Contenido: Tema 09

Contenido: Tema 09

Recordemos que el objetivo de una **transformación canónica** es simplificar el problema de tal manera que encontremos coordenadas **cíclicas** en el sistema de coordenadas transformado.

Ahora, si fuera posible encontrar una transformación tal que:

$$(q, p) \text{ en } t \quad \rightarrow \quad (q_0, p_0) \text{ en } t = 0, \quad \forall \;\; q_0, p_0 = \text{ctes.}$$

$$\Rightarrow \quad q = q(q_0, p_0, t) \;\; \& \;\; p = p(q_0, p_0, t),$$

por tanto, la misma transformación representa la solución del problema.

El nuevo set (Q, P) que cumple con lo anterior, cumple de igual manera con las ecuaciones de Hamilton para el nuevo Hamiltoniano $K(Q, P, t)$:

$$\frac{\partial K}{\partial P_i} = \dot{Q}_i = 0, \quad -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = \dot{P}_i = 0.$$

lo cual da como solución $K = \text{cte}$, exigiendo que sea $K = 0$.

Función Principal de Hamilton

Ecuación de Hamilton-Jacobi

Recordando la relación entre Hamiltonianos en una transf. canónica,

$$K = H + \frac{\partial F}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad H(q,p,t) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0.$$

Por tanto, se debe encontrar la **función generatriz** de esta transformación, la cual es del tipo $F_2(q,P,t)$,[1] en donde se debe cumplir:

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i},$$

reescribiendo la ecuación de transformación para F_2,

$$H\left(q_1, q_2, \ldots, q_n; \frac{\partial F_2}{\partial q_1}, \frac{\partial F_2}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial F_2}{\partial q_n}; t\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0,$$

lo cual se conoce como la **ecuación de Hamilton-Jacobi** y representa una ec. diferencial parcial en F_2 de $(n+1)$ variables $q_1, q_2, \ldots, q_n; t$.

[1] de entre las cuatro posibles, Jacobi seleccionó F_2 para su desarrollo.

Función Principal de Hamilton

Definición de la función principal de Hamilton

A la función F_2 de la ecuación anterior se le conoce como **función principal de Hamilton**,

$$F_2 \equiv S = S(q_1, q_2, \ldots, q_n; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}; t).$$

Al aparecer S como derivada en la ecuación de Hamilton-Jacobi, se tiene que si $S = S'$ es una solución entonces $S = S' + S_0 \ \forall \ S_0 =$ cte. también lo es,

$$\therefore \quad S(q_1, q_2, \ldots, q_n; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n; t).$$

Ahora, de la def. de $F_2 = F_2(q, P, t)$ y las derivativas relacionadas:

$$P_i = \alpha_i, \quad p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial \alpha_i} = \beta_i,$$

invirtiendo las ecuaciones de p_i y q_i:

$$q_i = q_i(\alpha, \beta, t), \quad p_i = p_i(\alpha, \beta, t),$$

obteniendo la sol. completa de las ecs. de movimiento de Hamilton.

Función Principal de Hamilton

Interpretación física de la función principal de Hamilton

Calculando la derivada total de $S(q, \alpha, t)$,

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t},$$

pero recordando,

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \;\;\&\;\; H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0,$$

por lo que relacionando ecuaciones,

$$\frac{dS}{dt} = p_i\dot{q}_i - H = L,$$

por tanto,

$$S = \int L dt + \text{cte}.$$

S es la **acción** evaluada a lo largo de una trayectoria dinámica.

Función principal de Hamilton

Ejemplo: oscilador armónico

El Hamiltoniano para un oscilador armónico es,

$$H = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right) \;\; \forall \;\; \omega^2 = \frac{k}{m},$$

en donde la **función principal de Hamilton** viene expresada como:

$$S = S(q, P, t) \;\; \forall \;\; p = \frac{\partial S}{\partial q}.$$

Construyendo de lo anterior la **ecuación de Hamilton-Jacobi**,

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{m\omega^2}{2}q^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

Ahora, proponiendo una solución para S, mediante separación de variables entre q y t:

$$S = S_1(t) + S_2(q).$$

Función principal de Hamilton

Ejemplo: oscilador armónico (cnt.)

