Contenido: Tema 10

Contenido: Tema 10

Supongamos que tenemos el Hamiltoniano,

$$H(q,p,t,\epsilon) = H_0(q,p,t) + \epsilon H_1(q,p,t),$$

en donde:

- H_0: es el Hamiltoniano del sistema **no-perturbado**.
- H_1: es la **perturbación** al Hamiltoniano, siendo la diferencia $H - H_0$ muy pequeña, controlada por el parámetro ϵ.

Entonces, se puede considerar que existe una transformación canónica **dependiente de ϵ** tal que:

$$(q,p,t)_\epsilon \to (Q,P,t)_\epsilon, \quad \forall \quad H(q,p,t)_\epsilon \to K(Q,P,t)_\epsilon$$

en donde $K(Q,P,t)$ sea mas sencillo de resolver que $H(q,p,t)$.

En este enfoque se tendrá:

- $\epsilon = 0$: la transformación canónica es la **identidad**.
- $\epsilon \neq 0$: una transformación canónica que nos lleva a $K(Q,P,t)$.

Transformaciones canónicas y teoría de perturbaciones

Transformación canónica via $S(q, P, t)$

Consideremos una transformación canónica tipo $S(q, P, t; \epsilon)$ en donde ϵ es fijo y muy pequeño, entonces:

$$K(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial S(q, P, t)}{\partial t},$$ [1]

en donde $q = q(Q, P, t)$, $p = p(Q, P, t)$.

Ahora, expandiendo q, p, K, y S en **potencias** de ϵ:

$$\begin{aligned}
K &= K_0 + \epsilon K_1 + \epsilon^2 K_2 + \dots \\
p_i &= P_i + \epsilon p_{1,i} + \epsilon^2 p_{2,i} + \dots \\
q_i &= Q_i + \epsilon q_{1,i} + \epsilon^2 q_{2,i} + \dots \\
S &= q_i P_i + \epsilon S_1 + \epsilon^2 S_2 + \dots
\end{aligned}$$

en donde $S(q, P, t) = q_i P_i$ representa la función generatriz relativa a la transformación **identidad**.

[1] en donde se ha escrito $S(q, P, t; \epsilon) = S(q, P, t)$ por simplicidad.

Transformaciones canónicas y teoría de perturbaciones

Transformación canónica via $S(q, P, t)$

Pero de la transformación canónica se sabe:

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \quad \& \quad Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i},$$

entonces, sustituyendo S por su expansión en p_i,

$$\begin{aligned} p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} &= \frac{\partial}{\partial q_i}\left(q_i P_i + \epsilon S_1 + \epsilon^2 S_2 + \ldots\right), \\ &= P_i + \epsilon\frac{\partial S_1}{\partial q_i} + \epsilon^2\frac{\partial S_2}{\partial q_i} + \ldots, \end{aligned}$$

pero,

$$p_i = P_i + \epsilon p_{1,i} + \epsilon^2 p_{2,i} + \ldots,$$

comparando término a término las últimas dos ecuaciones se tiene:

$$p_{k,i} = \frac{\partial S_k}{\partial q_i}.$$

Transformaciones canónicas y teoría de perturbaciones

Transformación canónica via $S(q, P, t)$

Realizando el mismo análisis con Q_i,

$$
\begin{aligned}
Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i} &= \frac{\partial}{\partial P_i}\left(q_i P_i + \epsilon S_1 + \epsilon^2 S_2 + \ldots\right), \\
&= q_i + \epsilon \frac{\partial S_1}{\partial P_i} + \epsilon^2 \frac{\partial S_2}{\partial P_i} + \ldots,
\end{aligned}
$$

pero,

$$
q_i = Q_i + \epsilon q_{1,i} + \epsilon^2 q_{2,i} + \ldots,
$$

sustituyendo la ecuación anterior en Q_i:

$$
Q_i = Q_i + \epsilon\left(q_{1,i} + \frac{\partial S_1}{\partial P_i}\right) + \epsilon^2\left(q_{2,i} + \frac{\partial S_2}{\partial P_i}\right) + \ldots,
$$

para que la ecuación anterior se mantenga, se debe cumplir:

