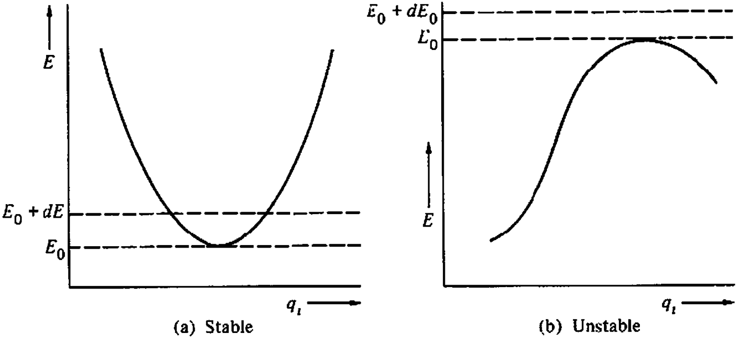
Contenido: Tema 06

Contenido: Tema 06

Consideraremos las siguientes condiciones para los sist. bajo estudio:

- **Sistemas conservativos**: $V = V(q_1, \ldots, q_i, q_{i+1}, \ldots, q_n)$.
- **Excluir constricciones dependientes del tiempo**: $f(q_i) \neq f(q_i, t)$.
- **Equilibrio estable**: $Q_i = -(\partial V/\partial q_i)_0 = 0$; $(\partial^2 V/\partial q_i^2)_0 > 0$.



Pequeñas oscilaciones

Formulación del problema

Estamos interesados en el movimiento del sistema cerca de la **vecindad** de la configuración de equilibrio **estable**,

$$q_i = q_{0i} + \eta_i, \quad \forall \quad \eta_i \ll q_{0i},$$

por tanto, expandiendo el **potencial** alrededor de q_{0i},

$$V(q_1, \ldots, q_n) = V(q_{01}, \ldots, q_{0n}) + \left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_0 \eta_i + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 \eta_i \eta_j + \ldots$$

pero debido a la **condición de equilibrio**:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_0 = 0,$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 \eta_i \eta_j = \frac{1}{2} V_{ij} \eta_i \eta_j,$$

en donde se ha corrido el origen de V para coincidir con V_0.

Pequeñas oscilaciones

Formulación del problema

Realizando el mismo procedimiento para la **energía cinética**,

$$T = \frac{1}{2} m_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j = \frac{1}{2} m_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j, \quad \text{donde} \quad \dot{q}_k = \dot{\eta}_k,$$

y m_{ij} es función de las coordenadas q_k,

$$m_{ij}(q_1, \ldots, q_n) = \sum_k m_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j},$$

por tanto, expandiendo alrededor del **punto de equilibrio**,

$$m_{ij}(q_1, \ldots, q_n) = m_{ij}(q_{01}, \ldots, q_{0n}) + \left(\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k}\right)_0 \eta_k + \ldots$$

al sustituir en la expansión de T, vemos que el único término que sobrevive de m_{ij}, para mantener la aprox. armónica, es el correspondiente al punto de equilibrio,:

$$T = \frac{1}{2} T_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j, \quad \forall \quad T_{ij} = m_{ij}(q_{01}, \ldots, q_{0n}).$$

Con las expresiones para V y T podemos construir el **Lagrangiano**,

$$L = T - V = \frac{1}{2}(T_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j - V_{ij}\eta_i\eta_j),$$

aplicando las ecs. de Lagrange y tomando las η's como las coordenadas generalizadas,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \eta_i} = 0 \quad \forall \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

tenemos,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i}\right) = T_{ij}\ddot{\eta}_j, \quad \frac{\partial L}{\partial \eta_i} = -V_{ij}\eta_j,$$

por tanto, obtenemos la **ecuación de movimiento**:

$$T_{ij}\ddot{\eta}_j + V_{ij}\eta_j = 0,$$

resolviendo obtendremos η_j, con lo cual llegaremos a $q_j = q_{0i} + \eta_j$.

Contenido: Tema 06

Ecuación de eigenvalores

Solución de la ecuación de movimiento

Tenemos que la ecuación de movimiento para los pequeños desplazamientos η_i es,

$$T_{ij}\ddot{\eta}_j + V_{ij}\eta_j = 0,$$

la cual representa un sistema de ecuaciones diferenciales lineales, teniendo como solución funciones tipo:

$$\eta_j = Ca_j e^{-i\omega t} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\eta}_j = -\omega^2 Ca_j e^{-i\omega t},^{1}$$

sustituyendo en la ec. de movimiento,

$$(V_{ij} - \omega^2 T_{ij})a_j = 0 \;\; \forall \;\; a_j = \text{cte}.$$

se obtiene un sistema de n ecuaciones homogéneas para las a_j's, el cual tendrá solución cuando se **anule** el determinante de los mismos.

