cosenos directores

Coordenadas independientes de un cuerpo rígido

Para asignar tales coordenadas usaremos lo siguiente,

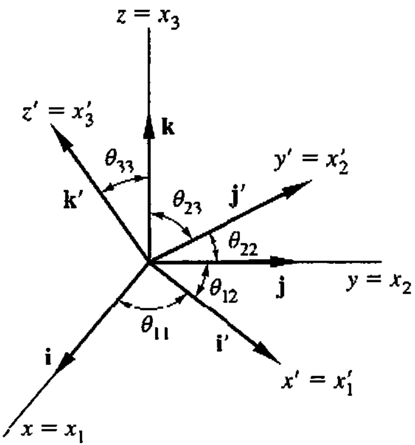


- **Ejes *dashed***: tres coordenadas para especificar el **orígen** de este set fijo en el sólido, referente al sistema coord. externo.
- **Ejes primados**: tres coordenadas para especificar la **orientación** de éstos relativo a un set paralelo (con el mismo origen) al set externo.

Cosenos directores

Definición

Para definir tal orientación, usaremos los **cosenos directores**,



en donde,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cos}\,\theta_{11} &= \mathbf{i}' \cdot \mathbf{i} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{i}',\\
\mathrm{Cos}\,\theta_{12} &= \mathbf{i}' \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{i}',\\
\mathrm{Cos}\,\theta_{21} &= \mathbf{j}' \cdot \mathbf{i} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{j}',\\
\mathrm{Cos}\,\theta_{22} &= \mathbf{j}' \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j}',\\
\mathrm{Cos}\,\theta_{23} &= \mathbf{j}' \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{j}',\\
\vdots \quad & \quad \vdots \quad\quad \vdots
\end{aligned}
$$

definiendo, en general, θ_{ij} tal que:

- i se refiere al sistema **primado**,
- j al sistema de **referencia** (no primado).

Cosenos directores

Reglas de transformación

Tal definición de los cosenos directores puede ser utilizada para expresar los vectores **unitarios** de un sistema en términos del otro:

$$\begin{aligned}
\mathbf{i}' &= \mathrm{Cos}\,\theta_{11}\mathbf{i} + \mathrm{Cos}\,\theta_{12}\mathbf{j} + \mathrm{Cos}\,\theta_{13}\mathbf{k},\\
\mathbf{j}' &= \mathrm{Cos}\,\theta_{21}\mathbf{i} + \mathrm{Cos}\,\theta_{22}\mathbf{j} + \mathrm{Cos}\,\theta_{23}\mathbf{k},\\
\mathbf{k}' &= \mathrm{Cos}\,\theta_{31}\mathbf{i} + \mathrm{Cos}\,\theta_{32}\mathbf{j} + \mathrm{Cos}\,\theta_{33}\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

De igual manera, se pueden especificar los $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, y $\mathbf{k}$ en términos del sistema primado:

$$\begin{aligned}
\mathbf{i} &= \mathrm{Cos}\,\theta_{11}\mathbf{i}' + \mathrm{Cos}\,\theta_{21}\mathbf{j}' + \mathrm{Cos}\,\theta_{31}\mathbf{k}',\\
\mathbf{j} &= \mathrm{Cos}\,\theta_{12}\mathbf{i}' + \mathrm{Cos}\,\theta_{22}\mathbf{j}' + \mathrm{Cos}\,\theta_{32}\mathbf{k}',\\
\mathbf{k} &= \mathrm{Cos}\,\theta_{13}\mathbf{i}' + \mathrm{Cos}\,\theta_{23}\mathbf{j}' + \mathrm{Cos}\,\theta_{33}\mathbf{k}'.
\end{aligned}$$

Por tanto, este set de **nueve** cosenos directores especifican completamente la orientación de un set respecto al otro.[1]

[1] por ejemplo, el primado referente al no-primado.

Cosenos directores

Descripción del vector de posición $\mathbf{r}$

Con las relaciones anteriores, se puede expresar un vector de posición $\mathbf{r}$ como:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}',$$

en donde:

$$\begin{aligned}
x' &= \mathbf{r}\cdot\mathbf{i}' = \mathrm{Cos}\,\theta_{11}x + \mathrm{Cos}\,\theta_{12}y + \mathrm{Cos}\,\theta_{13}z,\\
y' &= \mathbf{r}\cdot\mathbf{j}' = \mathrm{Cos}\,\theta_{21}x + \mathrm{Cos}\,\theta_{22}y + \mathrm{Cos}\,\theta_{23}z,\\
z' &= \mathbf{r}\cdot\mathbf{k}' = \mathrm{Cos}\,\theta_{31}x + \mathrm{Cos}\,\theta_{32}y + \mathrm{Cos}\,\theta_{33}z,
\end{aligned}$$

o también en términos de $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, y $\mathbf{k}$,

$$\begin{aligned}
x &= \mathbf{r}\cdot\mathbf{i} = \mathrm{Cos}\,\theta_{11}x' + \mathrm{Cos}\,\theta_{21}y' + \mathrm{Cos}\,\theta_{31}z',\\
y &= \mathbf{r}\cdot\mathbf{j} = \mathrm{Cos}\,\theta_{12}x' + \mathrm{Cos}\,\theta_{22}y' + \mathrm{Cos}\,\theta_{32}z',\\
z &= \mathbf{r}\cdot\mathbf{k} = \mathrm{Cos}\,\theta_{13}x' + \mathrm{Cos}\,\theta_{23}y' + \mathrm{Cos}\,\theta_{33}z'.
\end{aligned}$$

Cosenos directores

Descripción de un vector genérico

En general, los cosenos directores se pueden aplicar para transformar cualquier vector $\mathbf{G}$ de un sistema de referencia a otro:

$$G_{x'} = \mathbf{G}\cdot\mathbf{i}' = \mathrm{Cos}\,\theta_{11}G_x + \mathrm{Cos}\,\theta_{12}G_y + \mathrm{Cos}\,\theta_{13}G_z,$$
$$G_{y'} = \mathbf{G}\cdot\mathbf{j}' = \mathrm{Cos}\,\theta_{21}G_x + \mathrm{Cos}\,\theta_{22}G_y + \mathrm{Cos}\,\theta_{23}G_z,$$
$$G_{z'} = \mathbf{G}\cdot\mathbf{k}' = \mathrm{Cos}\,\theta_{31}G_x + \mathrm{Cos}\,\theta_{32}G_y + \mathrm{Cos}\,\theta_{33}G_z,$$

de tal manera que el set de **nueve** cosenos directores describe **completamente** la transformación de un sist. de coordenadas a otro.