$$
q_{k,i} = -\frac{\partial S_k}{\partial P_i}.
$$

Expandiendo ahora al Hamiltoniano $H(q, p, t)$ a **primer orden**,

$$H(q, p, t) = H_0(q, p, t) + \epsilon H_1(q, p, t),$$

para ello se aplica Taylor en H_0 respecto (Q, P),[2]

$$H_0(p, q, t) = H_0(Q, P, t) + (q_i - Q_i) \left. \frac{\partial H_0}{\partial q_i} \right|_{\epsilon=0} + (p_i - P_i) \left. \frac{\partial H_0}{\partial p_i} \right|_{\epsilon=0},$$

donde, $q_i = Q_i + \epsilon q_{1,i}, \quad p_i = P_i + \epsilon p_{1,i},$

$$\Rightarrow \quad H_0(p, q, t) = H_0(Q, P, t) + \epsilon q_{1,i} \frac{\partial H_0}{\partial Q_i} + \epsilon p_{1,i} \frac{\partial H_0}{\partial P_i},$$

pero: $q_{k,i} = -\dfrac{\partial S_k}{\partial P_i} \;\; \& \;\; p_{k,i} = \dfrac{\partial S_k}{\partial q_i},$

$$\Rightarrow \quad H_0(p, q, t) = H_0(Q, P, t) + \epsilon \left[-\frac{\partial S_1}{\partial P_i} \frac{\partial H_0}{\partial Q_i} + \frac{\partial S_1}{\partial Q_i} \frac{\partial H_0}{\partial P_i} \right],$$

$$\therefore \quad H_0(p, q, t) = H_0(Q, P, t) + \epsilon \left[S_1, H_0 \right].$$

[2] $f(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0)\partial f/\partial x|_{x_0,y_0} + (y - y_0)\partial f/\partial y|_{x_0,y_0} + O(2)$

Para $H_1(q,p,t)$ se realiza un desarrollo similar,

$$H_1(q,p,t) = H_1(Q,P,t) + O(\epsilon), \quad \Rightarrow \quad \epsilon H_1(q,p,t) = \epsilon H_1(Q,P,t) + O(\epsilon^2).$$

Por tanto, sustituyendo en $H(q,p,t)$,

$$\begin{aligned} H(q,p,t) &= H_0(q,p,t) + \epsilon H_1(q,p,t), \\ \therefore \quad H(q,p,t) &= H_0(Q,P,t) + \epsilon \left(H_1(Q,P,t) + [S_1, H_0] \right). \end{aligned}$$

Ahora, recordando la transformación canónica para el Hamiltoniano,

$$K(Q,P,t) = H(q,p,t) + \frac{\partial S}{\partial t},$$

entonces se sustituye la expresión para $H(q,p,t)$,

$$\begin{aligned} K(Q,P,t) &= H_0(Q,P,t) + \epsilon \left(H_1(Q,P,t) + [S_1, H_0] \right) + \frac{\partial S}{\partial t}, \\ &= H_0(Q,P,t) + \epsilon \left(H_1(Q,P,t) + [S_1, H_0] + \frac{\partial S_1}{\partial t} \right), \end{aligned}$$

donde: $S = q_i P_i + \epsilon S_1 \quad \rightarrow \quad \partial S/\partial t = \epsilon \partial S_1/\partial t.$

Recordando finalmente la expresión de $K(Q,P,t)$ en potencias de ϵ,

$$K(Q,P,t) = K_0 + \epsilon K_1 + \epsilon^2 K_2 + \ldots,$$

y comparando con el resultado anterior,

$$K(Q,P,t) = H_0(Q,P,t) + \epsilon \left(H_1(Q,P,t) + [S_1, H_0] + \frac{\partial S_1}{\partial t} \right) + O(\epsilon^2),$$

se llega al siguiente resultado:

$$K_0(Q,P,t) = H_0(Q,P,t),$$
$$K_1(Q,P,t) = H_1 + [S_1, H_0] + \frac{\partial S_1}{\partial t},$$

La ecuación anterior muestra como se obtiene K_1 en función de S_1, sin embargo en problemas de dinámica **ambas** cantidades necesitan ser encontradas de manera simultánea.

