Contenido: Tema 07

Contenido: Tema 07

El **método Hamiltoniano** no es superior ni aporta información adicional al sistema bajo estudio respecto al formalismo **Lagrangiano**, sin embargo tiene sus ventajas:

Formalismo Lagrangiano

- n grados de libertad: q_i's.
- n ecuaciones de movimiento de **segundo orden**: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$.
- $\therefore$ se necesitan de $2n$ condiciones iniciales para determinar el movimiento del sistema.
- El estado del sistema se representa como un punto en un **espacio de configuración** de n dimensiones.

Formalismo Hamiltoniano

- $2n$ grados de libertad: q_i's y p_i's.
- $2n$ ecuaciones de movimiento de **primer orden**.
- $\therefore$ se necesitan de $2n$ condiciones iniciales para determinar el movimiento del sistema.
- El estado del sistema se representa como un punto en un **espacio fase** de $2n$ dimensiones.

En el formalismo Hamiltoniano las $2n$ variables correspondientes son:

- **Coordenadas generalizadas**: $q_i \ \forall\ i = 1, 2, \ldots, n$.
- **Momentos conjugados**: $p_i = \partial L(q_j, \dot{q}_j)/\partial \dot{q}_i \ \forall\ i = 1, 2, \ldots, n$.

donde el set $\{(q_i, p_i)\}$ se le conoce como **variables canónicas**.

La transición del formalismo Lagrangiano $L(q, \dot{q}, t)$ al Hamiltoniano $H(q, p, t)$ se realiza mediante:

Transformaciones de Legrende

Consideremos una función de dos variables $f(x, y)$, tal que su diferencial total sea:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = u dx + v dy,$$

entonces, si queremos cambiar la base (x, y) a (u, y), tal que ahora una nueva función dg se exprese en términos de du y dy, definimos:

$$g = f - ux \quad \Rightarrow \quad dg = df - udx - xdu, \quad \Rightarrow \quad dg = vdy - xdu.$$

Transformaciones de Legendre y ecuaciones de Hamilton

Transformación de Legrende

Comparando el resultado anterior de dg con la diferencial total,

$$dg = vdy - xdu = \frac{\partial g}{\partial y}dy + \frac{\partial g}{\partial u}du \quad \therefore \quad v = \frac{\partial g}{\partial y}, \quad x = -\frac{\partial g}{\partial u}.$$

Aplicando ahora la **transformación de Legrende** a $L(q, \dot{q}, t)$ tal que nos arroje $H(q, p, t)$,

$$dL = \frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t}dt, \quad \text{pero} \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \;\Rightarrow\; \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i},$$ [1]

$$\therefore \quad dL = \dot{p}_i dq_i + p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t}dt.$$

Construyendo $H(q, p, t)$ en función de $L(q, \dot{q}, t)$:

$$H(q, p, t) = \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t),$$

[1] sust. p_i en $d/dt(\partial L/\partial \dot{q}_i) - \partial L/\partial q_i = 0$.

obteniendo la diferencial total de $H(q,p,t)$ definido anteriormente,

$$\begin{aligned} H(q,p,t) &= \dot{q}_i p_i - L(q,\dot{q},t), \\ \Rightarrow \quad dH &= \dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i - dL, \\ &= \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt, \\ \text{pero,} \quad dH &= \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt. \end{aligned}$$

Relacionando términos de las expresiones anteriores, obtenemos $2n$ relaciones conocidas como las **ecuaciones canónicas de Hamilton**,

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t},$$

las cuales constituyen el set de $2n$ ecuaciones de movimiento de **primer orden** que reemplazan las n ecs. de segundo orden provenientes del formalismo Lagrangiano.