Sin embargo, sólo se necesitan **tres** coordenadas independientes que den información sobre la orientación del sólido, por tanto, los cosenos directores no son **independientes**, si no que estan relacionados mediante las condiciones de **ortogonalidad**:

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = 0, \qquad \mathbf{i}'\cdot\mathbf{j}' = \mathbf{j}'\cdot\mathbf{k}' = \mathbf{k}'\cdot\mathbf{i}' = 0,$$
$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1, \qquad \mathbf{i}'\cdot\mathbf{i}' = \mathbf{j}'\cdot\mathbf{j}' = \mathbf{k}'\cdot\mathbf{k}' = 1,$$

Cosenos directores

Condiciones de ortogonalidad

Hallando las expresiones generales de **ortogonalidad** (ejem. $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$),

$$
\begin{aligned}
\mathbf{i} &= \mathrm{Cos}\,\theta_{11}\mathbf{i}' + \mathrm{Cos}\,\theta_{21}\mathbf{j}' + \mathrm{Cos}\,\theta_{31}\mathbf{k}', \\
\mathbf{j} &= \mathrm{Cos}\,\theta_{12}\mathbf{i}' + \mathrm{Cos}\,\theta_{22}\mathbf{j}' + \mathrm{Cos}\,\theta_{32}\mathbf{k}', \\
\Rightarrow \quad \mathbf{i}\cdot\mathbf{j} &= \mathrm{Cos}\,\theta_{11}\mathrm{Cos}\,\theta_{12} + \mathrm{Cos}\,\theta_{21}\mathrm{Cos}\,\theta_{22} + \mathrm{Cos}\,\theta_{31}\mathrm{Cos}\,\theta_{32} = 0, \\
\Rightarrow \quad \mathbf{i}\cdot\mathbf{i} &= \mathrm{Cos}\,\theta_{11}\mathrm{Cos}\,\theta_{11} + \mathrm{Cos}\,\theta_{21}\mathrm{Cos}\,\theta_{21} + \mathrm{Cos}\,\theta_{31}\mathrm{Cos}\,\theta_{31} = 1,
\end{aligned}
$$

y de manera análoga para los otros productos.

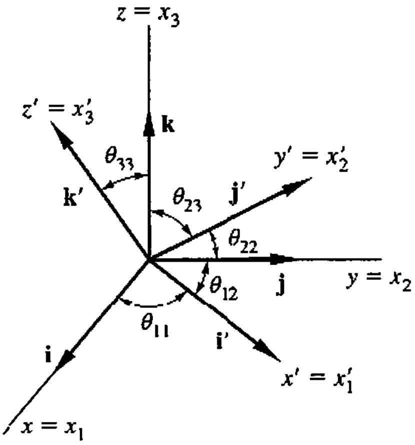
Por tanto, podemos expresar lo anterior de manera general,

$$
\sum_{l=1}^{3} \mathrm{Cos}\,\theta_{lm}\mathrm{Cos}\,\theta_{lm'} = 0 \quad \forall \quad m \neq m' \quad \& \quad \sum_{l=1}^{3} \mathrm{Cos}^2\,\theta_{lm} = 1,
$$

$$
\Rightarrow \quad \sum_{l=1}^{3} \mathrm{Cos}\,\theta_{lm}\mathrm{Cos}\,\theta_{lm'} = \delta_{mm'},
$$

reduciendo el sistema de **nueve** a **tres** coordenadas independientes.

Para hacer uso de los **cosenos directores**, se propone el siguiente cambio de nomenclatura,



$$x \to x_1, \qquad y \to x_2,$$
$$z \to x_3, \qquad \mathrm{Cos}\,\theta_{ij} \to a_{ij},$$

por tanto redefinimos la transformación de $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ al sistema primado,

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,$$
$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,$$
$$x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3,$$

lo cual representa una **transformación lineal** del sistema coordenado $\{x_1, x_2, x_3\}$ al $\{x_1', x_2', x_3'\}$.

Transformaciones ortogonales

Definiciones

Aplicando la nomenclatura de Einstein a la transformación anterior,

$$\Rightarrow \quad x'_i = a_{ij} x_j \;\; \forall \;\; i,j = 1,2,3,$$

se pueden definir relaciones entre los coeficientes, tal como la conservación del módulo del vector:

$$x'_i x'_i = x_i x_i,$$

por tanto,

$$a_{ij} x_j a_{ik} x_k = x_i x_i,$$

lo cual se cumple si,

$$a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk} \;\; \forall \;\; j,k = 1,2,3.$$

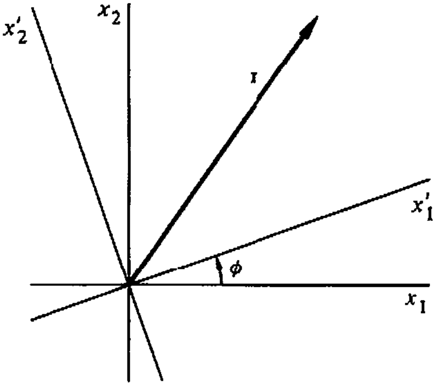
De lo anterior se tiene que la transformación, junto con la condición previa, definen una **transformación ortogonal**, siendo que los cosenos directores,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

representan la **matriz de transformación** y los elementos a_{ij} son los **elementos de matriz** de dicha transformación.

Transformaciones ortogonales

Ejemplo: rotación en un plano



Para este caso tenemos que la matriz de transformación es,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

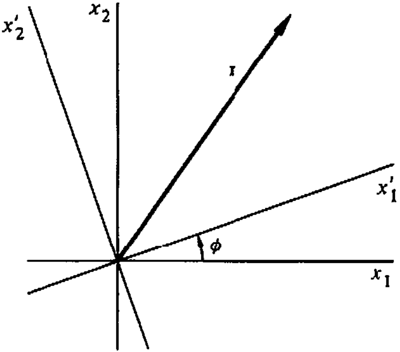
en donde los elementos de matriz a_{ij} cumplen con lo siguiente:

$$a_{ij}a_{ik} = \delta_{jk} \quad \forall \quad j,k = 1,2.$$

Por tanto, sólo un parámetro independiente es necesario para especificar la transformación, el cual es en este caso el **ángulo de rotación ϕ**.

Transformaciones ortogonales

Ejemplo: rotación en un plano



Expresando en términos de ϕ la transformación anterior:

$$
\begin{aligned}
& x'_1 = x_1 \mathrm{Cos}\,\theta_{11} + x_2 \mathrm{Cos}\,\theta_{12}, \\
\rightarrow\ & x'_1 = x_1 \mathrm{Cos}\,\phi + x_2 \mathrm{Sen}\,\phi, \\
& x'_2 = x_1 \mathrm{Cos}\,\theta_{21} + x_2 \mathrm{Cos}\,\theta_{22}, \\
\rightarrow\ & x'_2 = -x_1 \mathrm{Sen}\,\phi + x_2 \mathrm{Cos}\,\phi, \\
& x'_3 = x_3,
\end{aligned}
$$

por tanto los **elementos de matriz** de la transformación son,

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= \mathrm{Cos}\,\phi, & a_{12} &= \mathrm{Sen}\,\phi, & a_{13} &= 0, \\
a_{21} &= -\mathrm{Sen}\,\phi, & a_{22} &= \mathrm{Cos}\,\phi, & a_{23} &= 0, \\
a_{31} &= 0, & a_{32} &= 0, & a_{33} &= 1.
\end{aligned}
$$

