Contenido: Tema 08

Contenido: Tema 08

Transformaciones canónicas y función generatriz

Motivación

Consideremos un problema en el cual el Hamiltoniano es una **cte. de movimiento** y donde todas las coordenadas q_i son **cíclicas**:

$$\Rightarrow \quad p_i = \alpha_i = \text{cte.},$$

por tanto, el Hamiltoniano se puede expresar como:

$$H = H(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

En consecuencia, las **ecuaciones canónicas de Hamilton** vendrán dadas como,

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \;\; \& \;\; \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial \alpha_i} = \omega_i,$$

en donde:

$$\omega_i = \omega_i(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \text{cte.} \quad \Rightarrow \quad q_i = \omega_i t + \beta_i \;\; \forall \;\; \beta_i = \text{cte},$$

lo cual representa la solución del problema.

Transformaciones canónicas y función generatriz

Transformaciones puntuales

El objetivo de transformar el sistema de coordenadas en que trabajamos (en un problema en particular) es **simplificar** la expresión y solución del mismo,

$$Q_i = Q_i(q, t),$$

lo anterior se conoce como una **transformación puntual** en el **espacio de configuración**.

En el formalismo Hamiltoniano, donde tenemos $2n$ q's y p's **independientes**, necesitamos:

$$Q_i = Q_i(q, p, t), \quad P_i = P_i(q, p, t),$$

siendo ahora la tranformación definida en el **espacio fase**. Además, el set (Q, P) deben ser **variables canónicas**, por tanto:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i},$$

en donde $K = K(Q, P, t)$ representa al **Hamiltoniano transformado**.

Transformaciones canónicas y función generatriz

Transformaciones canónicas

Para que las (Q, P) sean consideradas **variables canónicas**, deben cumplir con el **principio modificado de Hamilton**,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \Big(P_i \dot{Q}_i - K(Q, P, t) \Big)\, dt = 0,$$

siendo que las coordenadas originales (q, p) también cumplen con el principio,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(p_i \dot{q}_i - H(q, p, t) \right) dt = 0.$$

Para que el principio de Hamilton modificado se cumpla en ambos esquemas, los integrandos deben ser conectados mediante la relación:

$$p_i \dot{q}_i - H = P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt},$$

conocida como **transformación canónica** y F la **función generatriz**.[1]

[1] F dependiendo de una mezcla de las coordenadas de los espacios fase.

Transformaciones canónicas

El papel de la función F es de actuar como un *link* entre los sistemas (q,p) y (Q,P), por tanto, analizemos cuando:

$$F = F_1(q,Q,t).$$

Aplicando la **transformación canónica** con esta función generatriz:

$$\begin{aligned} p_i\dot{q}_i - H &= P_i\dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt}, \\ &= P_i\dot{Q}_i - K + \frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\dot{Q}_i, \\ \therefore \quad 0 &= \left(-p_i + \frac{\partial F_1}{\partial q_i}\right)\dot{q}_i + \left(P_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\right)\dot{Q}_i + \left(H - K + \frac{\partial F_1}{\partial t}\right), \end{aligned}$$

como las coordenadas q_i y Q_i son **independientes**,[2] entonces:

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}, \quad K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}.$$

[2] debido a la definición de la función generatriz $F = F_1(q,Q,t)$.

Se puede dar el caso en que p_i **no** pueda ser expresada como $p_i(q, Q, t)$, si no más bien como $p_i(q, P, t)$, por tanto necesitamos una **función generatriz** $F = F(q, P, t)$,

$$F = F_2(q, P, t) - Q_i P_i.$$

Sustituyendo lo anterior en la transformación canónica,

$$\begin{aligned}
p_i \dot{q}_i - H &= P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt}, \\
&= P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF_2}{dt} - \dot{Q}_i P_i - Q_i \dot{P}_i, \\
&= -K + \frac{\partial F_2}{\partial t} + \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \dot{P}_i - Q_i \dot{P}_i, \\
\therefore \quad 0 &= \left(-p_i + \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i + \left(-Q_i + \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \right) \dot{P}_i + \left(H - K + \frac{\partial F_2}{\partial t} \right),
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}, \quad K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}.$$

En general, se cuentan con **dos** transformaciones adicionales,

$$F = F(p, Q, t) \quad \& \quad F = F(p, P, t),$$

que junto a las dos iniciales, forman el set de **transformaciones canónicas básicas**:

Transformaciones canónicas básicas

Función generatriz	Derivativas	
$F = F_1(q, Q, t)$	$p_i = \partial F_1/\partial q_i$	$P_i = -\partial F_1/\partial Q_i$
$F = F_2(q, P, t) - Q_i P_i$	$p_i = \partial F_2/\partial q_i$	$Q_i = \partial F_2/\partial P_i$
$F = F_3(p, Q, t) + q_i p_i$	$q_i = -\partial F_3/\partial p_i$	$P_i = -\partial F_3/\partial Q_i$
$F = F_4(p, P, t) + q_i p_i - Q_i P_i$	$q_i = -\partial F_4/\partial p_i$	$Q_i = \partial F_4/\partial P_i$

Transformaciones canónicas y función generatriz

Tipos de transformaciones canónicas

Finalmente, cabe mencionar que una función generatriz **no** tiene por que ser una de las básicas anteriores para **todos** los grados de libertad del sistema.