Por tanto, sustituyendo en la ec. de Hamilton-Jacobi se tiene:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{m\omega^2}{2}q^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_2(q)}{\partial q}\right)^2 + \frac{m\omega^2}{2}q^2 + \dot{S}_1(t) = 0.$$

De lo anterior se llega a:

$$-\dot{S}_1(t) = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_2(q)}{\partial q}\right)^2 + \frac{m\omega 2}{2}q^2 = \alpha, \quad \forall \ \alpha = \text{cte. de separación.}$$

Resolviendo para $S_1(t)$,

$$\dot{S}_1(t) = -\alpha \quad \rightarrow \quad S_1(t) = -\alpha t.$$

Función principal de Hamilton

Ejemplo: oscilador armónico (cnt.)

Resolviendo para $S_2(q)$,

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_2(q)}{\partial q}\right)^2 + \frac{m\omega^2}{2}q^2 = \alpha \quad \rightarrow \quad \frac{\partial S_2}{\partial q} = \sqrt{2m\alpha - m^2\omega^2 q^2},$$

por tanto, S viene dada como:

$$S(q,\alpha,t) = \int dq\sqrt{2m\alpha - m^2\omega^2q^2} - \alpha t.$$

Recordando de la transformación canónica debido a $S(q,\alpha,t)$:

$$P_i = \alpha_i, \quad p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i,$$

entonces, para Q se obtiene:

$$\beta = Q = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \sqrt{m}\int dq\left(2\alpha - m\omega^2q^2\right)^{-1/2} - t.$$

Función principal de Hamilton

Ejemplo: oscilador armónico (cnt.)

Integrando la ec. anterior,

$$\beta + t = \sqrt{\frac{m}{2\alpha}} \int dq \left(1 - \frac{m\omega^2}{2\alpha} q^2\right)^{-1/2},$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\omega}} \mathrm{ArcSen}\left(\sqrt{\frac{m\omega 2}{2\alpha}} q\right),$$

$$\Rightarrow \quad q(t) = \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2}} \mathrm{Sen}\,\omega(\beta + t) \quad \forall \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Para obtener el **momento conjugado**:

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial S_2(q)}{\partial q} = \sqrt{2m\alpha - m^2\omega^2 q^2},$$

$$p(t) = \sqrt{2m\alpha} \mathrm{Cos}\,\omega(\beta + t).$$

Función principal de Hamilton

Ejemplo: oscilador armónico (cnt.)

Finalmente, hallando el significado de las constantes α y β, se usan las ecuaciones para $q(t)$ y $p(t)$,

$$
\begin{aligned}
q(t) &= \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2}}\,\text{Sen}\,\omega(\beta+t) \quad \Rightarrow \quad q^2(t) = \frac{2\alpha}{m\omega^2}\text{Sen}^2\,\omega(\beta+t),\\
p(t) &= \sqrt{2m\alpha}\,\text{Cos}\,\omega(\beta+t) \quad \Rightarrow \quad p^2(t) = (2m\alpha)\text{Cos}^2\,\omega(\beta+t),
\end{aligned}
$$

y relacionando los resultados anteriores:

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & \frac{m\omega^2}{2\alpha}q^2 + \frac{p^2}{2m\alpha} = 1,\\
\therefore \quad & \frac{1}{2m}\left(m^2\omega^2q^2 + p^2\right) = \alpha = E,
\end{aligned}
$$

por tanto, α es la **energía** conservada del sistema E.