Transformaciones ortogonales

Ejemplo: rotación en un plano

Construyendo ahora la **matriz de transformación**,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathrm{Cos}\,\phi & \mathrm{Sen}\,\phi & 0 \\ -\mathrm{Sen}\,\phi & \mathrm{Cos}\,\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Analizando la condición de **ortogonalidad**,[2]

$$a_{11}a_{11} + a_{21}a_{21} = 1,$$
$$a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0,$$
$$a_{12}a_{12} + a_{22}a_{22} = 1,$$

en donde se sustituyen los elementos de matriz obtenidos,

$$\mathrm{Cos}^2\,\phi + \mathrm{Sen}^2\,\phi = 1,$$
$$\mathrm{Cos}\,\phi\mathrm{Sen}\,\phi - \mathrm{Sen}\,\phi\mathrm{Cos}\,\phi = 0,$$
$$\mathrm{Sen}^2\,\phi + \mathrm{Cos}^2\,\phi = 1.$$

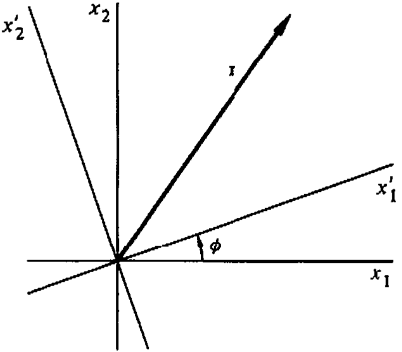
[2] $a_{ij}a_{ik} = \delta_{jk}$

Transformaciones ortogonales

Clasificación de las transformaciones

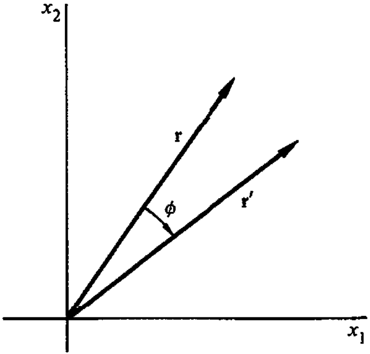
La matriz $\mathbf{A}$ la podemos considerar como un **operador** tal que $\mathbf{r}' = \mathbf{A}\mathbf{r}$.

Transformación **pasiva**



Sólo afecta al **sist. coordenado**, expresando alguna función en términos del nuevo sistema coordenado.

Transformación **activa**



Afecta a la **función** en sí, cambiándola en una nueva función en el mismo sistema coordenado.

Transformaciones ortogonales

Propiedades generales

Tenemos $\mathbf{B}$ y $\mathbf{A}$ tal que:

$$x'_k = b_{kj}x_j \quad \& \quad x''_i = a_{ik}x'_k,$$

si definimos el producto:

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB},$$
$$\rightarrow \quad c_{ij} = a_{ik}b_{kj}.$$

El producto de matrices no es **conmutativo**, pero si **asociativo**:

$$\mathbf{BA} \neq \mathbf{AB},$$
$$\text{ya que:} \quad [\mathbf{BA}]_{ij} = b_{ik}a_{kj} \neq c_{ij},$$
$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}).$$

La **adición** de matrices se define como:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B},$$
$$\rightarrow \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},$$

así también la op. de **inversión**, con $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}^-1$ tal que:

$$x'_k = a_{ki}x_i, \quad x_i = a'_{ij}x'_j,$$
$$\rightarrow \quad x'_k = a_{ki}a'_{ij}x'_j,$$

en donde se debe cumplir:

$$a_{ki}a'_{ij} = \delta_{kj},$$
$$\therefore \quad \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{1}.$$

Transformaciones ortogonales

Propiedades generales

Se cumple de igual manera que para matrices **ortogonales**:

$$\mathbf{A}^{-1} = \tilde{\mathbf{A}} \;\rightarrow\; a'_{ij} = a_{ji},$$
$$\therefore \quad \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{A} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{1}.$$

En particular, para una matriz cuadrada $\mathbf{A}$,

$$a_{ij} = a_{ji} \;\rightarrow\; \text{simétrica},$$
$$a_{ij} = -a_{ji} \;\rightarrow\; \text{antisimétrica}.$$

Para la transf. de un **operador** bajo un cambio de coordenadas,

$$\mathbf{G} = \mathbf{AF},$$
$$\rightarrow \mathbf{BG} = \mathbf{BAF},$$

pero también,

$$\mathbf{BG} = \mathbf{BAB}^{-1}\mathbf{BF},$$
$$\therefore \quad \mathbf{A}' = \mathbf{BAB}^{-1},$$

lo cual se conoce como una transformación de **similaridad**.

Finalmente tenemos que para el **determinante**,

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|,$$

y si la matriz $\mathbf{A}$ es ortogonal:

$$\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{1},$$
$$\rightarrow \quad |\mathbf{A}||\tilde{\mathbf{A}}| = 1,$$
$$\therefore \quad |\mathbf{A}|^2 = 1.$$

Contenido: Tema 04

Ángulos de Euler

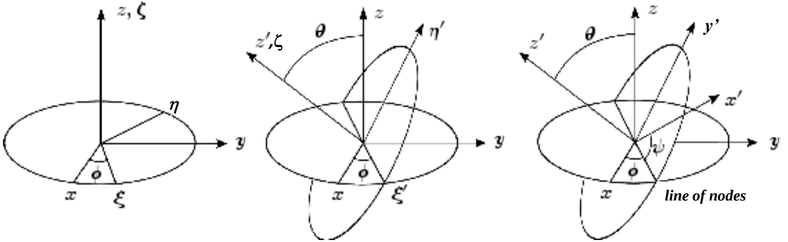
Introducción

- Para definir la orientación de un sólido en el espacio en la formulación Lagrangiana, es necesario un set adecuado de **coordenadas generalizadas**.[3]
- Los elementos de la **matriz de transformación ortogonal** pueden ser expresadas en términos de estas coordenadas generalizadas.
- Las matrices de transformación que representan la orientación de un sólido rígido deben de evolucionar de manera **continua** desde la matriz unidad (transformación *propia*: $\det = 1$).[4]
- Tal set debe contar de **tres** parámetros independientes, conocidos como los **ángulos de Euler**.
- Éstos son definidos como tres ángulos de rotación **sucesivos** tal que su aplicación realiza una transformación de un sistema coordenado a otro.

[3] los nueve elementos a_{ij} no son adecuados ya que no son independientes.
[4] por tanto una op. de *inversión* no es permitida ($\det = -1$).

Ángulos de Euler

Descripción: convención$-x$



Procedimiento

1. Rotar el sistema inicial xyz un ángulo ϕ en sentido antihorario alrededor del eje z, dando como resultado el sist. $\xi\eta\zeta$.
2. Rotar el sistema intermedio $\xi\eta\zeta$ un ángulo θ en sentido antihorario alrededor del eje ξ, produciendo el sist. $\xi'\eta'\zeta'$.
3. Finalmente, el sist. $\xi'\eta'\zeta'$ es rotado en sentido antihorario un ángulo ψ alrededor del eje ζ', produciendo el sist. $x'y'z'$.