Por ejemplo,

$$F'(q_1, p_2, P_1, Q_2, t),$$

en este caso se tiene que,

$$F = F'(q_1, p_2, P_1, Q_2, t) - Q_1 P_1 + q_2 p_2,$$

dando como resultado las siguientes relaciones para las ecuaciones de transformación o derivativas:

$$p_1 = \frac{\partial F'}{\partial q_1}, \quad Q_1 = \frac{\partial F'}{\partial P_1},$$
$$q_2 = -\frac{\partial F'}{\partial p_2}, \quad P_2 = -\frac{\partial F'}{\partial Q_2}, \quad K = H + \frac{\partial F'}{\partial t}.$$

Consideremos el **oscilador armónico** en una dimensión,

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2} = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2 q^2) \;\; \forall \;\; \frac{k}{m} = \omega^2.$$

Entonces, nos planteamos la posibilidad de encontrar una **transformación canónica** de la siguiente forma,

$$p = f(P)\mathrm{Cos}\, Q, \quad q = \frac{f(P)}{m\omega}\mathrm{Sen}\, Q,$$

tal que el Hamiltoniano pueda ser expresado como:

$$K = H = \frac{f^2(P)}{2m}\left(\mathrm{Cos}^2 Q + \mathrm{Sen}^2 Q\right) = \frac{f^2(P)}{2m},$$

con lo cual Q sería una **coordenada cíclica** en el nuevo sistema, obteniendo así una expresión para el problema mucho mas sencilla de resolver.

Ejemplo: oscilador armónico

Proponiendo la siguiente función **generatriz** para obtener tal transf.,

$$F_1 = \frac{m\omega q^2}{2}\operatorname{Ctg} Q,$$

donde las ecuaciones de transformación vienen dadas como,

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = m\omega q \operatorname{Ctg} Q, \quad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2\operatorname{Sen}^2 Q},$$

resolviendo para $q(P,Q)$ y $p(P,Q)$,

$$q = \left(\frac{2P}{m\omega}\right)^{1/2} \operatorname{Sen} Q, \quad p = (2Pm\omega)^{1/2} \operatorname{Cos} Q,$$

$\therefore$ se encuentra la expresión para $f(P)$ de la propuesta original:

$$f(P) = (2Pm\omega)^{1/2},$$

lo cual nos arroja como Hamiltoniano,

$$K = H = f^2(P)/2m = \omega P.$$

Ejemplo: oscilador armónico

Del Hamiltoniano $H = \omega P$ en el sistema (P, Q) se observa:

- Q es una coordenada **cíclica**,
- $\therefore P$ es una **constante de movimiento**: $P = E/\omega$.

Obteniendo las ecuaciones canónicas de movimiento,

$$\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} = \omega \quad \Rightarrow \quad Q = \omega t + \alpha.$$ [3]

Con la ecuación anterior se pueden hallar las soluciones para q y p:

$$q = \left(\frac{2P}{m\omega}\right)^{1/2} \mathrm{Sen}\, Q = \left(\frac{2E}{m\omega^2}\right)^{1/2} \mathrm{Sen}\,(\omega t + \alpha),$$

$$p = (2Pm\omega)^{1/2} \mathrm{Cos}\, Q = (2Em)^{1/2} \mathrm{Cos}\,(\omega t + \alpha),$$

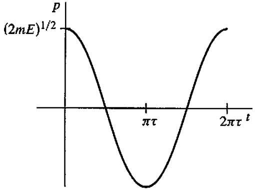
$$\therefore \quad 1 = \frac{q^2}{2E/m\omega^2} + \frac{p^2}{2mE}.$$

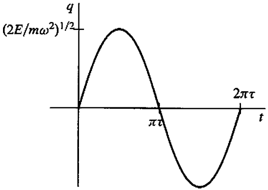
[3] la segunda ecuación es $\dot{P} = -\partial H/\partial Q = 0$

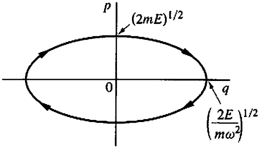
Transformaciones canónicas y función generatriz

Ejemplo: oscilador armónico

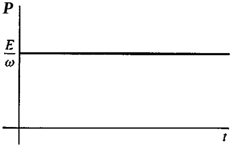
Graficando en ambos sistemas (q,p) y (Q,P),

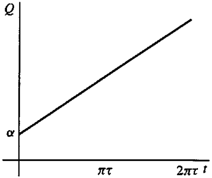


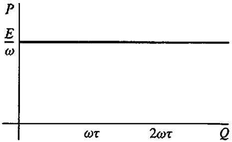




$$p = (2Em)^{1/2}\,\mathrm{Cos}\,(\omega t + \alpha) \qquad q = \left(\frac{2E}{m\omega^2}\right)^{1/2}\mathrm{Sen}\,(\omega t + \alpha) \qquad \frac{q^2}{2E/m\omega^2} + \frac{p^2}{2mE} = 1$$







$$P = E/\omega \qquad Q = \omega t + \alpha \qquad P = E/\omega$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
(H;q(0),p(0)) \arrow[r, "\substack{\text{Solution of the canonical equations}\\ \text{of Hamiltonian } H}"] \arrow[d, "\mathcal{M}(0)", "\substack{\text{Canonical forth}\\ \text{transformation}\\ \text{of Hamiltonian}\\ \text{and initial}\\ \text{conditions}}"'] & (q(t),p(t)) \\
(K;Q(0),P(0)) \arrow[r, "\substack{\text{Solution of the canonical equations}\\ \text{of Hamiltonian } H'}"] & (Q(t),P(t)) \arrow[u, "\mathcal{M}^{-1}(t)", "\substack{\text{Canonical back}\\ \text{transformation}\\ \text{of the solution}}"']
\end{tikzcd}
$$

Contenido: Tema 08

Otro método para describir las **transformaciones canónicas** es la **formulación simpléctica o matricial**.