Contenido: Tema 10

Teoría de perturbaciones para sistemas unidimensionales

Transformación canónica a variables de ángulo y acción

Consideremos que el Hamiltoniano es una cantidad **conservada** $\Rightarrow$ $H(q,p,t) = H(q,p)$, en donde el H perturbado viene dado como:

$$H(q,p) = H_0(q,p) + \epsilon H_1(q,p).$$

Asumiendo además que se tratan sistemas de naturaleza **periódica**, entonces un set adecuado de variables canónicas para describir a H son las **variables angulares y de acción**:

$$(q,p) \to (w,J) \;\; \forall \;\; H(q,p) \equiv K(J) = E(J).$$

Para hallar tal transformación canónica, primero se procede a obtener:

$$(q,p) \to (w_0, J_0) \; \forall \; K_0(w_0,J_0) = H_0\left[q(w_0,J_0), p(w_0,J_0)\right] = K_0(J_0),$$

definiendo:

$$K_1(w_0,J_0) = H_1\left[q(w_0,J_0), p(w_0,J_0)\right],$$
$$\forall \;\; K(w_0,J_0) = K_0(J_0) + \epsilon K_1(w_0,J_0),$$

siendo (w_0, J_0) las variables angulares y de acción de H_0.

Teoría de perturbaciones para sistemas unidimensionales

Transformación canónica a variables de ángulo y acción

Del resultado anterior:

$$K(w_0, J_0) = K_0(J_0) + \epsilon K_1(w_0, J_0),$$

es imporante enfatizar que $K(w_0, J_0)$, $K_0(J_0)$, y $K_1(w_0, J_0)$ son cantidades **conocidas**:

- $H(p, q)$ es conocido del propio problema a tratar.
- La transformación canónica $(q, p) \to (w_0, J_0)$ se obtiene al aplicar el procedimiento de VAA al sistema de H_0.

Ahora, recordando que K es integrable y con movimiento periódico, y por tanto que posee un set de variables (w, J) propias $\Rightarrow$ existe una transformación canónica tal que:

$$(w_0, J_0) \to (w, J) \quad \forall \quad K\left[w_0(w, J), J_0(w, J)\right] \equiv K(J) = E(J),$$

encontrando tal transformación canónica, y relacionándola con la transf. $(q, p) \to (w_0, J_0)$ el problema puede ser resuelto, es decir, es posible obtener $E(J)$.

Para resolver $(w_0, J_0) \to (w, J)$, se aplica la siguiente transf.:[3]

$$S(w_0, J) = w_0 J + \epsilon S_1(w_0, J) + \epsilon^2 S_2(w_0, J) + \ldots,$$

en donde $w_0 J$ es la transformación **identidad**.

De la transformación canónica se conocen las siguientes relaciones:

$$J_0 = \frac{\partial S}{\partial w_0}, \quad w = \frac{\partial S}{\partial J},$$

en las cuales se sustituye S expresada como una expansión:

$$\begin{aligned} J_0 &= \frac{\partial S}{\partial w_0} = J + \epsilon \frac{\partial S_1}{\partial w_0} + \epsilon^2 \frac{\partial S_2}{\partial w_0} + \ldots, \\ w &= \frac{\partial S}{\partial J} = w_0 + \epsilon \frac{\partial S_1}{\partial J} + \epsilon^2 \frac{\partial S_2}{\partial J} + \ldots, \end{aligned}$$

[3] del tipo 2: $F_2 = S(q, P)$.

De igual manera se expande $E(J)$ en potencias de ϵ,

$$\begin{aligned} E(J) &= E_0(J) + \epsilon E_1(J) + \epsilon^2 E_2(J) + \ldots, \\ &= K(w_0, J_0) \equiv K_0(J_0) + \epsilon K_1(w_0, J_0). \end{aligned}$$

Para describir cada término de $E(J)$, también se expande en potencias de $(J_0 - J)$ a $K(w_0, J_0)$:

$$\begin{aligned} K(w_0, J_0) &= K_0(J_0) + \epsilon K_1(w_0, J_0), \\ &= K_0(J) + (J_0 - J) \left. \frac{\partial K_0}{\partial J_0} \right|_J + \frac{1}{2}(J_0 - J)^2 \left. \frac{\partial^2 K_0}{\partial J_0^2} \right|_J + \ldots \\ &\ldots + \epsilon K_1(w_0, J) + \epsilon (J_0 - J) \left. \frac{\partial K_1}{\partial J_0} \right|_J + \ldots \end{aligned}$$

en donde:

$$J_0 - J = \epsilon \frac{\partial S_1}{\partial w_0} + \epsilon^2 \frac{\partial S_2}{\partial w_0} + \ldots \quad \& \quad (J_0 - J)^2 = \epsilon^2 \left(\frac{\partial S_1}{\partial w_0} \right)^2 + \ldots$$