Por tanto, los **ángulos de Euler** ϕ, θ, ψ especifican la orientación del sist. $x'y'z'$ y pueden ser utilizados como coord. generalizadas.

Ángulos de Euler

Descripción: convención$-x$

La matriz de transformación $\mathbf{A}$, del sistema xyz al $x'y'z'$, puede verse como el producto de **tres** transformaciones por separado:

La rotación inicial respecto z,

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{D}\mathbf{x},$$

también para la transformación de $\xi\eta\zeta$ a $\xi'\eta'\zeta'$:

$$\boldsymbol{\xi'} = \mathbf{C}\xi,$$

y por último la rotación a $x'y'z'$:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{B}\boldsymbol{\xi'},$$

teniendo al final,

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \;\; \forall \;\; \mathbf{A} = \mathbf{BCD}.$$

Definiendo cada una de las **matrices de rotación**,

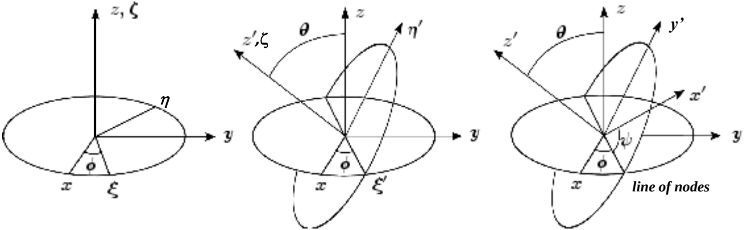
$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \operatorname{Cos}\phi & \operatorname{Sen}\phi & 0 \\ -\operatorname{Sen}\phi & \operatorname{Cos}\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{Cos}\theta & \operatorname{Sen}\theta \\ 0 & -\operatorname{Sen}\theta & \operatorname{Cos}\theta \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \operatorname{Cos}\psi & \operatorname{Sen}\psi & 0 \\ -\operatorname{Sen}\psi & \operatorname{Cos}\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ángulos de Euler

Descripción: convención$-x$



Por tanto, la matriz producto $\mathbf{A} = \mathbf{BCD}$ viene dada como:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathrm{Cos}\psi\mathrm{Cos}\phi - \mathrm{Cos}\theta\mathrm{Sen}\phi\mathrm{Sen}\psi & \mathrm{Cos}\psi\mathrm{Sen}\phi + \mathrm{Cos}\theta\mathrm{Cos}\phi\mathrm{Sen}\psi & \mathrm{Sen}\psi\mathrm{Sen}\theta \\ -\mathrm{Sen}\psi\mathrm{Cos}\phi - \mathrm{Cos}\theta\mathrm{Sen}\phi\mathrm{Cos}\psi & -\mathrm{Sen}\psi\mathrm{Sen}\phi + \mathrm{Cos}\theta\mathrm{Cos}\,\phi\mathrm{Cos}\psi & \mathrm{Cos}\psi\mathrm{Sen}\theta \\ \mathrm{Sen}\theta\mathrm{Sen}\phi & -\mathrm{Sen}\theta\mathrm{Cos}\phi & \mathrm{Cos}\theta \end{bmatrix},$$

y para la **transf. inversa** $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}'$ sabemos que $\mathbf{A}^{-1} = \tilde{\mathbf{A}}\ \therefore$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathrm{Cos}\psi\mathrm{Cos}\phi - \mathrm{Cos}\theta\mathrm{Sen}\phi\mathrm{Sen}\psi & -\mathrm{Sen}\psi\mathrm{Cos}\phi - \mathrm{Cos}\theta\mathrm{Sen}\phi\mathrm{Cos}\psi & \mathrm{Sen}\theta\mathrm{Sen}\phi \\ \mathrm{Cos}\psi\mathrm{Sen}\phi + \mathrm{Cos}\theta\mathrm{Cos}\phi\mathrm{Sen}\psi & -\mathrm{Sen}\psi\mathrm{Sen}\phi + \mathrm{Cos}\theta\mathrm{Cos}\,\phi\mathrm{Cos}\psi & -\mathrm{Sen}\theta\mathrm{Cos}\phi \\ \mathrm{Sen}\psi\mathrm{Sen}\theta & \mathrm{Cos}\psi\mathrm{Sen}\theta & \mathrm{Cos}\theta \end{bmatrix}.$$

Ángulos de Euler

Parámetros de Cayley-Klein

Son una representación de la **transf. ortogonal** en cuatro parámetros complejos dados por α, β, γ y δ con las constricciones $\beta = -\gamma^*$ y $\delta = \alpha^*$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\alpha^2 - \gamma^2 + \delta^2 - \beta^2) & \frac{i}{2}(\gamma^2 - \alpha^2 + \delta^2 - \beta^2) & \gamma\delta - \alpha\beta \\ \frac{i}{2}(\alpha^2 + \gamma^2 - \delta^2 - \beta^2) & \frac{1}{2}(\gamma^2 + \alpha^2 + \delta^2 + \beta^2) & -i(\gamma\delta + \alpha\beta) \\ \beta\delta - \alpha\gamma & i(\alpha\gamma + \beta\delta) & \alpha\delta + \beta\gamma \end{bmatrix},$$

donde $\mathbf{A}$ es real, ya que haciendo la sustitución:

$$\alpha = e_0 + ie_3, \quad \beta = e_2 + ie_1, \ \ \forall \ \ e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1,$$

se tiene:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} e_0^2 + e_1^2 - e_2^2 - e_3^2 & 2(e_1e_2 + e_0e_3) & 2(e_1e_3 - e_0e_2) \\ 2(e_1e_2 - e_0e_3) & e_0^2 - e_1^2 + e_2^2 - e_3^2 & 2(e_2e_3 + e_0e_1) \\ 2(e_1e_3 - e_0e_2) & 2(e_2e_3 - e_0e_1) & e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 + e_3^2 \end{bmatrix}.$$

Contenido: Tema 04

Teorema de Euler

Definición

Consideremos el caso de que la orientación de un sólido rígido varía[5] con el tiempo de una manera **continua**, entonces $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$ es una función continua en t, en donde a $t = 0$ se tiene $\mathbf{A}(0) = \mathbf{1}$.

Teorema de Euler

El desplazamiento general de un sólido rígido con un punto fijo en el espacio está dado como una rotación alrededor de algún eje.

El **teorema de Euler** involucra tres condiciones:

- Para cualquier rotación dada es posible encontrar un eje tal que al aplicar una rotación alrededor de él, se podrá reproducir la rotación original.
- Una dirección específica, el **eje de rotación**, no es afectada por tal rotación.
- La magnitud de los vectores presentes o involucrados no se ve afectada por el efecto de la rotación.

[5] si la posición también cambia, entonces bastará con incluir una traslación.