Notación simpléctica

Las **ecuaciones de Hamilton** se pueden expresar en una forma compacta, construyendo un vector columna $\boldsymbol{\eta}$ con $2n$ elementos:

$$\eta_i = q_i, \quad \eta_{i+n} = p_i, \quad \forall\ 1 \leq i \leq n,$$

igualmente, generamos el vector columna $\partial H/\partial \boldsymbol{\eta}$,

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\eta}}\right)_i = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\eta}}\right)_{i+n} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \forall\ 1 \leq i \leq n.$$

Finalmente, definimos una matriz $\mathbf{J}$ de $2n \times 2n$,

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

donde $\mathbf{0}$ es la matriz $n \times n$ con todos los elementos cero, y $\mathbb{1}$ es la matriz unidad de $n \times n$, cumpliendo $\mathbf{J}$ las sig. propiedades:

$$\tilde{\mathbf{J}}\mathbf{J} = \mathbf{J}\tilde{\mathbf{J}} = \mathbb{1}, \quad \tilde{\mathbf{J}} = -\mathbf{J} = \mathbf{J}^{-1}, \quad \mathbf{J}^2 = -\mathbb{1}, \quad |\mathbf{J}| = +1.$$

Por tanto, con las definiciones anteriores podemos expresar las **ecuaciones de Hamilton** de una manera mas compacta,

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{J}\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\eta}}.$$

Como ejemplo, expresemos el sistema de dos sets de variables canónicas: (q_1, p_1), (q_2, p_2),

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial H/\partial q_1 \\ \partial H/\partial q_2 \\ \partial H/\partial p_1 \\ \partial H/\partial p_2 \end{bmatrix},$$

lo cual cumple con lo obtenido anteriormente,

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Contenido: Tema 07

Coordenadas cíclicas y teoremas de conservación

Coordenadas cíclicas en el Hamiltoniano

Recordemos que en el caso de la formulación Lagrangiana se consideraba a una coordenada q_j **cíclica** si no aparecía explícitamente en L, por tanto,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \text{cte.}$$

$$\text{pero} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = p_j \;\;\&\;\; \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial H}{\partial q_j} = 0,$$

$\therefore$ una coordenada **cíclica** también estará ausente en el Hamiltoniano y el **momento conjugado** será una **cantidad conservada**.

Ahora, para el caso de la dependencia temporal, recordemos que del Hamiltoniano llegabamos a lo siguente,

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Coordenadas cíclicas y teoremas de conservación

Conservación de la energía

Analizando la diferencial total $dH(p,q,t)$,

$$\begin{aligned} dH &= \frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial H}{\partial t}dt, \\ \Rightarrow \quad \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial t} = \dot{q}_i\dot{p}_i - \dot{p}_i\dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial t}, \\ \therefore \quad \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \end{aligned}$$

Entonces, observamos que,

- Si $L \neq L(t)$, $\Rightarrow H \neq H(t) \therefore H$ es una **cte. de movimiento**.
- Si el potencial es **conservativo** ($V = V\{q_i\}$) y la transf. a coordenadas generalizadas no depende **explicitamente** del tiempo $\Rightarrow$ $H = T + V$.

IMP: las cond. anteriores no son mutuamente necesarias y suficientes!!

- Un sistema puede tener $H =$ cte. pero $H \neq T + V$, o ...
- ... puede ser que $H = T + V$, pero $H = H(t) \Rightarrow H \neq$ cte.

Contenido: Tema 07

Procedimiento de Routh y formalismo de inversión

Aplicación a sistemas con coordenadas cíclicas

Cuando tenemos alguna **coordenada cíclica**, digamos q_n, hemos visto el efecto en ambos formalismos,

Formalismo Lagrangiano

$$L = L(q_1, \ldots, q_{n-1}; \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n; t),$$

$\therefore$ aún tenemos un problema de n variables ya que el set $\{\dot{q}_i\}$ sigue apareciendo completo!

Formalismo Hamiltoniano

$$H = H(q_1, \ldots, q_{n-1}; p_1, \ldots, p_{n-1}; \alpha; t),$$

al ser q_n **cíclica** $\Rightarrow p_n = \alpha =$ cte, por lo que tenemos $n-1$ coordenadas y una cte. de integración α,

$$\dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial \alpha}.$$

El **procedimiento de Routh** consiste en aplicar la transformación Hamiltoniana sólo a las **coordenadas cíclicas**, tratando las demás en el formalismo Lagrangiano.