Consideremos una transformación canónica **restringida**,[4]

$$Q_i = Q_i(q,p) \;\;\&\;\; P_i = P_i(q,p) \quad \Rightarrow \quad K = H,$$

y calculando la derivada temporal de Q_i en las ecs. anteriores,

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\dot{p}_j = \frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j}.$$

Por otro lado, si se invierten las transformaciones previamente descritas:

$$q_j = q_j(Q,P), \quad p_j = p_j(Q,P),$$

$\therefore$ se puede considerar $H(q,p) = H(Q,P)$, por tanto, calculando:

$$\frac{\partial H}{\partial P_i} = \frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial P_i} + \frac{\partial H}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial P_i}.$$

[4] es decir, que no depende del tiempo.

Comparando los resultados de $\dot{Q}_i$ y $\partial H/\partial P_i$, tenemos que si se cumplen las relaciones siguientes:

$$\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\right)_{q,p} = \left(\frac{\partial p_j}{\partial P_i}\right)_{Q,P}, \quad \left(\frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\right)_{q,p} = -\left(\frac{\partial q_j}{\partial P_i}\right)_{Q,P} \quad \Rightarrow \quad \dot{Q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i}.$$

es decir, la transformación sera **canónica**.

Realizando un procedimiento similar para $P_i(p, q)$,

$$\dot{P}_i = \frac{\partial P_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial P_i}{\partial p_j}\dot{p}_j = \frac{\partial P_i}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial P_i}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j},$$

$$\frac{\partial H}{\partial Q_i} = \frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial Q_i} + \frac{\partial H}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial Q_i},$$

$$\Rightarrow \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial Q_i} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{\partial P_i}{\partial q_j}\right)_{q,p} = -\left(\frac{\partial p_j}{\partial Q_i}\right)_{Q,P}, \quad \left(\frac{\partial P_i}{\partial p_j}\right)_{q,p} = \left(\frac{\partial q_j}{\partial Q_i}\right)_{Q,P}$$

Enfoque simpléctico y transformaciones infinitesimales

Formulación simpléctica o matricial

Para expresar lo anterior en forma matricial, recordemos que $\boldsymbol{\eta}$ contiene los $2n$ elementos q_j, p_j, con las ecs. de Hamilton dadas como:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{J}\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\eta}} \ \ \forall \ \ \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

por lo que de manera similar se puede expresar un vector de $2n$ entradas Q_i, P_i para una **transformación cańonica**,

$$\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\eta}).$$

Para ello se aplican las derivadas temporales y así hallar las ecs. de movimiento de Q_i y P_i,

$$\dot{\zeta}_i = \frac{\partial \zeta_i}{\partial \eta_j}\dot{\eta}_j \ \ \forall \ \ i, j = 1, 2, \ldots, 2n,$$

expresando de forma matricial lo anterior,

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \mathbf{M}\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{M}\mathbf{J}\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\eta}} \ \ \forall \ \ M_{ij} = \frac{\partial \zeta_i}{\partial \eta_j}.$$

Formulación simpléctica o matricial

Continuando con el procedimiento, podemos considerar $H(\boldsymbol{\eta}) = H(\boldsymbol{\zeta})$ gracias a la **transformación inversa**, por tanto:

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_i} = \frac{\partial H}{\partial \zeta_j}\frac{\partial \zeta_j}{\partial \eta_i} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \tilde{\mathbf{M}}\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\zeta}},$$

relacionando el resultado anterior con el de $\dot{\boldsymbol{\zeta}}$,

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \mathbf{MJ}\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \mathbf{MJ}\tilde{\mathbf{M}}\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\zeta}}.$$

Por otro lado, la transformación canónica dada por $\zeta = \zeta(\eta)$ mantiene H como el nuevo Hamiltoniano, por tanto:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{J}\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\eta}} \quad \Rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{\zeta}} = \mathbf{J}\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\zeta}},$$

lo cual comparado con el resultado anterior nos arroja:

$$\mathbf{MJ}\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{J},$$

tal que la transformación $\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\eta})$ sea **canónica**.

Algunas de las propiedades de la **condición simpléctica** para una transformación canónica son,

$$\mathbf{MJ\tilde{M}} = \mathbf{J} \;\Rightarrow\; \mathbf{MJ} = \mathbf{J\tilde{M}}^{-1} \;\Rightarrow\; \mathbf{JM} = \mathbf{\tilde{M}}^{-1}\mathbf{J}\ [5] \;\Rightarrow\; \mathbf{\tilde{M}JM} = \mathbf{J},$$

en donde $\mathbf{M}$ es conocida como la **matriz simpléctica**.

Como ejemplo analicemos el caso de la función generatriz $F = F_2(q_1, P_1) - Q_1P_1 + F_1(q_2, Q_2)$, donde $F_2(q_1, P_1) = q_1P_1$ y $F_1(q_2, Q_2) = q_2Q_2$,

$$p_i\dot{q}_i - H = P_i\dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt},$$

$$p_i\dot{q}_i - H + K + P_i\dot{Q}_i = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial P_i}\dot{P}_i + \frac{\partial F}{\partial Q_i}\dot{Q}_i,$$

$$p_1\dot{q}_1 + p_2\dot{q}_2 - H = P_1\dot{Q}_1 + P_2\dot{Q}_2 - K - P_1\dot{Q}_1 - Q_1\dot{P}_1 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\partial F_2}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial F_1}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial F_2}{\partial P_1}\dot{P}_1 + \frac{\partial F_1}{\partial Q_2}\dot{Q}_2,$$

[5] $\mathbf{J}^2 = -\mathbb{1}$.