[1] en donde Ca_j da una amplitud compleja de la oscilación para cada η_j.

Ecuación de eigenvalores

Solución de la ecuación de movimiento

Expresando el determinante del sistema de n ecuaciones anterior:

$$\begin{vmatrix} V_{11} - \omega^2 T_{11} & V_{12} - \omega^2 T_{12} & \dots \\ V_{21} - \omega^2 T_{21} & V_{22} - \omega^2 T_{22} & \dots \\ V_{31} - \omega^2 T_{31} & & \\ \vdots & & \end{vmatrix} = 0,$$

se obtiene una ec. de orden n en ω^2, conocida como **ecuación secular**, y cuya solución dará n raices que determinan el conjunto de **frec. naturales de oscilación** $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, para cada una de las a_i. Lo anterior se puede expresar como,

$$\mathbf{Va} = \lambda \mathbf{Ta},$$

- toda λ es **real** y **positiva**,
- los eigenvectores $\mathbf{a}$ son **ortogonales**,
- la matriz de los eigenvectores $\mathbf{A}$ **diagonaliza** tanto $\mathbf{V}$ como $\mathbf{T}$.

Ecuación de eigenvalores

Propiedades de la ecuación secular

Para encontrar la manera en que diagonaliza $\mathbf{A}$ tanto a $\mathbf{V}$ como $\mathbf{T}$, consideremos aplicar la ecuación secular al vector columna $\mathbf{a}_k$:

$$\mathbf{V}\mathbf{a}_k = \lambda_k \mathbf{T}\mathbf{a}_k,$$

ahora, la ecuación adjunta a la anterior será:

$$\mathbf{a}_l^\dagger \mathbf{V} = \lambda_l \mathbf{a}_l^\dagger \mathbf{T} \quad \rightarrow \quad \tilde{\mathbf{a}}_l \mathbf{V} = \lambda_l \tilde{\mathbf{a}}_l \mathbf{T},$$

donde $\mathbf{a}_l^\dagger$ es el vector adjunto y $\mathbf{V}$, $\mathbf{T}$ matrices **reales** y **simétricas**.[2]

Multiplicando por $\tilde{\mathbf{a}}_l$ la primera ecuación por la izquierda y $\mathbf{a}_k$ a la ec. anterior por la derecha,

$$\tilde{\mathbf{a}}_l \mathbf{V}\mathbf{a}_k = \lambda_k \tilde{\mathbf{a}}_l \mathbf{T}\mathbf{a}_k, \quad \tilde{\mathbf{a}}_l \mathbf{V}\mathbf{a}_k = \lambda_l \tilde{\mathbf{a}}_l \mathbf{T}\mathbf{a}_k$$

$$\text{restando:} \;\; (\lambda_k - \lambda_l)\tilde{\mathbf{a}}_l \mathbf{T}\mathbf{a}_k = 0.$$

[2] $V_{ij} = V_{ji}$, $T_{ij} = T_{ji}$

Ecuación de eigenvalores

Transformación de congruencia

Si todas las raices de la ec. secular son **distintas**, se tiene:

$$(\lambda_k - \lambda_l)\tilde{\mathbf{a}}_l \mathbf{T} \mathbf{a}_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathbf{a}}_l \mathbf{T} \mathbf{a}_k = 0 \;\; \forall \;\; l \neq k.$$

Además, siendo que los valores a_{jk} no están completamente determinados, se puede proponer lo siguiente para remover tal pseudo-indeterminación:

$$\tilde{\mathbf{a}}_k \mathbf{T} \mathbf{a}_k = 1,$$

De las ecs. anteriores observamos que tenemos un set de n ecuaciones, formando ahora con todos los eigenvectores $\mathbf{a}_k$ una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ con elementos a_{jk}, por tanto:

$$\tilde{\mathbf{A}} \mathbf{T} \mathbf{A} = \mathbb{1},$$

lo cual se conoce como una transformación de **congruencia**.[3]

[3] se relaciona con una transformación de similaridad $\mathbf{C}' = \mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{B}^{-1}$, donde para matrices ortogonales: $\mathbf{A}^{-1} = \tilde{\mathbf{A}}$.