Definición

Si tenemos que las coordenadas cíclicas son $q_{s+1}, \ldots, q_n$, definimos una función R, conocida como **Routhiano**,

$$R(q_1, \ldots, q_s; \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s; p_{s+1}, \ldots, p_n; t) = \sum_{i=s+1}^{n} p_i \dot{q}_i - L,$$

lo cual significa básicamente,

$$R(q_1, \ldots, q_n; \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s; p_{s+1}, \ldots, p_n; t) =$$
$$H_{cycl}(p_{s+1}, \ldots, p_n) - L_{noncycl}(q_1, \ldots, q_s; \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s),$$

en donde tenemos para las s coord. **no-cíclicas** las ecs. de **Lagrange**:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0, \quad \forall \quad i = 1, \ldots, s,$$

y para las $n-s$ coord. **cíclicas** las ecucaciones de **Hamilton**,

$$\frac{\partial R}{\partial q_i} = -\dot{p}_i = 0 \quad \& \quad \frac{\partial R}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \quad \forall \quad i = s+1, \ldots, n.$$

Procedimiento de Routh y formalismo de inversión

Ejemplo: problema de Kepler

En el problema de Kepler tenemos una partícula que se mueve en un plano bajo la influencia de un potencial central general $V(r) = -k/r^n$, $\Rightarrow$ el Lagrangiano es,

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{k}{r^n}.$$

Observamos que la coord. **cíclica** es θ, siendo el **momento conjugado** p_θ, por tanto el **Routhiano** será,

$$R(r, \dot{r}, p_\theta) = p_\theta\dot{\theta} - L = p_\theta\dot{\theta} - \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{k}{r^n},$$

$$\forall \;\; p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \;\rightarrow\; \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2},$$

$$\Rightarrow \;\; R(r, \dot{r}, p_\theta) = \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{k}{r^n}.$$

Ahora, para hallar las ecuaciones de movimento, aplicamos el formalismo **Lagrangiano** para las coord. **no-cíclica** r,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial R}{\partial r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{r} - \frac{p_\theta^3}{mr^3} + \frac{nk}{r^{n+1}} = 0.$$

Aplicando ahora las ecuaciones de **Hamilton** a la coord. **cíclica** θ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \theta} &= -\dot{p}_\theta = 0, \\ \frac{\partial R}{\partial p_\theta} &= \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}, \\ \Rightarrow \quad p_\theta &= mr^2\dot{\theta} = l = \text{cte.} \end{aligned}$$

resultado que se había obtenido previamente, pero mediante un procedimiento mas laborioso.

Procedimiento de Routh y formalismo de inversión

Formalismo de inversión

En muchas ocasiones el Lagrangiano puede ser descrito como la suma de funciones homogéneas[2] de diferente **grado**:

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) = L_0(q_i, t) + L_1(q_i, \dot{q}_i, t) + L_2(q_i, \dot{q}_i, t),$$

siendo,

- $L_0 \rightarrow$ grado **cero** en $\dot{q}_i$,
- $L_1 \rightarrow$ grado **uno** en $\dot{q}_i$,
- $L_2 \rightarrow$ grado **dos** en $\dot{q}_i$.

Si, además, se cumple:

- $L_1 \rightarrow$ función **lineal** en $\dot{q}_i$,
- $L_2 \rightarrow$ función **cuadrática** en $\dot{q}_i$,

entonces el Lagrangiano puede ser descrito, de manera general, como:

$$L(q, \dot{q}, t) = L_0(q, t) + \dot{q}_i a_i(q, t) + {}^1\!/_2\ \dot{q}_k \dot{q}_m T_i(q, t),$$

$$\therefore \quad L(q, \dot{q}, t) = L_0(q, t) + \dot{\mathbf{q}}^\dagger \mathbf{a} + {}^1\!/_2\ \dot{\mathbf{q}}^\dagger \mathbf{T} \dot{\mathbf{q}},$$

donde $\dot{\mathbf{q}}$ representa el vector de velocidades generalizadas, $\mathbf{a}$ un vector columna y $\mathbf{T}$ una matriz que pueden depender de $\{q_i\}$.