Teoría de perturbaciones para sistemas unidimensionales

Transformación canónica a variables de ángulo y acción

Sustituyendo las expresiones de $(J_0 - J)$,

$$
\begin{aligned}
K(w_0, J_0) = K_0(J) &+ \left(\epsilon \frac{\partial S_1}{\partial w_0} + \epsilon^2 \frac{\partial S_2}{\partial w_0} + \dots\right) \frac{\partial K_0}{\partial J} + \dots \\
&\dots + \frac{1}{2}\left[\epsilon^2 \left(\frac{\partial S_1}{\partial w_0}\right)^2 + \dots\right] \frac{\partial^2 K_0}{\partial J^2} + \dots \\
&\dots + \epsilon K_1(w_0, J) + \epsilon \left(\epsilon \frac{\partial S_1}{\partial w_0} + \epsilon^2 \frac{\partial S_2}{\partial w_0} + \dots\right) \frac{\partial K_1}{\partial J} + \dots
\end{aligned}
$$

agrupando en potencias de ϵ,

$$
\begin{aligned}
K(w_0, J_0) = K_0(J) &+ \epsilon \left[\frac{\partial S_1}{\partial w_0} \frac{\partial K_0}{\partial J} + K_1(w_0, J)\right] + \dots \\
&\dots + \epsilon^2 \left[\frac{\partial S_2}{\partial w_0} \frac{\partial K_0}{\partial J} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial w_0}\right)^2 \frac{\partial^2 K_0}{\partial J^2} + \frac{\partial S_1}{\partial w_0} \frac{\partial K_1}{\partial J}\right] + \dots
\end{aligned}
$$

Comparando el resultado anterior con la expansión de $E(J) = K(w_0, J_0)$,

$$E(J) = E_0(J) + \epsilon E_1(J) + \epsilon^2 E_2(J) + \ldots$$

$$K(w_0, J_0) = K_0(J) + \epsilon \left[\frac{\partial S_1}{\partial w_0}\frac{\partial K_0}{\partial J} + K_1(w_0, J) \right] + \ldots$$

$$\ldots + \epsilon^2 \left[\frac{\partial S_2}{\partial w_0}\frac{\partial K_0}{\partial J} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial w_0}\right)^2 \frac{\partial^2 K_0}{\partial J^2} + \frac{\partial S_1}{\partial w_0}\frac{\partial K_1}{\partial J} \right] + \ldots$$

e igualando término a término hasta **segundo grado** de ϵ, se obtiene:

$$E_0(J) = K_0(J),$$

$$E_1(J) = K_1(w_0, J) + \frac{\partial S_1}{\partial w_0}\frac{\partial K_0}{\partial J} = K_1(w_0, J) + [S_1, K_0],$$

$$E_2(J) = \frac{\partial S_2}{\partial w_0}\frac{\partial K_0}{\partial J} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial w_0}\right)^2 \frac{\partial^2 K_0}{\partial J^2} + \frac{\partial S_1}{\partial w_0}\frac{\partial K_1}{\partial J},$$

donde es necesario conocer simultaneamente $E_k(J)$ y $\partial S_k/\partial w_0$, debiendo determinar cuatro cantidades, de solo dos ecuaciones.

Teoría de perturbaciones para sistemas unidimensionales

Transformación canónica a variables de ángulo y acción

Para obtener las expresiones de $E_k(J)$ se evalúan los **promedios** en un **periodo del movimiento**, respecto a w_0:

$$\langle f(w_0)\rangle = \int_0^{2\pi} \frac{dw_0}{2\pi} f(w_0),$$

en donde el promedio es realizado a un J **fijo**, lo cual conlleva que cada una de las derivadas $\partial S_k/\partial w_0$ sean **periódicas** en w_0.