Relacionando término a término tenemos,

$$
\begin{aligned}
p_1\dot{q}_1 + p_2\dot{q}_2 - H = P_1\dot{Q}_1 + P_2\dot{Q}_2 - K - P_1\dot{Q}_1 - Q_1\dot{P}_1 + \ldots \\
\ldots + \frac{\partial F_2}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial F_1}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial F_2}{\partial P_1}\dot{P}_1 + \frac{\partial F_1}{\partial Q_2}\dot{Q}_2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_1 &= \partial F_2/\partial q_1 = P_1, & p_2 &= \partial F_1/\partial q_2 = Q_2, \\
P_2 &= -\partial F_1/\partial Q_2 = -q_2, & Q_1 &= \partial F_2/\partial P_1 = q_1,
\end{aligned}
$$

en donde $F_2(q_1, P_1) = q_1 P_1$ y $F_1(q_2, Q_2) = q_2 Q_2$.

Expresando lo obtenido anteriormente en términos de la **formulación simpléctica** tenemos,

$$
\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\zeta} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}.
$$

Por tanto, la transformación $\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \mathbf{M}\dot{\boldsymbol{\eta}}$ queda como:

$$\begin{bmatrix} \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_2 \\ \dot{P}_1 \\ \dot{P}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{p}_1 \\ -\dot{q}_2 \end{bmatrix},$$

en donde se ha usado el res. de la transf. obtenida anteriormente.[6] Ahora, obteniendo las ecs. de Hamilton para las variables transformadas, $\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \mathbf{J}\partial H/\partial\boldsymbol{\zeta}$, independiente de la transformación F,:

$$\begin{bmatrix} \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_2 \\ \dot{P}_1 \\ \dot{P}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\dot{P}_1 \\ -\dot{P}_2 \\ \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_2 \end{bmatrix}$$

donde $-\dot{P}_i = \partial H/\partial\zeta_i$ para ζ_1 y ζ_2; y $\dot{Q}_i = \partial H/\partial\zeta_i$ para ζ_3 y ζ_4.

[6] el par 1 sin cambios y en el 2 intercambiados con signo opuesto.

Para el caso de transformaciones canónicas $\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\eta}, t)$ se sigue manteniendo que $\mathbf{MJ\tilde{M}} = \mathbf{J}$,[7] aunque el procedimiento anterior para demostrarlo no.

Por ello, podemos considerar:

$$\text{si} \;\; \boldsymbol{\eta} \;\rightarrow\; \boldsymbol{\zeta}(t), \;\; \text{entonces} \; \boldsymbol{\eta} \;\rightarrow\; \boldsymbol{\zeta}(t_0) \;\therefore\; \boldsymbol{\zeta}(t_0) \;\rightarrow\; \boldsymbol{\zeta}(t),$$

es también una transformación canónica, siendo t_0 una constante fija.

Por tanto, si podemos demostrar que $\boldsymbol{\zeta}(t_0) \;\rightarrow\; \boldsymbol{\zeta}(t)$ es una transf. canónica, entonces llegaremos a que $\boldsymbol{\eta} \;\rightarrow\; \boldsymbol{\zeta}(t)$ también lo es.

Para ello introducimos el concepto de **transformación canónica infinitesimal**, en donde solamente términos de primer órden de los infinitesimales son retenidos en el cálculo:

$$Q_i = q_i + \delta q_i, \quad P_i = p_i + \delta p_i, \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\eta} + \delta\boldsymbol{\eta}.$$

[7] conocida como condición simpléctica.

Enfoque simpléctico y transformaciones infinitesimales

Transformaciones infinitesimales

En el formalismo de las funciones generatrices, una transformación canónica infinitesimal puede ser expresada como:

$$F_2 = q_i P_i + \epsilon G(q, P, t),$$

obteniendo las funciones de transformación para F_2,

$$p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j} = P_j + \epsilon \frac{\partial G}{\partial q_j} \;\Rightarrow\; \delta p_j = P_j - p_j = -\epsilon \frac{\partial G}{\partial q_j},$$

$$Q_j = \frac{\partial F_2}{\partial P_j} = q_j + \epsilon \frac{\partial G}{\partial P_j} \;\Rightarrow\; \delta q_j = Q_j - q_j = \epsilon \frac{\partial G}{\partial P_j}.$$

En la ec. para δq_j se tiene que es lineal en ϵ, además de que P y p difieren por un infinitesimal $\Rightarrow$ a primer orden podemos hacer $P_j \to p_j$,

$$\delta q_j = \epsilon \frac{\partial G}{\partial p_j} \quad \therefore \quad \delta \boldsymbol{\eta} = \epsilon \mathbf{J} \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\eta}},$$

en donde $G(q, p)$ es la **función generatriz** de la transformación canónica **infinitesimal**.

Para demostrar que la transformación infinitesimal $\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\eta} + \delta\boldsymbol{\eta}$ es canónica, calculemos el Jacobiano:

$$\mathbf{M} = \frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \mathbb{1} + \frac{\partial(\delta\boldsymbol{\eta})}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \mathbb{1} + \epsilon \mathbf{J} \frac{\partial^2 G}{\partial \boldsymbol{\eta} \partial \boldsymbol{\eta}} \;\; \forall \;\; \delta\boldsymbol{\eta} = \epsilon \mathbf{J} \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\eta}},$$

en donde la segunda derivada representa una matriz cuadrada simétrica,

$$\left(\frac{\partial^2 G}{\partial \boldsymbol{\eta} \partial \boldsymbol{\eta}} \right)_{i,j} = \frac{\partial^2 G}{\partial \eta_i \partial \eta_j}.$$

Debido a $\tilde{\mathbf{J}} = -\mathbf{J}$, $\tilde{\mathbf{M}}$ viene dada como:

$$\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{1} - \epsilon \frac{\partial^2 G}{\partial \boldsymbol{\eta} \partial \boldsymbol{\eta}} \mathbf{J}.$$