Para β reconocemos de la ec. $q(t)$ que representa al **tiempo inicial** t_0,

$$-\beta = t_0,$$

$\Rightarrow$ la energía y el tiempo son **variables canónicas conjugadas**.

Contenido: Tema 09

Función característica de Hamilton

Hamiltonianos independientes del tiempo

Cuando el Hamiltoniano no depende del **tiempo**, la función principal de Hamilton se puede expresar inmediatamente como:

$$S(q, \alpha, t) = W(q, \alpha) - \alpha_1 t$$

en donde $W(q, \alpha)$ representa la **función característica de Hamilton**.

Con lo cual la ec. de Hamilton-Jacobi queda como sigue:

$$H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}; t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0,$$

$$\therefore \quad H\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right) = \alpha_1,$$

en donde H tendrá un valor **constante** igual a α_1.

Recordando la transf. del Hamiltoniano con función generatriz $W(q, \alpha)$,

$$K = H + \frac{\partial W}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad K = H = \alpha_1,$$

indicando que $W(q, \alpha)$ arroja una transformación canónica en la cual todas las coordenadas serán **cíclicas**.

Función característica de Hamilton

Hamiltonianos independientes del tiempo

Respecto a la función **característica**, tendremos ahora las siguientes relaciones,

$$P_i = \alpha_i, \;\; p_i = \frac{\partial S(q,\alpha,t)}{\partial q_i} \to \frac{\partial W(q,\alpha)}{\partial q_i}, \;\; Q_i = \frac{\partial S(q,\alpha,t)}{\partial \alpha_i} \to \frac{\partial W(q,\alpha)}{\partial \alpha_i}.$$

Ahora, por otro lado, para conocer el significado físico de $W(q,\alpha)$, calculemos su derivada total,

$$\frac{dW(q,\alpha)}{dt} = \frac{\partial W}{\partial q_i}\dot{q}_i,$$

$$\frac{dW(q,\alpha)}{dt} = p_i \dot{q}_i,$$

integrando la ecuación anterior,

$$W = \int p_i \dot{q}_i dt \quad \Rightarrow \quad W = \int p_i dq_i,$$

lo cual representa la **acción abreviada** del principio de mínima acción de Hamilton.

Contenido: Tema 09

Separación de variables en la ecuación de Hamilton-Jacobi

Fundamentos

Se dice que la coordenada q_j es **separable** en la ec. de Hamilton-Jacobi cuando la función principal de Hamilton se puede separar en dos partes aditivas, una **dependiente** de q_j y la otra **independiente** de ella.

Si q_1 es una coordenada **separable**, entonces:

$$S(q_1, q_2, \ldots, q_n; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n; t) = S_1(q_1; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n; t) + \ldots$$
$$\ldots + S'(q_2, \ldots, q_n; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n; t),$$

siendo que la ec. de Hamilton-Jacobi también se puede separar en dos ecuaciones, una para S_1 y otra para S'.

Cuando en la ec. de Hamilton-Jacobi todas las coordenadas son separables, se habla de un sistema **completamente separable**, entonces:

$$S = \sum_i S_i(q_i, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n; t),$$

$$\therefore \; H_i\left(q_i; \frac{\partial S_i}{\partial q_i}; t\right) + \frac{\partial S_i}{\partial t} = 0 \;\; \forall \;\; H = \sum_i H_i.$$

Para el caso de que $H \neq H(t)$, entonces para cada S_i se tiene:

$$S_i(q_i; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n; t) = W_i(q_i; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) - \alpha_i t,$$

entonces el Hamiltoniano queda expresado como,

$$H_i\left(q_i; \frac{\partial W_i}{\partial q_i}\right) = \alpha_i \quad \forall \quad \sum_i \alpha_i = \gamma \quad \& \quad \sum_i H_i = H,$$

en donde α_i se les conoce como las **constantes de separación**.