Ecuación de eigenvalores

Transformación de congruencia

Para analizar las propiedades de una **transformación de congruencia**, introduzcamos lo siguiente,

$$\mathbf{V}\mathbf{a}_k = \lambda_k \mathbf{T}\mathbf{a}_k \quad \Rightarrow \quad V_{ij}a_{jk} = T_{ij}a_{jl}\lambda_{lk} \ \ \forall \ \ \lambda_{lk} = \lambda_k\delta_{lk},$$

$\Rightarrow$ en notación matricial: $\mathbf{VA} = \mathbf{TA}\boldsymbol{\lambda}$,

multiplicando ahora por $\tilde{\mathbf{A}}$ por la izquierda:

$$\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{VA} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{TA}\boldsymbol{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{VA} = \boldsymbol{\lambda},$$

o también para calcular λ: $|\mathbf{V} - \lambda\mathbf{T}| = 0.$

Resumiendo los resultados obtenidos hasta ahora,

Coordenadas cartesianas

$$\Rightarrow T_{ij} = \delta_{ij}m_{ij},$$

$$\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{TA} = \mathbb{1}, \quad \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{VA} = \mathbf{V}_{diag}.$$

Coordenadas generales

$$\Rightarrow T_{ij} \neq \delta_{ij}m_{ij},$$

$$\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{TA} = \mathbb{1}, \quad \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{VA} = \mathbf{V}_{diag}.$$

Contenido: Tema 06

Frecuencias de vibración libres y coordenadas normales

Frecuencias de vibración

Previamente obtuvimos que la solución oscilatoria era:

$$\eta_i = C a_i e^{-i\omega t},$$

en donde se involucra el set completo de **frecuencias** $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, el cual representa al set completo de eigenvalores y se conoce como **las frecuencias libres de vibración** o de **resonancia** del sistema.

Por tanto, la solución más general involucra una **combinación lineal** de todas las ω_k,

$$\eta_i = \sum_k C_k a_{ik} e^{i\omega_k t} \;\; \forall \;\; C_k \in \mathbb{C},$$

siendo que para cada solución $\lambda_k = \omega_k^2$ podemos tener tanto $+\omega_k$ ó $-\omega_k$, por tanto para un caso general:

$$\eta_i = a_{ik}(C_k^+ e^{i\omega_k t} + C_k^- e^{-i\omega_k t}),$$
$$\eta_i = f_k a_{ik} \mathrm{Cos}(\omega_k t + \delta_k),$$

siendo $\mathbf{a}_k$ el **eigenvector** asociado a λ_k.

Frecuencias de vibración libres y coordenadas normales

Coordenadas normales

Las frecuencias ω_k son determinadas por la ecuación secular, y los factores de escala C_k por las condiciones iniciales del problema:

$$\eta_i(0) = \mathrm{Re}\, C_k a_{ik}, \quad \dot{\eta}_i(0) = \mathrm{Im}\, C_k a_{ik} \omega_k,^{4}$$

de lo cual tenemos un set de $2n$ ecs. para hallar los $2n$ valores de C_k.

Para resolver, expresemos las ecs. anteriores en un esquema matricial,

$$\boldsymbol{\eta}(0) = \mathbf{A}\mathrm{Re}\, \mathbf{C}, \quad \dot{\boldsymbol{\eta}}(0) = \mathbf{A}\mathrm{Im}\, \mathbf{C}\boldsymbol{\omega},$$

aplicando $\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{T}$ por la izq. en ambas ecuaciones tenemos,

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{T}\boldsymbol{\eta}(0) = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{T}\mathbf{A}\mathrm{Re}\, \mathbf{C} \;&\Rightarrow\; \mathrm{Re}\, \mathbf{C} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{T}\boldsymbol{\eta}(0), \\
&\Rightarrow\; \mathrm{Re}\, C_l = \sum_{jk} a_{jl} T_{jk} \eta_k(0), \\
\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{T}\dot{\boldsymbol{\eta}}(0) = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{T}\mathbf{A}\mathrm{Im}\, \mathbf{C}\boldsymbol{\omega} \;&\Rightarrow\; \mathrm{Im}\, \mathbf{C}\boldsymbol{\omega} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{T}\dot{\boldsymbol{\eta}}(0), \\
&\Rightarrow\; \mathrm{Im}\, C_l = \frac{1}{\omega_l} \sum_{jk} a_{jl} T_{jk} \dot{\eta}_k(0),
\end{aligned}$$