Teorema de Euler

Demostración

Para demostrar el teorema de Euler basta con encontrar un vector $\mathbf{R}$ tal que tenga las mismas componentes en ambos sist. de coordenados.

Es decir:

$$\mathbf{R}' = \mathbf{A}\mathbf{R} = \lambda\mathbf{R},$$

$$\Rightarrow \quad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{1})\mathbf{R} = 0,$$

$\therefore$ el **teorema de Euler** se traduce en que la matriz ortogonal que describe el movimiento del sólido rígido tiene $\lambda = +1$.

Expresando en forma matricial,

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = 0,$$

$\therefore$ tendremos **3** soluciones.

Para que la ecuación anterior tenga solución, se debe cumplir que $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{1}| = 0$,

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

expresando lo anterior en ecs.,

$$\sum_j a_{ij} X_{jk} = \sum_j X_{ij}\delta_{jk}\lambda_k,$$

en donde el primer subíndice de X_{ij} indica la componente y el segundo el eigenvector.

Teorema de Euler

Demostración

Regresando a la demostración, usemos la prop. de ortogonalidad,

$$(\mathbf{A}-\mathbf{1})\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{1}-\tilde{\mathbf{A}},$$

aplicando el determinante,

$$|\mathbf{A}-\mathbf{1}||\tilde{\mathbf{A}}| = |\mathbf{1}-\tilde{\mathbf{A}}|.$$

Sabemos que $|\mathbf{A}| = |\tilde{\mathbf{A}}| = +1$,

$$\rightarrow \quad |\mathbf{A}-\mathbf{1}| = |\mathbf{1}-\mathbf{A}|,$$

lo anterior se cumple cuando:

$$|\mathbf{A}-\mathbf{1}| = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = +1,$$

ya que $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{1}| = 0$.

Por tanto, uno de los eigenvalores λ de $\mathbf{A}$ tiene valor $+1$.

Para encontrar los demás, usemos la prop. de que la magnitud de un vector es invariante ante una transf. de coordenadas:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{\dagger\prime}\mathbf{R}' &= (\mathbf{A}\mathbf{R})^{\dagger}\mathbf{A}\mathbf{R}, \\ &= \mathbf{R}^{\dagger}\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A}\mathbf{R} = \mathbf{R}^{\dagger}\mathbf{R}, \end{aligned}$$

en donde hemos considerado el caso más general de que $\mathbf{R}$ y λ sean cantidades complejas,

$$\rightarrow \quad \mathbf{R}^{\dagger\prime}\mathbf{R}' = \lambda\lambda^{*}\mathbf{R}^{\dagger}\mathbf{R},$$

$$\therefore \quad \lambda\lambda^{*} = 1 \quad \forall \quad \mathbf{A}\mathbf{R} = \lambda\mathbf{R}$$

Teorema de Euler

Demostración

Lo anterior indica que **todos** los eigenvalores de la matriz $\mathbf{A}$ tienen una magnitud **unitaria**.[6]

De esto podemos extraer dos casos posibles:

- Si todos los eigenvalores son **reales**:
  - Todos los eigenvalores tienen valor $+1 \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{1} \Leftarrow$ caso trivial !!
  - Un eigenvalor es $+1$ y los otros dos son -1 $\Rightarrow$ tal transf. equivale a una **inversión** en 2D con el tercer eje sin cambios, o también a una **rotación** de π alrededor del eje que permanece sin cambios.
- Si **no** todos los eigenvalores son **reales**:
  - un eigenvalor es $+1$ y los otros dos son complejos conjugados de la forma $e^{i\Phi}$, $e^{-i\Phi}$.

Por tanto, podemos concluir del teorema de Euler que cualquier matriz ortogonal (que sea diferente de la unidad) tendra **un y sólo un** eigenvalor igual a $+1$.

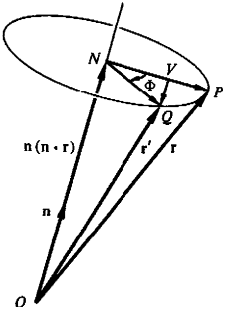
[6] $|\mathbf{A}| = 1 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$ debido a la transformación de similaridad: el determinante es invariante ante tal transformación.

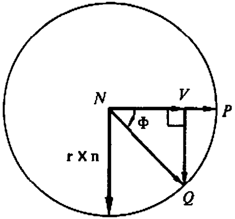
Contenido: Tema 04

Rotaciones finitas

Definición

Consideremos una rotación **activa**,





$$\mathbf{r}' = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NV} + \overrightarrow{VQ},$$

donde,

$$\overrightarrow{ON} = \mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}),$$
$$\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NQ} = \mathbf{r} - \mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}),$$
$$\overrightarrow{NV} = [\mathbf{r} - \mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})]\,\mathrm{Cos}\,\Phi,$$
$$\overrightarrow{VQ} = (\mathbf{r}\times\mathbf{n})\mathrm{Sen}\,\Phi,$$

sustituyendo las expresiones anteriores y reordenando:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}\mathrm{Cos}\Phi + \mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})(1 - \mathrm{Cos}\,\Phi) + (\mathbf{r}\times\mathbf{n})\mathrm{Sen}\,\Phi,$$

se obtiene la **fórmula de rotación** de un vector.

Rotaciones finitas

Relación con los ángulos de Euler

Para expresar el ángulo de rotación Φ asociado a $\mathbf{A}' = \mathbf{BAB}^{-1}$ en términos de los ángulos de Euler, usamos la invariancia de la traza,

$$\mathrm{Tr}\,\mathbf{A} = a_{ii} = \mathrm{Tr}\,\mathbf{A}',$$

donde,

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \mathrm{Cos}\,\Phi & \mathrm{Sen}\,\Phi & 0 \\ -\mathrm{Sen}\,\Phi & \mathrm{Cos}\,\Phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathrm{Cos}\psi\mathrm{Cos}\phi - \mathrm{Cos}\theta\mathrm{Sen}\phi\mathrm{Sen}\psi & \mathrm{Cos}\psi\mathrm{Sen}\phi + \mathrm{Cos}\theta\mathrm{Cos}\phi\mathrm{Sen}\psi & \mathrm{Sen}\psi\mathrm{Sen}\theta \\ -\mathrm{Sen}\psi\mathrm{Cos}\phi - \mathrm{Cos}\theta\mathrm{Sen}\phi\mathrm{Cos}\psi & -\mathrm{Sen}\psi\mathrm{Sen}\phi + \mathrm{Cos}\theta\mathrm{Cos}\,\phi\mathrm{Cos}\psi & \mathrm{Cos}\psi\mathrm{Sen}\theta \\ \mathrm{Sen}\theta\mathrm{Sen}\phi & -\mathrm{Sen}\theta\mathrm{Cos}\phi & \mathrm{Cos}\theta \end{bmatrix},$$

por tanto,

$$1 + 2\mathrm{Cos}\,\Phi = a_{ii} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Cos}\,\frac{\Phi}{2} = \mathrm{Cos}\,\frac{\phi+\psi}{2}\mathrm{Cos}\,\frac{\theta}{2}.$$