[2] en término de las velocidades generalizadas

Formalismo de inversión

En la notación vectorial planteada anteriormente, expresamos el Hamiltoniano, mediante la transformación de Legrende,

$$\begin{aligned} H(q,p,t) &= \dot{\mathbf{q}}^{\dagger}\mathbf{p} - L \;\; \forall \;\; \mathbf{p} = \mathbf{a} + \mathbf{T}\dot{\mathbf{q}},^{3} \\ &= \dot{\mathbf{q}}^{\dagger}\left(\mathbf{p}-\mathbf{a}\right) - \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^{\dagger}\mathbf{T}\dot{\mathbf{q}} - L_0, \end{aligned}$$

siendo que para obtener la forma de $H(p,q,t)$ es necesario sustituir $\dot{\mathbf{q}}$ en términos de $\mathbf{p}$ mediante la regla de transformación,

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{T}^{-1}\left(\mathbf{p}-\mathbf{a}\right) \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{q}}^{\dagger} = \left(\mathbf{p}^{\dagger} - \mathbf{a}^{\dagger}\right)\mathbf{T}^{-1}.^{4}$$

Con lo anterior obtenemos finalmente la expresión para el Hamiltoniano,

$$H(q,p,t) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{p}^{\dagger} - \mathbf{a}^{\dagger}\right)\mathbf{T}^{-1}\left(\mathbf{p}-\mathbf{a}\right) - L_0.$$

[3] lo cual viene de la relación $p_i = \partial L/\partial \dot{q}_i$.

[4] donde $\mathbf{T}$ es simétrica.

Contenido: Tema 07

Ecuaciones de Hamilton desde principios variacionales

Principio de Hamilton modificado

En cálculo de variaciones se estudió el **principio de Hamilton** en el espacio de configuraciones,

$$\delta I \equiv \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0 \;\; \forall \;\; \delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0.$$

Ahora, se desea expresar lo anterior en términos del **Hamiltoniano**,

$$H(q, p, t) = p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t) \quad \Rightarrow \quad L(q, \dot{q}, t) = p_i \dot{q}_i - H(q, p, t),$$

con lo cual se obtiene el **principio de Hamilton modificado** en el espacio fase:

$$\delta I \equiv \delta \int_{t_1}^{t_2} \left[p_i \dot{q}_i - H(q, p, t) \right] dt = 0,$$

en donde se impone que la acción I sea estacionaria bajo variaciones independientes de q y p y fijo en los extremos:

$$\begin{aligned} p_i &\rightarrow p_i + \epsilon_1 \eta_i(t), \quad \text{tal que} \;\; \delta p_i(t_1) = \delta p_i(t_2) = 0, \\ q_i &\rightarrow q_i + \epsilon_2 \xi_i(t), \quad \text{tal que} \;\; \delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0. \end{aligned}$$

Calculando la variación en el principio de Hamilton modificado,

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[p_i\delta\dot{q}_i + \dot{q}_i\delta p_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i\right]dt = 0,$$

donde analizando el primer término,

$$p_i\delta\dot{q}_i = p_i\frac{d}{dt}(\delta q_i) = \frac{d}{dt}(p_i\delta q_i) - \dot{p}_i\delta q_i,$$

el cual es sustituido en la expresión:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{d}{dt}(p_i\delta q_i) - \dot{p}_i\delta q_i + \dot{q}_i\delta p_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i\right]dt = 0,$$

$$\Rightarrow \quad \int_{t_1}^{t_2} d\left[p_i\delta q_i\right] + \int_{t_1}^{t_2}\left[-\dot{p}_i\delta q_i + \dot{q}_i\delta p_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i\right]dt = 0,$$

integrando el primer término, observamos:

$$\Rightarrow \quad \int_{t_1}^{t_2} d\left[p_i\delta q_i\right] = p_i\delta q_i\Big|_{t_1}^{t_2} = p_i(t_2)\delta q_i(t_2) - p_i(t_1)\delta q_i(t_1) = 0.$$