[4] donde $\dot{\eta}_i = -iC_k a_{ik} \omega_k e^{-i\omega_k t}$

Frecuencias de vibración libres y coordenadas normales

Coordenadas normales

Una vez teniendo las expresiones para los n coeficientes C_k (parte real e imaginaria), se obtiene la descripción total de η_i,

$$\eta_i = \sum_k C_k a_{ik} e^{-i\omega_k t}$$

la cual será una suma de funciones oscilatorias en ω_k.

Es posible transformar η_i a un sistema de coordenadas generalizadas que sean periódicas, conocidas como **coordenadas normales**,

$$\eta_i = a_{ij}\zeta_j \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\eta} = \mathbf{A}\boldsymbol{\zeta}.$$

Analizando la forma de la **energía potencial** para estar coord.,

$$V = \frac{1}{2}V_{ij}\eta_i\eta_j \quad \Rightarrow \quad V = \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\eta}}\mathbf{V}\boldsymbol{\eta}, \quad \text{pero} \quad \tilde{\boldsymbol{\eta}} = \widetilde{\mathbf{A}\boldsymbol{\zeta}} = \tilde{\boldsymbol{\zeta}}\tilde{\mathbf{A}},$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\zeta}}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{V}\mathbf{A}\boldsymbol{\zeta} = \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\zeta}}\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\zeta} = \frac{1}{2}\omega_k^2\zeta_k^2.$$

Frecuencias de vibración libres y coordenadas normales

Coordenadas normales

Para la **energía cinética**,

$$T = \frac{1}{2} T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2} \tilde{\dot{\boldsymbol{\eta}}} \mathbf{T} \dot{\boldsymbol{\eta}}, \quad \text{pero} \quad \dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\zeta}}, \quad \tilde{\dot{\boldsymbol{\eta}}} = \tilde{\dot{\boldsymbol{\zeta}}} \tilde{\mathbf{A}},$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{1}{2} \tilde{\dot{\boldsymbol{\zeta}}} \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{T} \mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\zeta}} = \frac{1}{2} \tilde{\dot{\boldsymbol{\zeta}}} \dot{\boldsymbol{\zeta}} = \frac{1}{2} \dot{\zeta}_k \dot{\zeta}_k.$$

De $V(\zeta_i)$ y $T(\dot{\zeta}_i)$ notamos que **no** contienen términos cruzados $\therefore$ $\mathbf{A}$ produce una **transformación de ejes principales**.

Expresando el Lagrangiano en estas coordenadas,

$$L = T - V = \frac{1}{2} \dot{\zeta}_k \dot{\zeta}_k - \frac{1}{2} \omega_k^2 \zeta_k^2,$$

aplicando la ecuación de Lagrange,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\zeta}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial \zeta_k} = 0 \;\Rightarrow\; \ddot{\zeta}_k + \omega_k^2 \zeta_k = 0 \;\Rightarrow\; \zeta_k = C_k e^{-i\omega_k t}.$$

donde ω_k son las frecs. de los **modos normales de vibración**.

Contenido: Tema 06

Oscilación forzada

Cuando el sistema original es puesto en un movimiento oscilatorio mediante una **fuerza externa** $F_j(t)$, la cual afecta al sistema aún a tiempos $t > 0$.

Tenemos, que F_j es la fuerza generalizada que corresponde a la coord. η_j, por tanto, hallando la fuerza generalizada Q_i que corresponda a la coord. normal ζ_i,

$$Q_i = \sum_j \mathbf{F}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_i} \quad \Rightarrow \quad Q_i = a_{ji} F_j \;\; \forall \;\; a_{ji}\zeta_i = \eta_j .$$

Aplicando la ecuación de Lagrange,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\zeta}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \zeta_i} = Q_i \;\; \forall \;\; L = T - V = \frac{1}{2}\dot{\zeta}_i\dot{\zeta}_i - \frac{1}{2}\omega_i^2\zeta_i^2,$$

obtenemos las ecuaciones de movimiento,

$$\ddot{\zeta}_i + \omega_i^2 \zeta_i = Q_i .$$

Vibraciones forzadas y efectos de fuerzas disipativas

Vibraciones forzadas

La ecuación de movimiento representa una ec. diferencial no$-$homogénea, la cual tendrá una solución tipo:

$\zeta_i(t) = \zeta_i^h(t) + \zeta_i^p(t) \;\; \forall \;\; \zeta_i^h(t) =$ sol. homogénea, $\zeta_i^p(t) =$ sol. particular.