Calculando la **condición simpléctica**,

$$\begin{aligned}
\mathbf{MJ\tilde{M}} &= \left(\mathbf{1} + \epsilon\mathbf{J}\frac{\partial^2 G}{\partial\boldsymbol{\eta}\partial\boldsymbol{\eta}}\right)\mathbf{J}\left(\mathbf{1} - \epsilon\frac{\partial^2 G}{\partial\boldsymbol{\eta}\partial\boldsymbol{\eta}}\mathbf{J}\right), \\
&= \left(\mathbf{1} + \epsilon\mathbf{J}\frac{\partial^2 G}{\partial\boldsymbol{\eta}\partial\boldsymbol{\eta}}\right)\left(\mathbf{J} - \epsilon\mathbf{J}\frac{\partial^2 G}{\partial\boldsymbol{\eta}\partial\boldsymbol{\eta}}\mathbf{J}\right), \\
&= \mathbf{J} - \epsilon\mathbf{J}\frac{\partial^2 G}{\partial\boldsymbol{\eta}\partial\boldsymbol{\eta}}\mathbf{J} + \epsilon\mathbf{J}\frac{\partial^2 G}{\partial\boldsymbol{\eta}\partial\boldsymbol{\eta}}\mathbf{J} + O(2), \\
\therefore \quad \mathbf{MJ\tilde{M}} &= \mathbf{J}.
\end{aligned}$$

Por tanto, la condición simpléctica se mantiene para **cualquier** transformación canónica, ya sea que involucre al tiempo o no.

Contenido: Tema 08

Corchetes de Poisson e invariantes canónicos

Definición y fundamentos

Consideremos a $f = f(p,q,t) \Rightarrow$ su derivada total viene dada como:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial p_k}\dot{p}_k,$$
$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f,H],$$

en donde se ha definido al **corchete de Poisson** de f y H como:

$$[f,H] = \frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k}.$$

Para el caso de que f sea una **cte. de movimiento**,[8] se tiene:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + [f,H] = 0,$$

y si además la cte. de movimiento cumple con que $f \neq f(t) \Rightarrow$

$$[f,H] = 0.$$

[8] $df/dt = 0$.

Corchetes de Poisson y de Lagrange e invariantes canónicos

Propiedades

En general, para cualquiera dos cantidades f y g, el **corchete de Poisson** se define como:

$$[f,g] = \frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial g}{\partial q_k}.$$

Algunas propiedades de los corchetes de Poisson son las siguientes,

$$\begin{aligned}
[f,g] &= -[g,f], \\
[f,c] &= 0 \quad \forall \quad c = \text{cte.} \\
[f_1+f_2,g] &= [f_1,g]+[f_2,g], \\
[f_1 f_2,g] &= f_1[f_2,g]+f_2[f_1,g], \\
\frac{\partial}{\partial t}[f,g] &= \left[\frac{\partial f}{\partial t},g\right]+\left[f,\frac{\partial g}{\partial t}\right].
\end{aligned}$$

Si f o g corresponde a p_k o q_k, entonces,

$$[f,q_k] = -\frac{\partial f}{\partial p_k}, \quad [f,p_k] = \frac{\partial f}{\partial q_k}.$$

Corchetes de Poisson y de Lagrange e invariantes canónicos

Propiedades

De la propiedad anterior se sigue que,

$$[q_j, q_k] = 0, \quad [p_j, p_k] = 0, \quad [q_j, p_k] = \delta_{jk}.$$

Adicionalmente, si consideramos que f sea una **variable canónica** y $g = H$, entonces:

$$[q_k, H] = \dot{q}_k, \quad [p_k, H] = \dot{p}_k,$$

lo cual representa a las **ecuaciones canónicas de Hamilton** en el formalismo de corchetes de Poisson.

Otra propiedad importante es el **teorema de Poisson**,

$$[f, g] = \text{cte.} \;\Leftrightarrow\; \frac{df}{dt} = \frac{dg}{dt} = 0 \;\therefore\; f \text{ y } g \text{ son ctes. de movimiento,}$$

asćomo también la **identidad de Jacobi**,

$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0,$$

Del comportamiento del corchete de Poisson para las **variables canónicas** $\{q_i, p_i\}$ se había observado que,

$$[q_i, q_j] = 0, \quad [p_i, p_j] = 0, \quad [q_i, p_j] = \delta_{ij},$$

ahora analicemos el comportamiento de los corchetes cuando se aplican a un nuevo set de **coordenadas canónicas** $\{Q_i, P_i\}$:

$$\begin{aligned}[Q_i, Q_j] &= \frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\frac{\partial Q_j}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k}\frac{\partial Q_j}{\partial q_k}, \\ &= \frac{\partial p_k}{\partial P_i}\frac{\partial Q_j}{\partial p_k} + \frac{\partial q_k}{\partial P_i}\frac{\partial Q_j}{\partial q_k} = \frac{\partial Q_j}{\partial P_i} = 0,\end{aligned}$$

en donde se han usado las derivativas:

$$F_2(q_j, P_j, t) \rightarrow \; Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \;\; \& \;\; p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} = \frac{\partial p_k}{\partial P_i},$$

$$F_4(p_j, P_j, t) \rightarrow \; Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i} \;\; \& \;\; q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} = -\frac{\partial q_k}{\partial P_i}.$$