Entonces sólo nos queda el segundo término,

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[-\dot{p}_i \delta q_i + \dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i \right] dt = 0,$$

del cual agrupamos:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i \right] dt = 0,$$

como tenemos que las q_i's y p_i's son coordenadas **independientes**, entonces las δq_i's y δp_i's también lo son, por tanto:

$$\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0 \quad \& \quad \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0,$$

las cuales representan a las **ecuaciones canónicas de Hamilton**,

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \& \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Ecuaciones de Hamilton desde principios variacionales

Hamilton con constricciones

En el caso de que las variables canónicas no sean todas **independientes**, sino que esten conectadas mediantes condiciones **auxiliares**:

$$\psi_k(q_i, p_i, t) = 0,$$

es necesario desacoplar las var. canónicas $\{(q_i, p_i)\}$ mediante el uso de los mult. de Lagrange en el principio de Hamilton modificado,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[p_i \dot{q}_i - H - \sum_k \lambda_k \psi_k \right] dt = 0,$$

en donde aplicando las variaciones se obtiene:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\delta \left(p_i \dot{q}_i - H \right) - \sum_k \lambda_k \delta \psi_k \right] dt = 0,$$

donde la primera parte de la expresión anterior se resuelve exactamente igual que en el caso sin constricciones:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \left(p_i \dot{q}_i - H \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(-\dot{p}_i \delta q_i + \dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta p_i \right) dt = 0$$

Ecuaciones de Hamilton desde principios variacionales

Hamilton con constricciones

mientras que para el segundo término, tenemos:

$$\delta\psi_k(q_i, p_i, t) = \frac{\partial\psi_k}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial\psi_k}{\partial p_i}\delta p_i,$$

sustituyendo ambos resultados en la expresión obtenida anteriormente y agrupando:

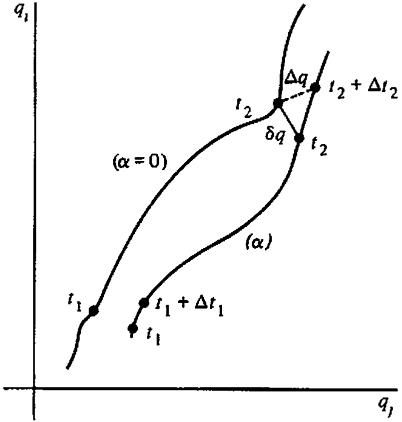
$$0 = \int_{t_1}^{t_2}\left[\delta\left(p_i\dot{q}_i - H\right) - \sum_k \lambda_k \delta\psi_k\right]dt = \ldots$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\left(-\dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} - \sum_k \lambda_k \frac{\partial\psi_k}{\partial q_i}\right)\delta q_i + \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} - \sum_k \lambda_k \frac{\partial\psi_k}{\partial p_i}\right)\delta p_i\right]dt,$$

y debido a que, ahora si, los $\{\delta q_i\}$ y $\{\delta p_i\}$ son **independientes**, se obtienen las **ecs. canónicas de Hamilton con constricciones**:

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} + \sum_k \lambda_k \frac{\partial\psi_k}{\partial p_i} = \dot{q}_i \quad \& \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_k \lambda_k \frac{\partial\psi_k}{\partial q_i} = -\dot{p}_i.$$

Contenido: Tema 07



El **principio de mínima acción** involucra la variación Δ que tiene menos restricciones que la variación δ.

- La variación de la trayectoria puede tener límites diferentes en t que la trayectoria original,
- Puede haber variación en las coordenadas q de los límites:

$$\Rightarrow \quad q_i(t,\alpha) = q_i(t,0) + \alpha\eta_i(t),$$
$$\forall \quad \eta_i(t_1), \eta_i(t_2) \neq 0.$$

Expresando por tanto la **variación Δ** de la acción:

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt \equiv \int_{t_1+\Delta t_1}^{t_2+\Delta t_2} L(\alpha) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(0) dt.$$

Principio de Mínima Acción

Variación Δ

La variación Δ se compone de dos partes,

- Cambio en el **integrando** en la trayectoria alterna pero con los límites en t de la original.
- Cambio en los **límites** de la integral de la trayectoria original.