Para obtener $\zeta_i^p(t)$, suponemos que $Q_i = Q_{0i}\mathrm{Cos}\,(\Omega t + \delta_i)$, en donde Ω es la frecuencia de la fuerza externa $\Rightarrow$ se propone:

$$\zeta_i^p = B_i \mathrm{Cos}\,(\Omega t + \delta_i),$$

sust. en la ec. de movimiento se encuentra la expresión para B_i,

$$\ddot{\zeta}_i^p + \omega_i^2 \zeta_i^p = Q_i \quad \Rightarrow \quad B_i = \frac{Q_{0i}}{\omega_i^2 - \Omega^2},$$

por tanto, la solución general es,

$$\zeta_i = \zeta_i^h + \zeta_i^p = C_i e^{-i\omega_i t} + \frac{Q_{0i}}{\omega_i^2 - \Omega^2}\mathrm{Cos}\,(\Omega t + \delta_i),$$

$$\Rightarrow \quad \eta_j = \eta_j^h + \eta_j^p = a_{ji}(\zeta_i^h + \zeta_i^p).$$

Solución particular ζ_i^p

- **Amplitud de la fuerza generalizada Q_{0i}**
  Q puede excitar algún modo normal ζ_k de vibración **sólo** si tiende a mover a las partículas en la misma dirección que el modo original $(Q_{0k} \neq 0)$.
- **Proximidad de Ω y ω_i**
  - Las oscilaciones (Q_i's & ζ_i's) estarán en **fase** cuando $\Omega < \omega_i$ y **fuera de fase** (fase π) cuando $\Omega > \omega_i$.
  - Conforme $\Omega \rightarrow \omega_i$ el modo ζ_i será excitado en mayor medida que los demás, pero cuando $\Omega \approx \omega_i \Rightarrow \zeta_i^p \rightarrow \infty$!!

La solución $\zeta_i^p \rightarrow \infty$ no es válida ya que estamos en el marco de **pequeñas oscilaciones**. La sol. correcta por tanto se obtiene de:

$$\lim_{\Omega \rightarrow \omega_i} \zeta_i^p = \frac{Q_{0i} \mathrm{Sen}\left(\omega_i t + \delta_i\right)}{2\omega_i} t.^5$$

[5] Usar L'Hôpital con respecto a Ω $\left(\lim_{x\rightarrow c} f(x)/g(x) = \lim_{x\rightarrow c} f'(x)/g'(x)\right)$.

La solución obtenida anteriormente indica que el sistema incrementa su amplitud **indefinidamente** y linealmente en t, lo cual no es realista, indicando la falta de **efectos disipativos** en el modelo.

Considerando tales efectos como **funciones de disipación** dependientes de la **velocidad** de las partículas,

$$F = \frac{1}{2} F_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j, [6] \quad \forall \quad F_{ij} = F_{ji} = F_{ij}(\eta_i, \eta_j)$$

donde la **razón de disipación** es $dE/dt = -2F \;\therefore\; F > 0$.

Calculando la **fuerza de amortiguamiento**,

$$\mathbf{F} = -\nabla_v F = -\left(\frac{\partial F}{\partial v_x}, \frac{\partial F}{\partial v_y}, \frac{\partial F}{\partial v_z} \right),$$

$$\Rightarrow \quad Q_i = -\sum \nabla_v F \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_i} = -\sum \nabla_v F \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_j}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{1}{2} F_{ij} \dot{\eta}_j.$$

[6] Función de disipación de Rayleight: $F = (1/2) \sum_i (k_x v_{ix}^2 + k_y v_{iy}^2 + k_z v_{iz}^2)$

