Contenido: Tema 05

Contenido: Tema 05

Momento angular y energía cinética de rotación

Principios elementales: movimiento de traslación + rotación

En el caso más general de movimiento de un sólido se tienen dos componentes, el movimiento de **traslación** y el de **rotación**:

- **Traslación**: se requieren **tres** coordenadas para definir el movimiento de un punto del sólido (normalmente el centro de masas), relativo a un sistema coordenado **externo** al cuerpo.
- **Rotación**: son necesarias **tres** coordenadas para definir la **orientación** relativa a un punto del sólido (ángulos de Euler).

Por tanto, para describir el movimiento de un sólido en el espacio, es posible **desacoplar** los esquemas, por ejemplo:

$$\begin{aligned}
\text{Momento angular}: &\quad \mathbf{L} = \mathbf{R} \times M\mathbf{v} + L'(\phi,\theta,\psi), \\
\text{Energía cinética}: &\quad T = \tfrac{1}{2}Mv^2 + T'(\phi,\theta,\psi), \\
\text{Energía potencial}: &\quad V = V_{CM} \ \text{ ó } \ V = V_{rot}, \\
\Rightarrow \quad \text{Lagrangiano}: &\quad L = T - V = L_{CM} + L'(\phi,\theta,\psi)
\end{aligned}$$

El **momento angular** de un sólido rígido en movimiento con un punto estacionario es:

$$\mathbf{L} = m_i(\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i),$$

como $\mathbf{r}_i$ es la dist. de la i-ésima partícula referenciada al punto estacionario $\Rightarrow$ $\mathbf{v}_i$ en el **espacio** sólo depende de la rotación del mismo,

$$(\mathbf{v}_i)_s = \left(\frac{d\mathbf{r}_i}{dt}\right)_s = \left(\frac{d\mathbf{r}_i}{dt}\right)_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i,$$

entonces, $\mathbf{L} = m_i[\mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)] = m_i[\boldsymbol{\omega} r_i^2 - \mathbf{r}_i(\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega})]$.[1]

Expandiendo por componentes,

$$\begin{aligned}\mathbf{L} = &[m_i\omega_x(r_i^2 - x_i^2) - m_i x_i y_i \omega_y - m_i x_i z_i \omega_z]\mathbf{i} + \ \dots \\ &\dots + [m_i\omega_y(r_i^2 - y_i^2) - m_i x_i y_i \omega_x - m_i y_i z_i \omega_z]\mathbf{j} + \ \dots \\ &\dots + [m_i\omega_z(r_i^2 - z_i^2) - m_i x_i z_i \omega_x - m_i y_i z_i \omega_y]\mathbf{k}.\end{aligned}$$

[1] $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$

Momento angular y energía cinética de rotación

Momento angular

De la expresión anterior deducimos que $\mathbf{L}$ está relacionado con $\boldsymbol{\omega}$ por medio de una **transformación lineal** $\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$,

$$
\begin{aligned}
L_x &= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z, \\
L_y &= I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z, \\
L_z &= I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z,
\end{aligned}
$$

en donde $I_{jk} = m_i(\delta_{jk}r_i^2 - r_{ij}r_{ik})$ tal que:

- I_{jj}: **coef. de momentos de inercia**, ejem: $I_{xx} = m_i(r_i^2 - x_i^2)$,
- I_{jk}: **productos de inercia**, ejem: $I_{xy} = -m_i x_i y_i$,

Para el caso de sólidos **contínuos**, tendriamos la siguiente expresión:

$$
I_{jk} = \int_V \rho(\mathbf{r}^2\delta_{jk} - x_j x_k)dV, \quad \forall \quad j,k = 1,2,3,
$$

donde los elementos del sist. coordenado han sido denominados x_j y en general (por convención) se elige el **sistema fijo** en el sólido.

Contenido: Tema 05

Definimos en el espacio cartesiano tridimensional un **tensor** de N-ésimo rango con 3^N componentes como,

$$T_{ijk\ldots}, \quad \text{(con } N \text{ índices)}$$

el cual se transforma bajo una transformación **ortogonal** $\mathbf{A}$ de la siguiente manera,

$$T'_{ijk\ldots}(\mathbf{x}') = a_{il} a_{jm} a_{kn} \ldots T_{lmn\ldots}(\mathbf{x}).$$

De la definición anterior podemos analizar algunos casos sencillos,

- **Tensor de rango cero**: cantidad escalar.
- **Tensor de primer rango**: $T'_i = a_{il} T_l \Rightarrow$ es equiv. a un vector.
- **Tensor de segundo rango**: $T'_{ij} = a_{il} a_{jm} T_{lm} \Rightarrow$ se transforma de manera equivalente a una matriz cuadrada.[2]