Debido a esta periodicidad en las derivadas de S_k, es que se puede concluir que S_k es igual **periódica**, por lo que es posible expresarlas (función y derivadas) en términos de series de Fourier,

$$S_k(w_0, J) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} S_k(J; m) e^{imw_0},$$

con lo cual, los promedios de $\partial S_k/\partial w_0$ se **anularán**:

$$\left\langle \frac{\partial S_k}{\partial w_0} \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial S_k}{\partial w_0} dw_0 = 0.$$

Teoría de perturbaciones para sistemas unidimensionales

Transformación canónica a variables de ángulo y acción

Calculando ahora el promedio de las expresiones para $E_k(J)$, comenzando con $E_1(J)$:

$$E_1(J) = K_1(w_0, J) + \frac{\partial S_1}{\partial w_0}\frac{\partial K_0}{\partial J},$$

$$\Rightarrow \quad E_1(J) = \langle K_1(w_0, J)\rangle + \left\langle \frac{\partial S_1}{\partial w_0}\right\rangle \frac{\partial K_0}{\partial J},^{4}$$

$$\therefore \quad E_1(J) = \langle K_1(w_0, J)\rangle\,,^{5}$$

despejando de $E_1(J)$ a $\partial S_1/\partial w_0$,

$$\frac{\partial S_1}{\partial w_0} = \frac{\langle K_1\rangle - K_1}{\nu_0(J)} \quad \forall \quad \nu_0(J) = \frac{\partial K_0}{\partial J},$$

La solución de la ec. anterior es $S_1(w_0, J) + \sigma(J)$, donde $\sigma(J)$ es una función arbitraria cuyo papel es añadir una fase a w, $\therefore$ $\sigma(J) = 0$.

[4] $\langle f(J)\rangle = f(J)$.
[5] $\langle \partial S_k/\partial w_0\rangle = 0$.

Aplicando ahora el promedio para $E_2(J)$,

$$E_2(J) = \frac{\partial S_2}{\partial w_0}\frac{\partial K_0}{\partial J} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial w_0}\right)^2 \frac{\partial^2 K_0}{\partial J^2} + \frac{\partial S_1}{\partial w_0}\frac{\partial K_1}{\partial J},$$

$$\Rightarrow \quad E_2(J) = \nu_0 \left\langle \frac{\partial S_2}{\partial w_0} \right\rangle + \frac{1}{2}\frac{\partial \nu_0}{\partial J}\left\langle \left(\frac{\partial S_1}{\partial w_0}\right)^2 \right\rangle + \left\langle \frac{\partial S_1}{\partial w_0}\frac{\partial K_1}{\partial J} \right\rangle,$$

pero se sabe que:

$$\left\langle \frac{\partial S_k}{\partial w_0} \right\rangle = 0 \;\; \& \;\; \frac{\partial S_1}{\partial w_0} = \frac{\langle K_1 \rangle - K_1}{\nu_0},$$

por tanto:

$$\left\langle \left(\frac{\partial S_1}{\partial w_0}\right)^2 \right\rangle = \frac{1}{\nu_0^2}\left\langle \langle K_1\rangle^2 - 2K_1\langle K_1\rangle + K_1^2 \right\rangle,$$

$$= \frac{1}{\nu_0^2}\left[\langle K_1\rangle^2 - 2\langle K_1\rangle^2 + \left\langle K_1^2 \right\rangle \right],$$

$$= \frac{1}{\nu_0^2}\left[\left\langle K_1^2 \right\rangle - \langle K_1\rangle^2 \right].$$

Teoría de perturbaciones para sistemas unidimensionales

Transformación canónica a variables de ángulo y acción

También:

$$\left\langle \frac{\partial S_1}{\partial w_0}\frac{\partial K_1}{\partial J}\right\rangle = \frac{1}{\nu_0}\left\langle \left(\langle K_1\rangle - K_1\right)\frac{\partial K_1}{\partial J}\right\rangle, \\ = \frac{1}{\nu_0}\left[\left\langle\frac{\partial K_1}{\partial J}\right\rangle\langle K_1\rangle - \left\langle\frac{\partial K_1}{\partial J}K_1\right\rangle\right],$$

sustituyendo ambos resultados en $E_2(J)$,

$$E_2(J) = \frac{1}{2\nu_0^2}\frac{\partial\nu_0}{\partial J}\left[\left\langle K_1^2\right\rangle - \langle K_1\rangle^2\right] + \frac{1}{\nu_0}\left[\left\langle\frac{\partial K_1}{\partial J}\right\rangle\langle K_1\rangle - \left\langle\frac{\partial K_1}{\partial J}K_1\right\rangle\right].$$

Entonces, de la expresión original de $E_2(J)$:

$$E_2(J) = \frac{\partial S_2}{\partial w_0}\frac{\partial K_0}{\partial J} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial w_0}\right)^2\frac{\partial^2 K_0}{\partial J^2} + \frac{\partial S_1}{\partial w_0}\frac{\partial K_1}{\partial J},$$

y con el resultado anterior, es posible despejar $\partial S_2/\partial w_0$.