Rotaciones infinitesimales

Comparación con rotaciones finitas

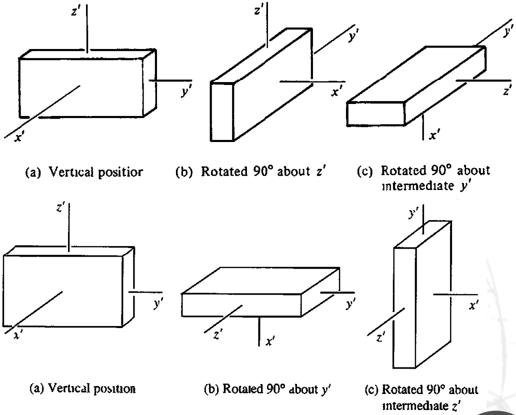
Si desearamos considerar la orientación de un sólido como una cantidad vectorial, siendo la dirección el eje de rotación, $\Rightarrow$ tales vectores, asociados con las transf. $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, deben cumplir la **conmutación aditiva**:

$$\mathbf{A}_v + \mathbf{B}_v = \mathbf{B}_v + \mathbf{A}_v,$$

analizando la adición de dos rotaciones, es decir, una aplicada después de otra:

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA},$$

por tanto, las **rotaciones finitas no** pueden ser consideradas como cantidades vectoriales.



Rotaciones infinitesimales

Definición

Rotación infinitesimal: transformación ortogonal de un sistema de ejes coordenados en el cual las componentes de un vector son **casi** las mismas en ambos sistemas.

Para una rotación infinitesimal,

$$x'_i = x_i + \epsilon_{ij} x_j,$$
$$\text{ó} \quad x'_i = (\delta_{ij} + \epsilon_{ij}) x_j,$$

en notación matricial:

$$\mathbf{x}' = (\mathbf{1} + \boldsymbol{\epsilon})\mathbf{x}.$$

$\therefore$ la transformación representa la identidad mas un operador **infinitesimal**.

Ahora, definiendo dos transf. infinitesimales **diferentes**, $\mathbf{1} + \boldsymbol{\epsilon}_1$ y $\mathbf{1} + \boldsymbol{\epsilon}_2$, entonces:

$$(\mathbf{1} + \boldsymbol{\epsilon}_1)(\mathbf{1} + \boldsymbol{\epsilon}_2) = \ldots$$
$$\ldots = \mathbf{1}^2 + \boldsymbol{\epsilon}_1\mathbf{1} + \mathbf{1}\boldsymbol{\epsilon}_2 + \boldsymbol{\epsilon}_1\boldsymbol{\epsilon}_2,$$
$$\therefore \; (\mathbf{1} + \boldsymbol{\epsilon}_1)(\mathbf{1} + \boldsymbol{\epsilon}_2) = \mathbf{1} + \boldsymbol{\epsilon}_1 + \boldsymbol{\epsilon}_2,$$

entonces, la **conmutación** de rotaciones infinitesimales **sí** es válida.

Al salvar la restricción de conmutación, ahora podemos definir a las **transformaciones infinitesimales** como cantidades vectoriales.

Expresemos la transformación $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathrm{Cos}\psi\mathrm{Cos}\phi - \mathrm{Cos}\theta\mathrm{Sen}\phi\mathrm{Sen}\psi & \mathrm{Cos}\psi\mathrm{Sen}\phi + \mathrm{Cos}\theta\mathrm{Cos}\phi\mathrm{Sen}\psi & \mathrm{Sen}\psi\mathrm{Sen}\theta \\ -\mathrm{Sen}\psi\mathrm{Cos}\phi - \mathrm{Cos}\theta\mathrm{Sen}\phi\mathrm{Cos}\psi & -\mathrm{Sen}\psi\mathrm{Sen}\phi + \mathrm{Cos}\theta\mathrm{Cos}\,\phi\mathrm{Cos}\psi & \mathrm{Cos}\psi\mathrm{Sen}\theta \\ \mathrm{Sen}\theta\mathrm{Sen}\phi & -\mathrm{Sen}\theta\mathrm{Cos}\phi & \mathrm{Cos}\theta \end{bmatrix},$$

como una rotación **infinitesimal**, para ello hacemos los desplazamientos angulares infinitesimales,

$$\mathrm{Cos}\,\Pi \approx 1, \quad \mathrm{Sen}\,\Pi \approx d\Pi \ \ \forall \ \ \Pi = \psi,\, \phi,\, \theta,$$

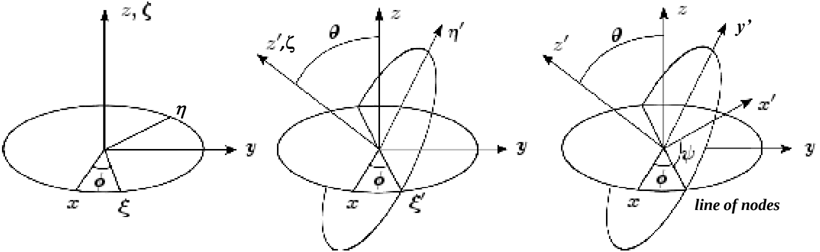
con lo cual se obtiene:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & (d\phi + d\psi) & 0 \\ -(d\phi + d\psi) & 1 & d\theta \\ 0 & -d\theta & 1 \end{bmatrix},$$

en donde se ha considerado $d\Pi d\Pi' \to 0$.

Rotaciones infinitesimales

Descripción de los ángulos de Euler



Por tanto, las tres rotaciones suscesivas de los ángulos de Euler pueden se consideradas como,

$$d\mathbf{\Omega} = d\phi\mathbf{k} + d\theta\mathbf{i} + d\psi\mathbf{k} = d\theta\mathbf{i} + (d\phi + d\psi)\mathbf{k}.$$

en donde se considera que para rotaciones infinitesimales,

$$\boldsymbol{\alpha}' \approx \boldsymbol{\alpha} \;\; \forall \;\; \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}.$$

La inversa de $\mathbf{A} = \mathbf{1} + \boldsymbol{\epsilon}$ es,

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{1} - \boldsymbol{\epsilon},$$

ya que,

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{1} + \boldsymbol{\epsilon})(\mathbf{1} - \boldsymbol{\epsilon}) = \mathbf{1}.$$

Explotando que $\mathbf{A}$ es ortogonal,

$$\mathbf{A}^{-1} = \tilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{1} + \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}),$$
$$\therefore \ \tilde{\boldsymbol{\epsilon}} = -\boldsymbol{\epsilon},$$

es decir, la matriz infinitesimal es **antisimétrica**, por tanto sus elementos de la diagonal son cero.

Proponiendo una forma para $\boldsymbol{\epsilon}$,

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} 0 & d\Omega_3 & -d\Omega_2 \\ -d\Omega_3 & 0 & d\Omega_1 \\ d\Omega_2 & -d\Omega_1 & 0 \end{bmatrix},$$

en donde $d\Omega_i$ son los tres parámetros independientes que especifican a la rotación.