---

[2] $\mathbf{T}' = \mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}\mathbf{T}\tilde{\mathbf{A}}, \Rightarrow T'_{ij} = a_{il} T_{lm} a_{jm}$

Los vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son utilizados para construir un tensor de segundo rango,

$$T_{ij} = A_i B_j,$$

donde,

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} \\ T_{yx} & T_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x B_x & A_x B_y \\ A_y B_x & A_y B_y \end{pmatrix}.$$

Definimos el **tensor unidad** $\mathbf{1}$:

$$\mathbf{1}_{ij} = \delta_{ij},$$

el **producto punto** por la der.,

$$\mathbf{D} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{C} \;\; \forall \;\; D_i = T_{ij} C_j,$$

así como por la izquierda,

$$\mathbf{E} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \;\; \forall \;\; E_i = F_j T_{ji},$$

de igual manera se puede construir un **escalar** S, mediante el proceso de contracción:

$$S = \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{C} \;\; \forall \;\; S = F_i T_{ij} C_j,$$

finalmente, al ser $\mathbf{T}$ construido por los vects. $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ se cumple,

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{A},$$
$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{T} = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{A})\mathbf{B} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{F})\mathbf{B}.$$

Definimos al **tensor de inercia**[3] $\mathbf{I}$ tal que:

$$\mathbf{L} = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

Por otro lado, tenemos la definición de la energía cinética:

$$T = \frac{1}{2} m_i v_i^2,$$

en donde $\mathbf{v}_i$ es la velocidad de la i-ésima partícula relativa a un punto fijo, medida en el sistema coordenado **inercial**,

$$\Rightarrow \quad T = \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) = \frac{\boldsymbol{\omega}}{2} \cdot m_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i),$$

pero $m_i(\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i) = \mathbf{L}$,

$$\therefore \quad T = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}}{2} = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}}{2}.$$

[3] de segundo rango

Tensor de inercia y momento de inercia

Momento de inercia

Sea $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{n}$, entonces:

$$T = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}}{2} = \frac{\omega^2}{2} \mathbf{n} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{2} I \omega^2,$$

en donde la cantidad I es un escalar[4] y se le conoce como el **momento de inercia** relativo al eje de rotación $\mathbf{n}$.

Para encontrar como está definido I, expandamos la energía cinética,

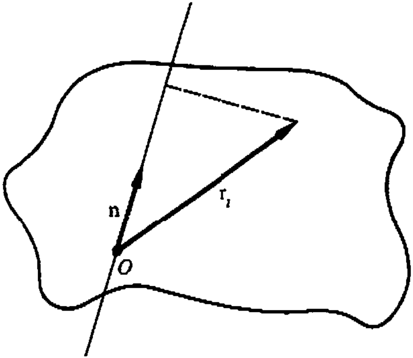
$$\begin{aligned} T = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}}{2} &= \frac{\boldsymbol{\omega}}{2} \cdot m_i \left[\boldsymbol{\omega} r_i^2 - \mathbf{r}_i (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) \right], \\ &= \frac{1}{2} \omega^2 \left\{ \mathbf{n} \cdot m_i \left[\mathbf{n} r_i^2 - \mathbf{r}_i (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n}) \right] \right\}, \\ &= \frac{1}{2} \omega^2 m_i \left[r_i^2 - (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n})^2 \right], \\ \Rightarrow \quad I &= m_i \left[r_i^2 - (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n})^2 \right]. \end{aligned}$$

[4] un doble producto punto de un tensor $\mathbf{T}$ con vectores define un escalar.

Tensor de inercia y momento de inercia

Momento de inercia

De manera tradicional se define al **momento de inercia** como el producto de la masa de la partícula por el cuadrado de la distancia perpendicular del eje.



En ecuaciones,

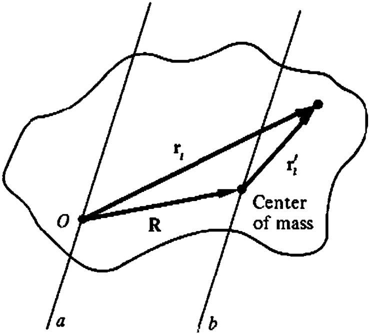
$$
\begin{aligned}
I &= m_i \left(\mathbf{r}_i \times \mathbf{n}\right)^2 , \\
&= m_i(\mathbf{r}_i \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{r}_i \times \mathbf{n}), \\
&= \frac{m_i}{\omega^2}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i), \\
\Rightarrow \quad I &= \frac{m_i}{\omega^2}\mathbf{v}_i^2 = \frac{2T}{\omega^2}, \\
\therefore \quad T &= \frac{1}{2} I\omega^2,
\end{aligned}
$$

lo que demuestra la equivalencia de definiciones para el **momento de inercia** I.