Realizando el despeje e insertando la expresión para $E_2(J)$ se obtiene:

$$\frac{\partial S_2}{\partial w_0} = \frac{1}{\nu_0^2}\left\{\left\langle \frac{\partial K_1}{\partial J}\right\rangle \langle K_1\rangle - \left\langle \frac{\partial K_1}{\partial J} K_1\right\rangle - \frac{\partial K_1}{\partial J}\langle K_1\rangle + \frac{\partial K_1}{\partial J} K_1 + \dots \right.$$
$$\left. \dots + \frac{1}{2\nu_0}\frac{\partial \nu_0}{\partial J}\left[\left\langle K_1^2\right\rangle - 2\langle K_1\rangle^2 + 2K_1\langle K_1\rangle - K_1^2\right]\right\}.$$

Se observa, por tanto, que el requerimiento de que $E = E(J)$ nos lleva a ecuaciones diferenciales parciales para S_1 y S_2.

Con las expresiones para $E_k(J)$ obtenidas anteriormente se obtiene:

$$E(J) = E_0(J) + \epsilon E_1(J) + \epsilon^2 E_2(J) + \dots$$
$$E(J) = K_0(J) + \epsilon\langle K_1\rangle + \epsilon^2\frac{1}{\nu_0}\left\{\frac{1}{2\nu_0}\frac{\partial \nu_0}{\partial J}\left[\left\langle K_1^2\right\rangle - \langle K_1\rangle^2\right] + \dots\right.$$
$$\left.\dots + \left\langle \frac{\partial K_1}{\partial J}\right\rangle\langle K_1\rangle - \left\langle \frac{\partial K_1}{\partial J}K_1\right\rangle\right\},$$

en donde las **frecuencias** del sistema perturbado son $\nu = \partial E/\partial J$.

Contenido: Tema 10

Teoría de perturbaciones para sistemas de n-dimensiones

Generalización en n-dimensiones

Generalizando las consideraciones anteriores para n grados de libertad, en donde $w_0 \equiv \{w_0^1, w_0^2, \ldots, w_0^n\}$ y $J_0 \equiv \{J_0^1, J_0^2, \ldots, J_0^n\}$, se tiene:

$$J_0^\alpha = \frac{\partial S}{\partial w_0^\alpha} = J^\alpha + \epsilon \frac{\partial S_1}{\partial w_0^\alpha} + \epsilon^2 \frac{\partial S_2}{\partial w_0^\alpha} + \ldots$$

$$w^\alpha = \frac{\partial S}{\partial J^\alpha} = w_0^\alpha + \epsilon \frac{\partial S_1}{\partial J^\alpha} + \epsilon^2 \frac{\partial S_2}{\partial J^\alpha} + \ldots$$

Con lo cual, aplicando el mismo formalismo desarrollado anteriormente, se obtiene para la expansión de $E(J)$,

$$E_0(J) = K_0(J),$$

$$E_1(J) = K_1(w_0, J) + \sum_\alpha \nu_0^\alpha(J) \frac{\partial S_1}{\partial w_0^\alpha} \quad \forall \quad \nu_0^\alpha(J) = \frac{\partial K_0}{\partial J^\alpha},$$

$$E_2(J) = \sum_\alpha \left(\nu_0^\alpha \frac{\partial S_2}{\partial w_0^\alpha} + \frac{\partial S_1}{\partial w_0^\alpha} \frac{\partial K_1}{\partial J^\alpha} \right) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial \nu_0^\alpha}{\partial J^\beta} \frac{\partial S_1}{\partial w_0^\alpha} \frac{\partial S_1}{\partial w_0^\beta},$$

en donde J representa al set $\{J^1, J^2, \ldots, J^n\}$.