Analizando ahora el siguiente corchete:

$$[P_i, P_j] = \frac{\partial P_i}{\partial q_k}\frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \frac{\partial P_i}{\partial p_k}\frac{\partial P_j}{\partial q_k},$$
$$= -\frac{\partial p_k}{\partial Q_i}\frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q_k}{\partial Q_i}\frac{\partial P_j}{\partial q_k} = -\frac{\partial P_j}{\partial Q_i} = 0,$$

lo cual se obtiene aplicando las derivativas siguientes:

$$F_1(q_j, Q_j, t) \rightarrow \ P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \ \ \& \ \ p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \ \ \Rightarrow \ \ \frac{\partial P_i}{\partial q_k} = -\frac{\partial p_k}{\partial Q_i},$$
$$F_3(p_j, Q_j, t) \rightarrow \ P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i} \ \ \& \ \ q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i} \ \ \Rightarrow \ \ \frac{\partial P_i}{\partial p_k} = \frac{\partial q_k}{\partial Q_i}.$$

Finalmente, para el siguiente corchete:

$$[Q_i, P_j] = \frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k}\frac{\partial P_j}{\partial q_k} = \frac{\partial p_k}{\partial P_i}\frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q_k}{\partial P_i}\frac{\partial P_j}{\partial q_k} = \frac{\partial P_j}{\partial P_i} = \delta_{ij},$$

con lo cual se demuestra que las mismas relaciones se cumplen para $\{Q_i, P_i\}$, $\therefore$ los chorchetes se mantienen ante una transf. canónica.

Analizando ahora el comportamiento del corchete de Poisson de dos funciones **arbitrarias** $f(q_j, p_j, t)$ y $g(q_j, p_j, t)$, bajo dos diferentes sets $\{q_i, p_i\}$ y $\{Q_i, P_i\}$ relacionadas mediante una **transformación canónica**:

$$\begin{aligned} f(q_j, p_j) &= f\left[Q_k(q_j, p_j), P_k(q_j, p_j)\right], \\ g(q_j, p_j) &= g\left[Q_k(q_j, p_j), P_k(q_j, p_j)\right], \end{aligned}$$

por tanto, calculando el corchete:

$$\begin{aligned} [f, g]_{q,p} &= \frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial g}{\partial q_k}, \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial Q_i}\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} + \frac{\partial f}{\partial P_i}\frac{\partial P_i}{\partial q_k}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial Q_j}\frac{\partial Q_j}{\partial p_k} + \frac{\partial g}{\partial P_j}\frac{\partial P_j}{\partial p_k}\right) + \ldots \\ &\ldots - \left(\frac{\partial f}{\partial Q_i}\frac{\partial Q_i}{\partial p_k} + \frac{\partial f}{\partial P_i}\frac{\partial P_i}{\partial p_k}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial Q_j}\frac{\partial Q_j}{\partial q_k} + \frac{\partial g}{\partial P_j}\frac{\partial P_j}{\partial q_k}\right), \end{aligned}$$

Del resultado anterior, realizando los productos y agrupando los términos que representan los corchetes de las coord. transformadas:

$$
\begin{aligned}
[f,g]_{q,p} &= \frac{\partial f}{\partial Q_i}\frac{\partial g}{\partial Q_j}[Q_i,Q_j] + \frac{\partial f}{\partial P_i}\frac{\partial g}{\partial P_j}[P_i,P_j] + \ldots \\
&\qquad \ldots + \frac{\partial f}{\partial Q_i}\frac{\partial g}{\partial P_j}[Q_i,P_j] - \frac{\partial f}{\partial P_i}\frac{\partial g}{\partial Q_j}[Q_j,P_i], \\
&\qquad = \left(\frac{\partial f}{\partial Q_i}\frac{\partial g}{\partial P_j} - \frac{\partial f}{\partial P_i}\frac{\partial g}{\partial Q_j}\right)\delta_{ij},{}^{9} = \frac{\partial f}{\partial Q_i}\frac{\partial g}{\partial P_i} - \frac{\partial f}{\partial P_i}\frac{\partial g}{\partial Q_i}, \\
\therefore \quad [f,g]_{q,p} &= [f,g]_{Q,P}\,,
\end{aligned}
$$

es decir, el corchete de Poisson se determina de manera unívoca por las funciones f y g, **independiente** del sistema **coordenado**, siempre y cuando la transf. de $\{q_i, p_i\}$ a $\{Q_i, P_i\}$ sea **canónica**.

[9] donde: $[Q_i,Q_j] = [P_i,P_j] = 0$ y $[Q_i,P_j] = \delta_{ij}$.

Otro invariante canónico es el llamado **corchete de Lagrange**, definido como,

$$\{f, g\}_{q,p} = \frac{\partial q_k}{\partial f}\frac{\partial p_k}{\partial g} - \frac{\partial p_k}{\partial f}\frac{\partial q_k}{\partial g},$$

en donde si f y g corresponden a dos miembros del set $(q, p) \Rightarrow$

$$\{q_j, q_k\}_{q,p} = 0, \quad \{p_j, p_k\}_{q,p} = 0, \quad \{q_j, p_k\}_{q,p} = \delta_{jk}.$$

IMP: Muchas de las propiedades de los corchetes de Poisson se cumplen también en los corchetes de Lagrange, excepto la **identidad de Jacobi**.[10]

[10] $[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0$

Contenido: Tema 08

En el formalismo Hamiltoniano el estado del movimiento de un sistema mecánico con n grados de libertad está caracterizado por:

- n coordenadas generalizadas $q_1, q_2, \ldots, q_n$
- n momentos conjugados $p_1, p_2, \ldots, p_n$,

en donde las $2n$ coordenadas y momentos son **independientes** y representan las **coordenadas canónicas** del sistema.

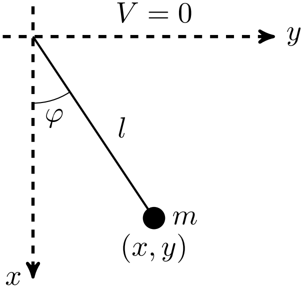
Las coordenadas y momentos forman espacios particulares,

- (q_i, p_i): espacio $2n$-dimensional cartesiano llamado **espacio fase**.
- q_i: subespacio n-dimensional llamado **espacio de configuración**.
- p_i: subespacio n-dimensional llamado **espacio de momentos**.