Tensor de inercia y momento de inercia

Cálculo del momento de inercia

Para el cálculo de I necesitamos definir un **eje de rotación**:[5]



Consideremos el movimiento respecto el eje a con origen O:

$$I_a = m_i \left(\mathbf{r}_i \times \mathbf{n}\right)^2 ,$$

relacionando con el eje paralelo b que pasa por el **centro de masas**,

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{r'}_i,$$

$$\Rightarrow \quad I_a = m_i[(\mathbf{r'}_i + \mathbf{R}) \times \mathbf{n}]^2,$$

expandiendo,

$$\begin{aligned} I_a &= m_i(\mathbf{r'}_i \times \mathbf{n})^2 + M(\mathbf{R} \times \mathbf{n})^2 + 2m_i(\mathbf{R} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{r'}_i \times \mathbf{n}), \\ &= m_i(\mathbf{r'}_i \times \mathbf{n})^2 + M(\mathbf{R} \times \mathbf{n})^2 - 2(\mathbf{R} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{n} \times m_i\mathbf{r'}_i). \end{aligned}$$

[5] el cual consideramos fijo en el espacio, de lo contrario $I = I(t)$.

Analizando los términos de la ecuación anterior,

$$I_a = m_i(\mathbf{r'}_i \times \mathbf{n})^2 + M(\mathbf{R} \times \mathbf{n})^2 - 2(\mathbf{R} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{n} \times m_i\mathbf{r'}_i),$$

- $m_i(\mathbf{r'}_i \times \mathbf{n})^2$: representa el momento de inercia respecto el eje b que pasa por el centro de masa, I_b.
- $M(\mathbf{R} \times \mathbf{n})^2$: describe el momento de inercia del sólido como si estuviera concentrado en el centro de masa, con respecto al eje original.
- $-2(\mathbf{R} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{n} \times m_i\mathbf{r'}_i)$: debido a la definición de centro de masa este término se anula.[6]

Por tanto, la expresión se reduce a,

$$I_a = I_b + M(\mathbf{R} \times \mathbf{n})^2 = I_b + M(R^2\delta_{\alpha\beta} - R_\alpha R_\beta),$$

lo cual se conoce como el teorema **de los ejes paralelos**.

[6] $m_i\mathbf{r'}_i = 0$ cuando $\mathbf{r'}_i$ está referenciado al centro de masas.

Tensor de inercia y momento de inercia

Cálculo del momento de inercia

Describiendo ahora las cantidades necesarias para aplicar el formalismo Lagrangiano,

$$\begin{aligned} T_{rot} &= \frac{1}{2} m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)^2, \\ &= \frac{1}{2} \omega_\alpha \omega_\beta m_i (\delta_{\alpha\beta} r_i^2 - x_{i\alpha} x_{i\beta}), \\ &= \frac{1}{2} I_{\alpha\beta} \omega_\alpha \omega_\beta, \end{aligned}$$

en donde α y β denotan las componentes de $\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{r}_i$, definiendo:

$$I_{\alpha\beta} = m_i (\delta_{\alpha\beta} r_i^2 - x_{i\alpha} x_{i\beta}),$$

$$I_{\alpha\beta} = \int_V \rho(r) (\delta_{\alpha\beta} r^2 - x_\alpha x_\beta) dV,$$

siendo:

$$r_i^2 = \sum_j x_{ij}^2, \quad r^2 = \sum_j x_j^2,$$

Ejemplo

Se tiene un cubo homogéneo de densidad ρ, masa M y arista a, cuyo origen es el punto $(0,0,0)$ $\Rightarrow$ el tensor de inercia es:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}b & -\frac{1}{4}b & -\frac{1}{4}b \\ -\frac{1}{4}b & \frac{2}{3}b & -\frac{1}{4}b \\ -\frac{1}{4}b & -\frac{1}{4}b & \frac{2}{3}b \end{pmatrix}$$

en donde $b = Ma^2$.

Contenido: Tema 05

Momentos de inercia

Propiedades y ejes principales

De la definición de los momentos de inercia,

$$I_{\alpha\beta} = m_i(\delta_{\alpha\beta} r_i^2 - r_{i\alpha} r_{i\beta}),$$

se observa que las componentes del tensor son **simétricas**,

$$I_{\alpha\beta} = I_{\beta\alpha},$$

lo cual indica que sólo existen **seis** coordenadas **independientes** en el tensor de inercia.

En general, los momentos de inercia dependen de dos factores:

- **Localización** del origen del sistema coordenado del sólido.
- **Orientación** de este sistema coordenado respecto al sólido en sí.