Considerando el caso cuando una coord. es **cíclica** en el sistema, por ejemplo $q_1 \Rightarrow p_1 = \epsilon =$ cte, por tanto la ec. de Hamilton-Jacobi es:

$$H\left(q_2, \ldots, q_n; \epsilon, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial q_n}\right) = \alpha_1,$$

con lo cual, aplicando la separación de variables para q_1, se tiene:

$$W = W_1(q_1, \alpha) + W'(q_2, \ldots, q_n; \alpha),$$

de donde se observa que la ecuación de Hamilton-Jacobi anterior involucrará solamente a W'.

Separación de variables en la ecuación de Hamilton-Jacobi

Fundamentos

Por tanto, la solución para W_1 vendrá dada como,

$$p_1 = \epsilon = \frac{\partial W_1}{\partial q_1},$$

indicando que ϵ es una **constante de separación**, y cuya solución para W_1 viene dada como:

$$W_1 = \epsilon q_1 \quad \Rightarrow \quad W = W' + \epsilon q_1.$$

Generalizando, si tenemos s coordenadas **no-cíclicas** de las n totales, entonces el Hamiltoniano será $H(q_1, \ldots, q_s; p_1, \ldots, p_s, \alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_n)$ con:

$$W\left(q_1, \ldots, q_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_n\right) = \sum_{i=1}^{s} W_i(q_i; \alpha_1, \ldots, \alpha_n) + \sum_{i=1+s}^{n} q_i \alpha_i,$$

quedando s ecuaciones de Hamilton-Jacobi por ser resueltas:

$$H_i\left(q_i, \frac{\partial W_i}{\partial q_i}\right) = \alpha_i \ \ \forall \ \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \gamma.$$

Contenido: Tema 09

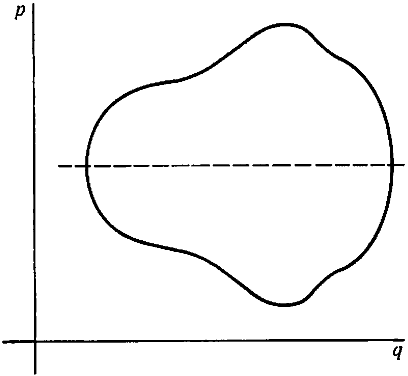
Variables angulares y de acción

Sistemas de un grado de libertad

Consideremos sistemas que sean:

- **Independientes del tiempo**: $H(q,p) = \alpha_1 = \text{cte.} \Rightarrow p = p(q, \alpha_1)$.
- **Periódicos**: libración y rotación.

Libración

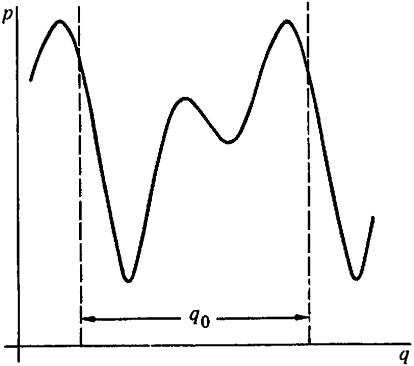


- Órbita **cerrada** en el espacio fase.
- p, q son funciones **periódicas** con la misma frecuencia.
- La **posición inicial** q_0 se encuentra entre dos **ceros** de la energía cinética.
- Ejemplo: oscilador armónico unidimensional.

Variables angulares y de acción

Sistemas de un grado de libertad

Rotación



- Órbita **abierta** en el espacio fase.
- p es una función **periódica** de q con cierto **periódo** q_0.
- q **no** está **acotado** y se puede incrementar indefinidamente en el tiempo.
- Ejemplo: un cuerpo rígido rotando alrededor de un eje con q como el ángulo de rotación,

$$\Rightarrow \quad q \rightarrow q + 2\pi,$$

lo cual no producirá cambios en el sistema, aunque q se incremente indefinidamente.