Para calcular los promedios en la expansión de $E(J)$ usamos,

$$\langle f(w_0, J)\rangle = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi} dw_0^1 \int_0^{2\pi} dw_0^2 \ldots \int_0^{2\pi} dw_0^n f(w_0, J).$$

Como en el caso unidimensional, $E_1(J) = \langle K_1\rangle$, con lo cual se tiene:

$$\sum_\alpha \nu_0^\alpha \frac{\partial S_1}{\partial w_0^\alpha} = \langle K_1\rangle - K_1.$$

Tal como se realizó anteriormente, el lado derecho de la ecuación anterior se puede expandir en series de Fourier:

$$\langle K_1\rangle - K_1 = \sum_{\mathbf{m}} \Theta_{\mathbf{m}}(J) e^{i\mathbf{m}\cdot\mathbf{w}_0} \;\; \forall \;\; \mathbf{m}\cdot\mathbf{w}_0 = \sum_\alpha m^\alpha w_0^\alpha,$$

en donde los coeficientes $\Theta_{\mathbf{m}}$ vienen dados por,

$$\Theta_{\mathbf{m}} = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi} dw_0^1 \int_0^{2\pi} dw_0^2 \ldots \int_0^{2\pi} dw_0^n \left[\langle K_1\rangle - K_1\right] e^{-i\mathbf{m}\cdot\mathbf{w}_0}.$$

De igual manera expandiendo S_1,

$$S_1 = \sum_{\mathbf{m}} S_1(J;\mathbf{m}) e^{i\mathbf{m}\cdot\mathbf{w}_0},$$

por tanto,

$$\sum_{\alpha} \nu_0^{\alpha} \frac{\partial S_1}{\partial w_0^{\alpha}} = i \sum_{\mathbf{m}} (\boldsymbol{\nu}_0 \cdot \mathbf{m}) S_1(J;\mathbf{m}) e^{i\mathbf{m}\cdot\mathbf{w}_0},$$

comparando ambas expansiones se obtiene:

$$S_1(J;\mathbf{m}) = \frac{\Theta_{\mathbf{m}}(J)}{i(\boldsymbol{\nu}_0 \cdot \mathbf{m})}.$$

Esta expresión provee una solución al problema a **primer orden** (S_1) siempre y cuando el denominador sea diferente de **cero**.

Cuando $\boldsymbol{\nu}_0 \cdot \mathbf{m}$ es cero se tiene el caso de **resonancias**, conocido también como sistemas **degenerados**, en los cuales la teoría perturbativa falla al describir el sistema.

Contenido: Tema 10

Invariantes adiabáticos

Condición adiabática

Cuando H depende **explícitamente** del tiempo, su solución es complicada, debido a la dificultad de encontrar **ctes. de movimiento**.

Sin embargo, cuando la dependencia temporal del sistema es lo suficientemente **lenta**, entonces:

- Existirán variables dinámicas que **varían** poco, por tanto, es posible considerarlas **practicamente** ctes.
- Tales cantidades resultan ser las **variables de acción** de sistemas completamente integrables.

Consideremos un sist. unidimensional, completamente integrable, que realiza un movimiento finito, caracterizado por un parámetro λ:

$$H = H(q, p, \lambda),$$

y en donde λ varía con el tiempo, pero **lentamente**, en un periodo T del movimiento, tal que:

$$T d\lambda/dt = T\dot{\lambda} \ll \lambda \quad \Rightarrow \quad \dot{\lambda} \approx \text{cte.}$$

obteniendo así lo que se conoce como **condición adiabática**.

Invariantes adiabáticos

Condición adiabática

Para analizar como afecta tal consideración al sistema, se calcula la **razón de cambio** de E,

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial H}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial \lambda}\dot{\lambda} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}\dot{\lambda} = \frac{dE}{dt},$$

en donde los primeros dos términos se cancelan debido a las ecuaciones canónicas de Hamilton.