Por tanto, debe existir un sistema coordenado en el cual el tensor de inercia sea **diagonal**, con valores I_1, I_2, y I_3, en donde las componentes de $\mathbf{L} = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}$ serán:

$$L_1 = I_1 \omega_1, \quad L_2 = I_2 \omega_2, \quad L_3 = I_3 \omega_3.$$

Momentos de inercia

Propiedades y ejes principales

Para la energía cinética se tiene una situación similar,

$$T = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}}{2} = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2.$$

Para encontrar tal sistema de ejes coordenados en donde $\mathbf{I}$ sea diagonal aplicamos una transformación de similaridad[7], considerando $\mathbf{I}$ respecto a un eje que pasa por el **centro de masa**:

$$\mathbf{I} = \mathbf{R}\mathbf{I}_D\tilde{\mathbf{R}} \quad \text{tal que} \quad \mathbf{I}_D = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix},$$

en donde,

- I_1, I_2, I_3: son los **momentos principales de inercia**.
- x', y', z': son las direcciones definidas por la matriz rotación $\mathbf{R}$, y se conocen como **ejes principales** del tensor de inercia.

[7] la rotación $\mathbf{R}$ estará dada en términos de los ángulos de Euler ϕ, θ, y ψ.

Momentos de inercia

Propiedades y ejes principales

Para el caso en el que no se puede tener por inspección *a priori* los ejes principales del problema, siendo que el tensor $\mathbf{I}$ está referenciado respecto al **centro de masa del sistema**, éstos se pueden obtener resolviendo:

$$\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\xi} = I\boldsymbol{\xi},$$

lo cual representa una ecuación de eigenvalores, cuya solución se obtiene de:

$$\begin{vmatrix} I_{xx} - I & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} - I & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} - I \end{vmatrix} = 0 \ \ \forall \ \ I_{\alpha\beta} = I_{\beta\alpha},$$

en donde los eigenvalores I_i serán los **momentos de inercia principales**, y los eigenvectores corresponderán al set de **ejes principales** $\{x', y', z'\}$.

Contenido: Tema 05

Ecuaciones de movimiento de Euler

Consideraciones generales

Para poder aplicar de una manera más sencilla los conceptos hasta ahora desarrollados con el fin de resolver las ecuaciones de movimiento de un sólido, tomemos en cuenta las siguientes consideraciones:

- Seleccionar un punto de referencia adecuado en el sólido:
  - Si un punto del sólido está **fijo en un sistema inercial** $\Rightarrow$ se escoge ese punto.
  - Si no hay algún punto fijo $\Rightarrow$ se selecciona el **centro de masas**.
- Identificar de manera clara la separación de la energía cinética en movimientos de **traslación** $+$ **rotación**:

$$T = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2.$$

- En lo posible, identificar y seleccionar como sistema coordenado a **los ejes principales** del sólido, con el fin de simplificar el problema.

Ecuaciones de movimiento de Euler

Formulación Lagrangiana

Tomando en cuenta las consideraciones anteriores, podemos expresar el Lagrangiano como,

$$L(q,\dot{q}) = L_c(q_c,\dot{q}_c) + L_b(q_b,\dot{q}_b),$$

donde,

- L_c: es la parte del Lagrangiano correspondiente a las coordenadas generalizadas del **centro de masa** $\{q_c,\dot{q}_c\}$.
- L_b: corresponde a la **orientación del sólido**, respecto al centro de masas, descrito por las coordenadas generalizadas $\{q_b,\dot{q}_b\}$.

Para expresar la **energía cinética de rotación**, podemos elegir los ejes principales, teniendo una expresión simple de T,

$$T = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 + \frac{1}{2}I_3\omega_3^2 \quad \forall \quad L_i = I_i\omega_i.$$

Ecuaciones de movimiento de Euler

Formulación Newtoniana: ecuaciones de Euler

Obteniendo las ec. de movimiento de la parte **rotacional**,

$$\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_s = \mathbf{N} \;\; \forall \;\; \mathbf{N} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$

y transformando al sistema coordenado del sólido,

$$\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_s = \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_b + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L},$$

$$\therefore \quad \mathbf{N} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L},$$

la cual corresponde a la ecuación de movimiento del sólido relativo a los ejes del mismo.

Expandiendo la ecuación anterior en componentes,

$$\frac{dL_i}{dt} + \epsilon_{ijk}\omega_j L_k = N_i,$$

$$\Rightarrow \;\; I_i \frac{d\omega_i}{dt} + \epsilon_{ijk}\omega_j \omega_k I_k = N_i,$$

considerando que estamos en los **ejes principales** ($L_i = I_i \omega_i$),

$$\begin{aligned} \Rightarrow \;\; I_1\dot{\omega}_1 - \omega_2\omega_3(I_2 - I_3) &= N_1, \\ I_2\dot{\omega}_2 - \omega_3\omega_1(I_3 - I_1) &= N_2, \\ I_3\dot{\omega}_3 - \omega_1\omega_2(I_1 - I_2) &= N_3, \end{aligned}$$

correspondiendo a las **ecuaciones de Euler**.