Para un sistema en cualquier movimiento periódico, introducimos una nueva cantidad conocida como **variable de acción**,

$$J = \oint p dq,$$

en donde se integra sobre el **periodo completo** del movimiento.[2]

Ahora, como $p = p(q, \alpha_1)$, entonces:

$$J = J(\alpha_1) \quad \Rightarrow \quad H = H(J) \;\; \forall \;\; H \equiv \alpha_1.^3$$

Definiendo en este caso la función principal, en el esquema de Hamilton-Jacobi:

$$S(q, \alpha_1, t) = W - \alpha_1 t \;\; \forall \;\; W = W(q, J).$$

[2]ya sea de libración o rotación.

[3]independiente del tiempo: $H \neq H(t)$.

Obteniendo ahora la coordenada generalizada conjugada de J mediante las ecuaciones de transformación:[4]

$$w = \frac{\partial W}{\partial J} \neq \text{cte.},$$

a la cual le podemos aplicar las ecuaciones canónicas de Hamilton en este sistema (w, J):

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \frac{\partial H(J)}{\partial J} = \nu(J) \quad \forall \quad \nu(J) = \text{cte.} \\ \Rightarrow \quad w &= \nu t + \beta, \end{aligned}$$

por tanto, w es una función lineal en el tiempo.

Para conocer el significado físico de w, consideremos el cambio que experimenta en un ciclo completo, ya sea de libración o rotación:

$$\Delta w = \oint \frac{\partial w}{\partial q} dq.$$

[4] $Q_i = \partial S / \partial \alpha_i$.

Variables angulares y de acción

Sistemas de un grado de libertad

Considerando la expresión anterior y la def. de w en términos de la función característica W:

$$\Delta w = \oint \frac{\partial w}{\partial q} dq = \oint \frac{\partial^2 W}{\partial q \partial J} dq \quad \forall \quad w = \frac{\partial W}{\partial J},$$

debido a que J es independiente de q entonces puede salir de la integral,

$$\Delta w = \frac{d}{dJ} \oint \frac{\partial W}{\partial q} dq = \frac{d}{dJ} \oint p dq \,{}^{5} = 1.$$

Ahora, por otro lado:

$$w = \nu t + \beta \quad \Rightarrow \quad \Delta w = \nu \Delta t \quad \forall \quad \Delta t = \tau = \text{período}.$$

Relacionando los resultados anteriores,

$$1 = \nu \tau \quad \Rightarrow \quad \nu = 1/\tau,$$

por tanto, ν es la **frecuencia** asociada con el movimiento periódico de p y/o q, con lo que w representa entonces una **variable de ángulo**.

[5] $p_i = \partial S / \partial q_i$

Variables angulares y de acción

Sistemas completamente separables

Para sistemas completamente **separables** y **conservativos** se tiene:

$$S(q;\alpha;t) = \sum_i W_i(q_i;\alpha_1,\ldots,\alpha_n) - \gamma t \;\; \forall \;\; \sum_i \alpha_i = \gamma,$$

siendo,

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial W_i(q_i;\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}{\partial q_i},$$

de donde se obtiene:

$$p_i = p_i(q_i;\alpha_1,\ldots,\alpha_n),$$

lo cual representa la **ecuación de la órbita** de la proyección del sistema puntual en el plano (q_i, p_i) del espacio fase.

Se podrán definir variables de **ángulo** y **acción** para el sistema cuando **todos** los pares conjugados (q_i, p_i) describen órbitas **cerradas** (libración) o **funciones periódicas** en q (rotación):

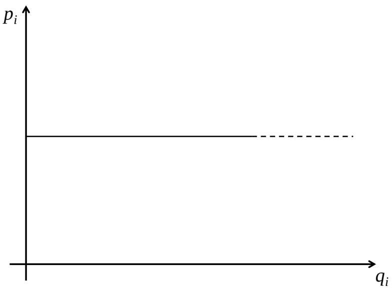
$$J_i = \oint p_i dq_i, \;\; \forall \;\; i = 1,\ldots,n.$$