Expresando la ecuación de Lagrange en términos de las **coordenadas normales** ζ_i,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\zeta}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \zeta_i} = Q_i,$$

en donde,

$$T = \frac{1}{2}T_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j \to \frac{1}{2}\dot{\zeta}_i\dot{\zeta}_i, \qquad V = \frac{1}{2}V_{ij}\eta_i\eta_j \to \frac{1}{2}\omega_i^2\zeta_i^2,$$

$$F = \frac{1}{2}F_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j \to \frac{1}{2}F_i\dot{\zeta}_i\dot{\zeta}_i,^7 \quad \Rightarrow \quad Q_i = -\frac{\partial F}{\partial \dot{\eta}_i} \to -\frac{\partial F_D}{\partial \dot{\zeta}_i} = -F_i\dot{\zeta}_i.$$

Por tanto, se obtiene la ec. de movimiento sustituyendo los términos anteriores en la ec. de Lagrange:

$$\ddot{\zeta}_i + F_i\dot{\zeta}_i + \omega_i^2\zeta_i = 0$$

lo cual representa una ecuación **diferencial homogénea** lineal en ζ_i.

[7] en donde se ha aplicado una **transf. de congruencia**.

Proponiendo una solución oscilatoria a la ec. anterior,

$$\zeta_i = C_i e^{-i\omega_i' t}, \quad \omega_i' = \text{frec. general del sistema},$$

y sustituyendo en la ec. de movimiento obtenemos,

$$\omega_i'^2 + i\omega_i' F_i - \omega_i^2 = 0, \quad \therefore \quad \omega_i' = -i\frac{F_i}{2} + \left[\omega_i^2 - \left(\frac{F_i}{2}\right)^2\right]^{1/2},$$

lo cual indica que tenemos una parte no$-$oscilatoria, ya que $\omega_i' \in \mathbb{C}$.

La solución para ζ_i es, por tanto:

$$\zeta_i = C_i e^{-i\omega_i' t} = C_i e^{-F_i t/2} e^{-i\left[\omega_i^2 - (F_i/2)^2\right]^{1/2} t},$$

- $e^{-i\left[\omega_i^2 - (F_i/2)^2\right]^{1/2} t}$: representa la oscilación en sí y se le conoce como **frecuencia natural de oscilación**.
- $e^{-F_i t/2}$: indica una **atenuación** de la amplitud debida al efecto de amortiguamiento ($F_i > 0$), disipando la energía.

Efectos combinados: excitación y amortiguamiento

Si consideramos ambos efectos en el sistema, **excitación** y **amortiguamiento**, tendremos una ecuación de movimiento del tipo:

$$\ddot{\zeta}_i + F_i\dot{\zeta}_i + \omega_i^2\zeta_i = Q_i \ \ \forall \ \ Q_i = Q_{0i}e^{i\Omega t}.$$

Usando los resultados anteriores podemos proponer una solución,

$$\zeta_i(t) = \zeta_i^h(t) + \zeta_i^p(t),$$

donde,

$$\zeta_i^h(t) = C_i e^{-F_i t/2} e^{-i\left[\omega_i^2 - (F_i/2)^2\right]^{1/2} t}, \ \ \zeta_i^p(t) = B_i e^{i\Omega t} \ \leftarrow \text{sol. propuesta.}$$

Siendo que la amplitud B_i se encuentra sustituyendo ζ_i^p en la ec. de movimiento,

$$B_i = \frac{Q_{0i}}{\omega_i^2 - \Omega^2 + i\Omega F_i}.$$

De la solución completa se tiene lo siguiente:

- ζ_i^h: al término de oscilación natural con un factor de amortiguamiento se le conoce como **respuesta transitoria**.
- ζ_i^p: la componente de excitación muestra una amplitud finita aún en $\Omega = \omega_i$ y se le llama **respuesta de estado estacionario**.

Respecto a la **fuerza de excitación,** Q_i y la **respuesta** ζ_i^p a la misma, observamos que no están necesariamente en fase,

$$\mathrm{Tg}\,\gamma = \frac{\mathbb{I}\mathrm{m}(Q_{0i}/B_i)}{\mathbb{R}\mathrm{e}(Q_{0i}/B_i)} = \frac{\Omega F_i}{\omega_i^2 - \Omega^2},^{8} \quad \forall \quad \frac{Q_{0i}}{B_i} = \omega_i^2 - \Omega^2 + i\Omega F_i,$$

y donde la amplitud del estado estacionario está dada como,

$$|B_i| = \frac{|Q_{0i}|}{\left[(\omega_i^2 - \Omega^2) + \Omega^2 F_i^2\right]^{1/2}}.$$

[8] donde $\mathrm{Tg}\,\gamma$ representa la diferencia de fases.