Para el caso del **espacio fase**, el curso del movimiento de un punto (q_i, p_i) es conocido como la **trayectoria de fase** dada por la representación paramétrica $q_k(t), p_k(t)$.

Espacio fase del péndulo planar

Consideremos al péndulo planar



Si tomamos a φ como la coordenada generalizada,

$$\Rightarrow \quad L = ml^2\dot{\varphi}^2/2 + mgl\mathrm{Cos}\,\varphi,$$

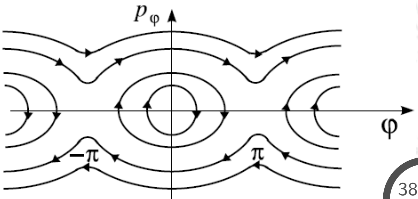
$$\therefore \quad p_\varphi = \partial L/\partial\dot{\varphi} = ml^2\dot{\varphi}.$$

Construyendo el Hamiltoniano,

$$\begin{aligned} H &= T + V, \\ &= ml^2\dot{\varphi}^2/2 - mgl\mathrm{Cos}\,\varphi, \\ &= p_\varphi^2/2ml^2 - mgl\mathrm{Cos}\,\varphi = E. \end{aligned}$$

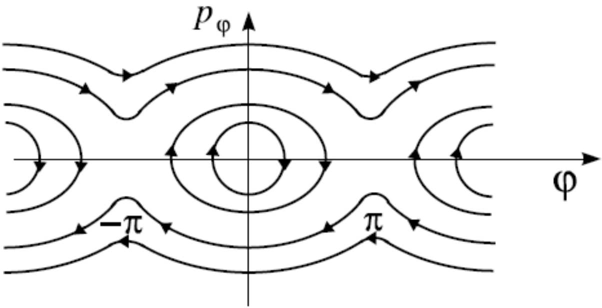
Por tanto, la **trayectoria de fase** $p_\varphi = p_\varphi(\varphi)$ es:

$$p_\varphi = \pm\sqrt{2ml^2(E + mgl\mathrm{Cos}\,\varphi)},$$



Teoremas de Liouville y Noether

Espacio fase del péndulo planar



Al ser E un parámetro en la **trayectoria de fase** tendremos dos casos:

$$p_\varphi = \pm\sqrt{2ml^2(E + mgl\mathrm{Cos}\,\varphi)},$$

- $E < mgl$: las trayectorias son curvas **cerradas** (tipo elipse) $\Rightarrow$ el péndulo oscila $\therefore$ el movimiento es de **vibración**.
- $E > mgl$: las trayectorias son curvas **abiertas** $\Rightarrow$ el péndulo continúa su movimiento $\therefore$ el movimiento es de **rotación**.

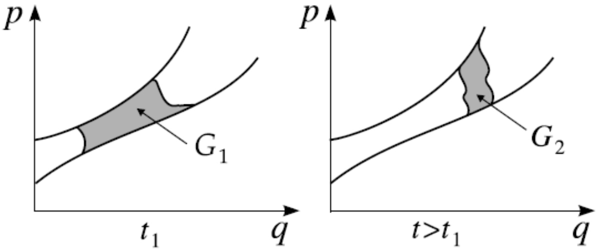
Teoremas de Liouville y Noether

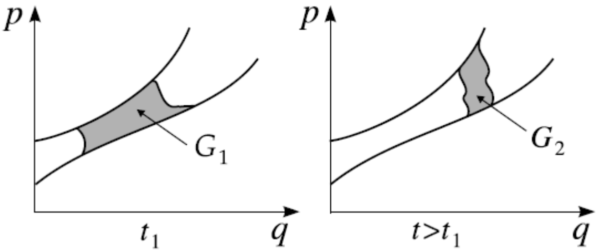
Teorema de Liouville

Consideremos un gran número N de puntos independientes, idénticos entre sí, $\Rightarrow$ son descritos por el mismo H, $\therefore$ si todos los puntos a un tiempo t_1 son distribuidos en una región G_1 del espacio fase $2n$-dimensional con volumen:

$$\Delta V = \Delta q_1 \Delta q_2 \ldots \Delta q_n \cdot \Delta p_1 \Delta p_2 \ldots \Delta p_n,$$

entonces podemos definir la densidad como $\rho = \Delta N / \Delta V$ y donde con el curso del movimiento $G_1 \to G_2$ de acuerdo a las ecs. de Hamilton,





Teorema de Liouville

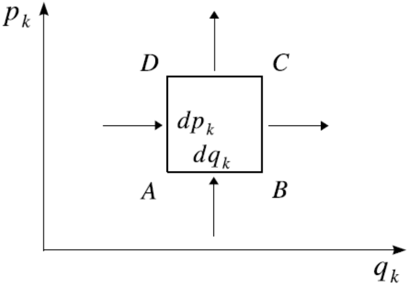
- El volumen de una región arbitraria del espacio fase se **conserva** si los puntos de la frontera se mueven de acuerdo a las **ecuaciones canónicas**.
- La densidad de puntos en el espacio fase en la vecindad de un punto que se mueve con el fluido es **constante**.