Variables angulares y de acción

Sistemas completamente separables y coordenadas cíclicas

Adicionalmente, si se tiene el caso de que una coordenada q_i sea **cíclica**, entonces se tiene que $p_i = \text{cte}$, lo cual implica:

- La órbita en el plano (q_i, p_i) se reduce a una **recta horizontal**.
- Este caso representa el límite de periodicidad tipo **rotatorio**.
- Debido a que tiene un periodo indeterminado, se le puede asignar uno arbitrario a q_i: $\tau_i = 2\pi$.



Por tanto, calculando J_i para este par (q_i, p_i), se obtiene:

$$J_i = \oint p_i dq_i = 2\pi p_i,$$

teniendo idéntico comportamiento todas las variables **cíclicas**.

Variables angulares y de acción

Sistemas completamente separables y coordenadas cíclicas

Regresando a la expresión general para las variables de **acción** J_i,

$$J_i = \oint p_i dq_i = \oint \frac{\partial W_i(q_i; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{\partial q_i} dq_i,$$

de donde se puede obtener:

$$J_i = J_i(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \quad \Rightarrow \quad \alpha_i = \alpha_i(J_1, J_2, \ldots, J_n),$$

por tanto, la **función característica** puede expresarse en las nuevas **variables de acción**:

$$W = W(q_1, q_2, \ldots, q_n; J_1, J_2, \ldots, J_n) = \sum_j W_j(q_j; J_1, J_2, \ldots, J_n),$$

en donde el Hamiltoniano estará expresado también en términos de las J_i's,

$$H = \gamma = H(J_1, J_2, \ldots, J_n) \;\; \forall \;\; \gamma = \sum_i \alpha_i.$$

Tal como el caso de solo una variable, es posible asignarle a cada J_i su variable de **ángulo conjugada**,

$$w_i = \frac{\partial W}{\partial J_i} = \sum_j \frac{\partial W_j(q_j; J_1, \ldots, J_n)}{\partial J_i}, \;\; \forall \;\; w_i = w_i(q_1, \ldots, q_n; J_1, \ldots, J_n),$$

las cuales cumplen con las ecuaciones canónicas de Hamilton:

$$\dot{w}_i = \frac{\partial H(J_1, J_2, \ldots, J_n)}{\partial J_i} = \nu_i(J_1, J_2, \ldots, J_n),$$

y pueden ser integradas, debido a que las ν_i's son **constantes**,

$$w_i = \nu_i t + \beta_i.$$

Analizando ahora el cambio de w_i en un periodo de la coordenada q_k mientras las otras se mantienen fijas:

$$\Delta_k w_i = \oint \frac{\partial w_i}{\partial q_k} dq_k.$$

Variables angulares y de acción

Sistemas completamente separables

Desarrollando la expresión anterior:

$$\Delta_k w_i = \oint \frac{\partial w_i}{\partial q_k} dq_k = \oint \frac{\partial^2 W}{\partial q_k \partial J_i} dk \ \ \forall \ \ \omega_i = \frac{\partial W}{\partial J_i},$$

como J_i es **independiente** de q_k, entonces puede salir de la integral:

$$\Delta_k w_i = \frac{\partial}{\partial J_i} \oint \frac{\partial W}{\partial q_k} dq_k = \frac{\partial}{\partial J_i} \oint p_k dq_k = \frac{\partial J_k}{\partial J_i} = \delta_{ki}.$$

Ahora, por otro lado, recordando:

$$w_i = \nu_i t + \beta_i \quad \Rightarrow \quad \Delta_i w_i = \nu_i \tau_i \ \ \forall \ \ \tau_i = \Delta t.$$

Relacionando los resultados anteriores:

$$\nu_i = \frac{1}{\tau_i},$$

lo cual representa la **frecuencia** del movimiento correspondiente q_i.