Para conocer el significado de los $d\Omega_i$'s, recordemos:

$$\mathbf{r}' = (\mathbf{1} + \boldsymbol{\epsilon})\mathbf{r},$$
$$\Rightarrow \quad \mathbf{r}' - \mathbf{r} \equiv d\mathbf{r}' = \boldsymbol{\epsilon}\mathbf{r}.$$

Rotaciones infinitesimales

Propiedades y aplicaciones

Expresando en forma matricial lo anterior,

$$d\mathbf{r}' = \begin{bmatrix} 0 & d\Omega_3 & -d\Omega_2 \\ -d\Omega_3 & 0 & d\Omega_1 \\ d\Omega_2 & -d\Omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

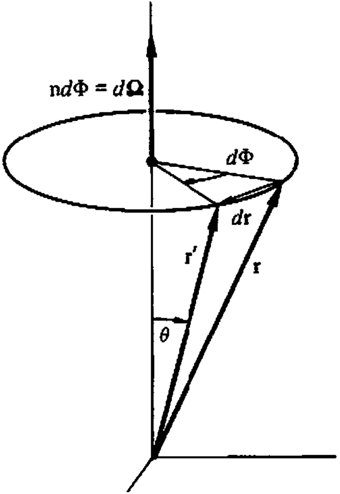
expandiendo,

$$\begin{aligned} dx_1' &= x_2 d\Omega_3 - x_3 d\Omega_2, \\ dx_2' &= x_3 d\Omega_1 - x_1 d\Omega_3, \\ dx_3' &= x_1 d\Omega_2 - x_2 d\Omega_1, \end{aligned}$$

lo cual representa el producto cruz de la **rotación infinitesimal**:

$$d\mathbf{r}' = \mathbf{r} \times d\mathbf{\Omega} = \mathbf{r} \times \mathbf{n}\, d\Phi,$$

Rotación en sentido **horario**



Hasta ahora todo el análisis ha sido hecho tanto para rotaciones **pasivas** en sentido **antihorario** como **activas** en sentido **horario**.

Definiendo ahora los resultados obtenidos para rotaciones **activas** en sentido **antihorario**:[7]

Fórmula de rotación

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}\,\mathrm{Cos}\,\Phi + \mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})(1 - \mathrm{Cos}\,\Phi) + (\mathbf{n}\times\mathbf{r})\mathrm{Sen}\,\Phi,$$

Rotación infinitesimal

$$d\mathbf{r}' = d\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r} = (\mathbf{n}\times\mathbf{r})d\Phi = -(\mathbf{r}\times\mathbf{n})d\Phi,$$

Matriz antisimétrica de la rotación infinitesimal

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} 0 & -d\Omega_3 & d\Omega_2 \\ d\Omega_3 & 0 & -d\Omega_1 \\ -d\Omega_2 & d\Omega_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix} d\Phi.$$

[7] regla de la mano derecha.

Contenido: Tema 04

Razón de cambio de un vector

Descripción

Consideremos un vector general relacionado con el movimiento de un sólido,[8] conforme el sólido se mueve, el vector variará, pero tal cambio dependerá del **sistema coordenado** del observador:

- **Fijo en el sólido**: el vector $\mathbf{G}$ fijo en el sólido no sufre cambios.
- **Fijo en el espacio**: el único cambio que $\mathbf{G}$ sufrirá con respecto al sistema del sólido sera una **rotación**.[9]

$$\Rightarrow \quad (d\mathbf{G})_{\rm space} = (d\mathbf{G})_{\rm body} + (d\mathbf{G})_{\rm rot},$$

en donde,

$$(d\mathbf{G})_{\rm rot} = d\mathbf{\Omega} \times \mathbf{G},$$

por tanto, la **razón de cambio** esta dada como,

$$\left(\frac{d\mathbf{G}}{dt}\right)_{\rm space} = \left(\frac{d\mathbf{G}}{dt}\right)_{\rm body} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{G} \quad \forall \quad \boldsymbol{\omega} dt = d\mathbf{\Omega}.$$

[8] el vector de posición o el momento angular total, por ejemplo.

[9] en sentido antihorario.

Razón de cambio de un vector

Conexión con los ángulos de Euler

El desarrollo anterior fue para un vector general $\mathbf{G}$, por lo que podemos considerar lo siguiente como un **operador**,

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{\mathrm{s}} = \left(\frac{d}{dt}\right)_{\mathrm{r}} + \boldsymbol{\omega}\times$$ [10]

Podemos expresar la **velocidad angular instantánea** $\boldsymbol{\omega}$ en términos de tres rotaciones sucesivas con velocidades angulares,

$$\omega_\phi = \dot{\phi}, \quad \omega_\theta = \dot{\theta}, \quad \omega_\psi = \dot{\psi},$$

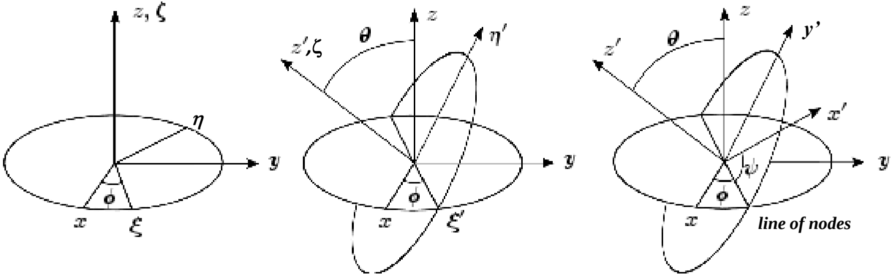
tal que se pueda definir:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_\phi + \boldsymbol{\omega}_\theta + \boldsymbol{\omega}_\psi,$$

sin embargo cada $\boldsymbol{\omega}_\Pi$ corresponde a un sist. diferente (dado por dif. transformaciones), por lo que es necesario expresarlas en un mismo sist.

[10] en donde s y r denotan las derivadas temporales en los sistemas coordenados del *espacio* y *rotante*, respectivamente.