Por tanto, podemos expresar la variación Δ de la sig. manera,

$$\begin{aligned}\Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt &= \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt + \int_{t_1+\Delta t_1}^{t_2+\Delta t_2} L(0) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(0) dt, \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt + L(t_2)\Delta t_2 - L(t_1)\Delta t_1.\end{aligned}$$

La variación de la primera integral se realiza como en el caso del principio de Hamilton, excepto que $\delta q_i(t_1), \delta q_i(t_2) \neq 0$,

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \bigg|_{t_1}^{t_2} = p_i \delta q_i |_{t_1}^{t_2}.$$

en donde el primer término corresponde a la ecuación de Lagrange.

Principio de Mínima Acción

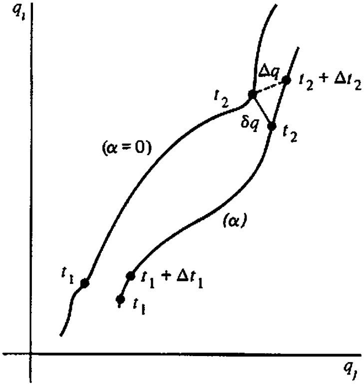
Variación Δ

Por tanto, la variación queda como,

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = L(t_2)\Delta t_2 - L(t_1)\Delta t_1 + p_i \delta q_i \big|_{t_1}^{t_2} = (L\Delta t + p_i \delta q_i)\big|_1^2 .$$

Expresando ahora la variación δq_i en términos de Δq_i:

$$\begin{aligned}
\Delta q_i(2) &= q_i(t_2 + \Delta t_2, \alpha) - q_i(t_2, 0), \\
&= q_i(t_2 + \Delta t_2, 0) - q_i(t_2, 0) + \ldots \\
&\quad \ldots + \alpha \eta_i(t_2 + \Delta t_2), \\
&= q_i(t_2, 0) + \dot{q}_i(t_2, 0)\Delta t_2 + \ldots \\
&\quad \ldots - q_i(t_2, 0) + \alpha \eta_i(t_2) + \alpha \dot{\eta}_i(t_2)\Delta t_2, \\
\Delta q_i(2) &= \dot{q}_i(2, 0)\Delta t_2 + \delta q_i(2).
\end{aligned}$$



En donde se ha usado: $\delta q_i(2) = q_i(t_2, \alpha) - q_i(t_2, 0) = \alpha \eta_i(t_2).$

Reescribiendo la variación de la integral de acción,

$$\begin{aligned}\Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt &= \left(L\Delta t + p_i \delta q_i\right)\Big|_1^2 = \left(L\Delta t - p_i \dot{q}_i \Delta t + p_i \Delta q_i\right)\Big|_1^2 ,\\ &= \left(\left[L - p_i \dot{q}_i\right]\Delta t + p_i \Delta q_i\right)\Big|_1^2 ,\\ &= \left(p_i \Delta q_i - H\Delta t\right)\Big|_1^2 .\end{aligned}$$

El resultado anterior debe cumplir con las siguientes condiciones,

- Se consideran sistemas donde $L \neq L(t)$, $H \neq H(t) \Rightarrow H$ es una cantidad **conservada**.
- La variación Δ es tal que H se conserva en **todas** las trayectorias posibles (α's).
- Las trayectorias alternas deben cumplir que $\Delta q_i(t_1), \Delta q_i(t_2) = 0$, aún manteniéndose $\Delta t \neq 0$.

$$\Rightarrow \quad \Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = -H(\Delta t_2 - \Delta t_1).$$

Principio de Mínima Acción

Variación Δ

Bajo las mismas condiciones anteriores, vemos que acción también se puede expresa como,

$$\int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} (p_i \dot{q}_i - H)\, dt,$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} p_i \dot{q}_i dt - H(t_2 - t_1).$$

Aplicando ahora la variación Δ al resultado anterior,

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \Delta \int_{t_1}^{t_2} p_i \dot{q}_i dt - H(\Delta t_2 - \Delta t_1),$$

pero, $$\Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = -H(\Delta t_2 - \Delta t_1),$$

$$\Rightarrow \quad \Delta \int_{t_1}^{t_2} p_i \dot{q}_i dt = 0.$$

lo cual representa el **principio de mínima acción**.