Teoremas de Liouville y Noether

Teorema de Liouville

El segundo enunciado del **teorema de Liouville** establece una ecuación de **continuidad**,

$$
\begin{aligned}
0 &= \nabla(\rho\dot{\mathbf{r}}) + \frac{\partial\rho}{\partial t}, \\
&= \frac{\partial}{\partial q_k}(\rho\dot{q}_k) + \frac{\partial}{\partial p_k}(\rho\dot{p}_k) + \frac{\partial\rho}{\partial t}, \\
&= \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial q_k}\dot{q}_k + \rho\frac{\partial\dot{q}_k}{\partial q_k} + \dots \\
&\dots + \frac{\partial\rho}{\partial p_k}\dot{p}_k + \rho\frac{\partial\dot{p}_k}{\partial p_k}.
\end{aligned}
$$



Por otro lado, de las ecuaciones de Hamilton tenemos:

$$
\frac{\partial\dot{q}_k}{\partial q_k} = \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial q_k} \quad \& \quad \frac{\partial\dot{p}_k}{\partial p_k} = -\frac{\partial^2 H}{\partial q_k \partial p_k},
$$

$$
\Rightarrow \quad 0 = \frac{\partial\dot{q}_k}{\partial q_k} + \frac{\partial\dot{p}_k}{\partial p_k}.
$$

Sustituyendo en la ecuación de continuidad, tenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial q_k}\dot{q}_k + \rho\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_k} + \frac{\partial \rho}{\partial p_k}\dot{p}_k + \rho\frac{\partial \dot{p}_k}{\partial p_k} &= 0, \\
\Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \rho}{\partial p_k}\dot{p}_k &= 0, \\
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial \rho}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k} &= 0, \\
\frac{\partial \rho}{\partial t} + [\rho, H] &= 0, \\
\frac{d\rho}{dt} &= 0,
\end{aligned}
$$

por tanto,

$$\rho = \text{cte.}$$

lo que demuestra el **teorema de Liouville**.

La conexión entre **invariancia** y **conservación** en sistemas coordenados puede ocurrir en casos en donde **no** existan coordenadas cíclicas o ignorables.

Teorema de Noether

Si el Lagrangiano es **invariante** ante una familia de transformaciones, entonces su sistema dinámico posee una **constante de movimiento**, la cual puede ser hallada conociendo el Lagrangiano y la transformación.

Las transformaciones que se mencionan son del tipo **puntuales**,

$$\psi_\alpha = \psi_\alpha(q_\alpha, \epsilon) \;\; \forall \quad \psi_\alpha\big|_{\epsilon=0} \equiv q_\alpha,$$

en donde ϵ representa a la familia de transformaciones.

Para demostrar el teorema, asumimos que L es **invariante** ante la familia ϵ de transformaciones,

$$L_\epsilon(q, \dot{q}, t) = L\left(\psi(q, \epsilon), \dot{\psi}(q, \epsilon), t\right).$$

Calculando la derivada respecto ϵ,

$$\frac{\partial L_\epsilon}{\partial \epsilon} = \frac{\partial L}{\partial \psi_\alpha}\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial \epsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_\alpha}\frac{\partial \dot{\psi}_\alpha}{\partial \epsilon},$$

y evaluando cuando $\epsilon \to 0$:

$$\left.\frac{\partial L_\epsilon}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \left[\frac{\partial L}{\partial \psi_\alpha}\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial \epsilon}\right]_{\epsilon=0} + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_\alpha}\frac{\partial \dot{\psi}_\alpha}{\partial \epsilon}\right]_{\epsilon=0},$$

$$\therefore \quad \delta L = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\delta \dot{q}_\alpha,$$

donde: $\quad \psi_\alpha|_{\epsilon=0} = q_\alpha, \quad \left.\dot{\psi}_\alpha\right|_{\epsilon=0} = \dot{q}_\alpha, \quad \delta q_\alpha = \left.\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0}, \quad \delta \dot{q}_\alpha = \left.\frac{\partial \dot{\psi}_\alpha}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0},$

ahora, recordando,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\delta q_\alpha\right) = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)\delta q_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\delta \dot{q}_\alpha,$$

Sustituyendo en δL,

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\delta \dot{q}_\alpha,$$

$$\delta L = \left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)\delta q_\alpha + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\delta q_\alpha\right),$$

$$\delta L = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\delta q_\alpha\right).$$

en donde el primer término se anula ya que se trata de las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Invocando ahora la **invariancia** de L, se tiene:

$$\delta L = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\delta q_\alpha\right) = 0 \quad \therefore \quad \Gamma \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\delta q_\alpha.$$

Lo anterior representa una **constante de movimiento**, demostrando el **teorema de Noether**: *a cada simetría de q descubierta en L corresponde una constante de movimiento*.

El teorema de Noether se puede generalizar, en el sentido de que L no tiene por que ser estrictameente invariante ante una transformación, si no que puede cambiar como:

$$L_\epsilon = L + \dot{\Phi}(q, t, \epsilon).$$

Ahora, como sabemos que una **transformación de norma**,

$$L \to L + \frac{d}{dt}\Phi(q, t),$$

deja las ecuaciones de movimiento y de Lagrange **invariantes**, el teorema de Noether especifica que tal transformación dará una **constante de movimiento**.

En ese caso:

$$\delta L = \frac{d}{dt}\delta\Phi.$$

Teoremas de Liouville y Noether

Teorema de Noether: generalización

Combinando el resultado anterior con la variación del Lagrangiano,

$$\begin{aligned}
\delta L &= \left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)\delta q_\alpha + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\delta q_\alpha\right), \\
\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\delta\Phi &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\delta q_\alpha\right), \\
\therefore \quad 0 &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\delta q_\alpha - \delta\Phi\right),
\end{aligned}$$

por tanto, se llega a que la expresión:

$$\Gamma = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\delta q_\alpha - \delta\Phi$$

es una **constante de movimiento**.

Debido a lo anterior, el **teorema de Noether** establece que *una cte. de movimiento se asocia con toda invariancia de norma del Lagrangiano bajo una familia de transformaciones dada*.