Para expresar $\boldsymbol{\omega}$ en el **sistema coordenado del sólido**, usamos la información de los ángulos de Euler, cuya transf. es $\mathbf{A} = \mathbf{BCD}$.



$$\boldsymbol{\omega}_\phi = \dot{\phi}\mathbf{k}, \qquad \boldsymbol{\omega}_\theta = \dot{\theta}\boldsymbol{\xi}', \qquad \boldsymbol{\omega}_\psi = \dot{\psi}\mathbf{k}',$$

$$\boldsymbol{\omega}_\phi \rightarrow \boldsymbol{\omega}'_\phi, \qquad \boldsymbol{\omega}_\theta \rightarrow \boldsymbol{\omega}'_\theta, \qquad \boldsymbol{\omega}_\psi \rightarrow \boldsymbol{\omega}'_\psi,$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_\phi = \boldsymbol{\omega}'_\phi. \qquad \Rightarrow \quad \mathbf{B}\boldsymbol{\omega}_\theta = \boldsymbol{\omega}'_\theta. \qquad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega}_\psi = \boldsymbol{\omega}'_\psi.$$

Razón de cambio de un vector

Conexión con los ángulos de Euler

Donde las expresiones de las matrices usadas anteriormente son,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathrm{Cos}\psi\mathrm{Cos}\phi - \mathrm{Cos}\theta\mathrm{Sen}\phi\mathrm{Sen}\psi & \mathrm{Cos}\psi\mathrm{Sen}\phi + \mathrm{Cos}\theta\mathrm{Cos}\phi\mathrm{Sen}\psi & \mathrm{Sen}\psi\mathrm{Sen}\theta \\ -\mathrm{Sen}\psi\mathrm{Cos}\phi - \mathrm{Cos}\theta\mathrm{Sen}\phi\mathrm{Cos}\psi & -\mathrm{Sen}\psi\mathrm{Sen}\phi + \mathrm{Cos}\theta\mathrm{Cos}\,\phi\mathrm{Cos}\psi & \mathrm{Cos}\psi\mathrm{Sen}\theta \\ \mathrm{Sen}\theta\mathrm{Sen}\phi & -\mathrm{Sen}\theta\mathrm{Cos}\phi & \mathrm{Cos}\theta \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathrm{Cos}\,\psi & \mathrm{Sen}\,\psi & 0 \\ -\mathrm{Sen}\,\psi & \mathrm{Cos}\,\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

por tanto, aplicando las transformaciones tenemos,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}'_\phi &= \mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_\phi = \dot{\phi}\mathrm{Sen}\,\psi\mathrm{Sen}\,\theta\mathbf{i}' + \dot{\phi}\mathrm{Cos}\,\psi\mathrm{Sen}\,\theta\mathbf{j}' + \dot{\phi}\mathrm{Cos}\,\theta\mathbf{k}', \\ \boldsymbol{\omega}'_\theta &= \mathbf{B}\boldsymbol{\omega}_\theta = \dot{\theta}\mathrm{Cos}\,\psi\mathbf{i}' - \dot{\theta}\mathrm{Sen}\,\psi\mathbf{j}', \\ \boldsymbol{\omega}'_\psi &= \boldsymbol{\omega}_\psi = \dot{\psi}\mathbf{k}', \\ \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega}' &= \left(\dot{\phi}\mathrm{Sen}\,\psi\mathrm{Sen}\,\theta + \dot{\theta}\mathrm{Cos}\,\psi\right)\mathbf{i}' + \dots \\ &\dots + \left(\dot{\phi}\mathrm{Cos}\,\psi\mathrm{Sen}\,\theta - \dot{\theta}\mathrm{Sen}\,\psi\right)\mathbf{j}' + \left(\dot{\psi} + \dot{\phi}\mathrm{Cos}\,\theta\right)\mathbf{k}'. \end{aligned}$$

Razón de cambio de un vector

Aplicaciones

Aplicando el operador de razón de cambio al vector de **posición**,

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_s = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_r + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_s = \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r},$$

aplicando nuevamente el operador al vector de **velocidad** recién obtenido,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)_s &= \left[\left(\frac{d}{dt}\right)_r + \boldsymbol{\omega}\times\right]\left[\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_r + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}\right], \\
&= \left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)_r + \left(\frac{d}{dt}\right)_r(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) + \boldsymbol{\omega}\times\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_r + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}), \\
&= \left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)_r + \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)_r\times\mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega}\times\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_r + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}), \\
\Rightarrow \quad \mathbf{a}_s &= \mathbf{a}_r + \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)_r\times\mathbf{r} + 2\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_r\right) + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}),
\end{aligned}$$

en donde **a** corresponde al vector **aceleración** tanto en el sistema **fijo** (s) como en el del **cuerpo** (r).

La ecuación de movimiento en el **sistema inercial** s, es:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_s = m\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)_s,$$

expresándola en el sistema coordenado del **cuerpo** r,

$$\mathbf{F}_{\text{eff}} = m\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)_r = \mathbf{F} - 2m\boldsymbol{\omega}\times\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_r - m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) - m\left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)_r\times\mathbf{r}.$$

Analizando los términos ateriores,

- $m\left(d\boldsymbol{\omega}/dt\right)_r \times \mathbf{r}$: es diferente de cero solamente para sistemas coordenados con **aceleración angular**.
- $m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$: es el término de la **fuerza centrífuga**, y actúa en el sistema aún cuando la partícula está estacionaria ($\mathbf{v}_r = 0$).
- $2m\boldsymbol{\omega}\times\left(d\mathbf{r}/dt\right)_r$: se le conoce como **fuerza de coriolis**, el cual será cero cuando $\mathbf{v}_r = 0$ ó cuando $\mathbf{v}_r \parallel \boldsymbol{\omega}$.

Analicemos el movimiento de cuerpos en la superficie de la Tierra, considerándola como un sistema **no inercial**, en comparación con el espacio (sistema fijo),

$$\Rightarrow \quad d\boldsymbol{\omega}/dt = 0,$$

ya que la velocidad de rotación de la Tierra sobre su eje ($\boldsymbol{\omega}$) es approximadamente **constante**.

Además, tenemos que considerar la fuerza gravitatoria entre la Tierra y el cuerpo,

$$\mathbf{F} = -Gm_T m\frac{\mathbf{r}}{r^3},$$

lo cual, tomando en cuenta que por el momento el cuerpo está en **reposo**, da como resultado:

$$\mathbf{g} = -Gm_T\frac{\mathbf{r}}{r^3} - \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}),$$

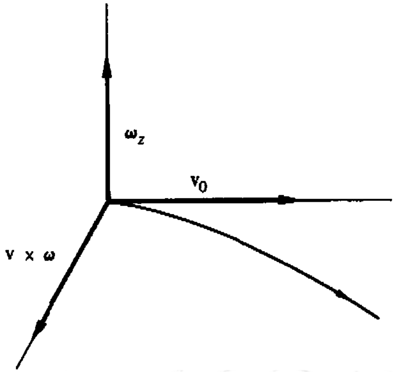
es decir, la **fuerza gravitatoria** y la **centrífuga** dan como resultado la **fuerza de gravedad** en la superficie terrestre.

Por tanto, la ecuación de movimiento es,

$$m\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right) = m\mathbf{g} - 2m\boldsymbol{\omega}\times\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right), \\ = m\mathbf{g} + 2m(\mathbf{v}\times\boldsymbol{\omega}),$$

en donde nos queda que el movimiento del cuerpo será modificado por el **término de Coriolis**, el cual será $\perp$ tanto a $\mathbf{v}$ como a $\boldsymbol{\omega}$.

Para el caso de un movimiento horizontal en el **hemisferio norte**, tendremos una deflección hacia la **derecha** del movimiento,



mientras que para el mismo mov. en el **hemisferio sur** será a la **izquierda**, y en el **Ecuador** será **nula** tal deflección.