Por tanto, para analizar la variación de E se toma el **promedio** en un periodo de movimiento,

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = \dot{\lambda} \left\langle \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right\rangle,$$

siendo $\dot{\lambda} =$ cte. en el caso de la **condición adiabática**, y donde el promedio viene dado como:

$$\left\langle \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\partial H}{\partial \lambda} dt.$$

Invariantes adiabáticos

Condición adiabática

Para calcular el promedio anterior, es posible utilizar una de las ecuaciones canónicas de Hamilton,

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{1}{\partial H/\partial p} dq = \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)^{-1} dq,$$

donde el periodo T se puede calcular en términos de q como:

$$T = \int_0^T dt = \oint \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)^{-1} dq.$$

Sustituyendo los resultados anteriores en la expresión de $\partial H/\partial \lambda$,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = \dot{\lambda} \left\langle \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right\rangle &= \frac{\dot{\lambda}}{T} \int_0^T \frac{\partial H}{\partial \lambda} dt, \\ &= \frac{\dot{\lambda}}{\oint \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)^{-1} dq} \oint \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} \right) \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)^{-1} dq. \end{aligned}$$

Invariantes adiabáticos

Condición adiabática

Debido a que las integrales de la ec. anterior se realizan en trayectorias donde $\lambda =$ cte. $\Rightarrow E =$ cte., pudiendo definir $p = p(q, E, \lambda)$, en donde E y λ son **independientes** por tanto calculando:

$$\frac{d}{d\lambda} H(q,p,\lambda) = \frac{dE}{d\lambda},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial \lambda} + \frac{\partial H}{\partial \lambda} = 0 \;\; \forall \;\; E \neq E(\lambda),$$

$$\therefore \quad \frac{\partial H}{\partial \lambda}\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^{-1} = -\frac{\partial p}{\partial \lambda}.$$

Sustituyendo el resultado anterior en la expresión de $\langle dE/dt \rangle$,

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = \frac{\dot{\lambda}}{\oint \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^{-1} dq} \oint \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^{-1} dq,$$

$$= -\frac{\dot{\lambda}}{\oint \left(\frac{\partial p}{\partial H}\right) dq} \oint \left(\frac{\partial p}{\partial \lambda}\right) dq.$$

Invariantes adiabáticos

Condición adiabática

Reordenando el resultado anterior,

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle \oint \left(\frac{\partial p}{\partial H} \right) dq + \dot{\lambda} \oint \left(\frac{\partial p}{\partial \lambda} \right) dq = 0,$$

$$\therefore \quad \oint \left[\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle \frac{\partial p}{\partial E} + \dot{\lambda} \frac{\partial p}{\partial \lambda} \right] dq = 0.^{6}$$

Ahora, por otro lado, analizando la **acción** del sistema,

$$J = \oint p dq,$$

y calculando la diferencial total de J respecto al tiempo, considerando $p = p(q, E, \lambda)$,

$$\frac{dJ}{dt} = \oint \frac{dp}{dt} dq = \oint \left[\frac{\partial p}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial \lambda} \dot{\lambda} + \frac{\partial p}{\partial q} \dot{q} \right] dq = \oint \left[\frac{\partial p}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial \lambda} \dot{\lambda} \right] dq.$$

[6] donde $\langle dE/dt \rangle$ es independiente de q y haciendo $H \to E$ dentro la integral.

[7] $\oint (\partial p/\partial q) \dot{q} dq = \oint (\partial H/\partial q) dq = \oint dH = 0.$

Invariantes adiabáticos

Condición adiabática

Calculando el promedio temporal del resultado anterior:

$$\left\langle \frac{dJ}{dt} \right\rangle = \oint \left[\frac{\partial p}{\partial E} \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle + \frac{\partial p}{\partial \lambda} \dot{\lambda} \right] dq,$$

sin embargo, se había encontrado que para sistemas en donde aplica la **condición adiabática** se cumple que:

$$\oint \left[\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle \frac{\partial p}{\partial E} + \dot{\lambda} \frac{\partial p}{\partial \lambda} \right] dq = 0,$$

$$\Rightarrow \quad \left\langle \frac{dJ}{dt} \right\rangle = 0,$$

por tanto, se tiene que la acción es un **invariante adiabático**, es decir, J permanece **constante** cuando el parámetro λ varía lentamente tal que $\dot{\lambda} T \ll \lambda \Rightarrow \dot{\lambda} \approx$ cte.

Invariantes adiabáticos

Ecuaciones de movimiento

$$\lambda = \text{cte.} \Rightarrow \; S = S(q, J)$$

Transformación canónica

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad w = \frac{\partial S}{\partial J},$$

Ecuaciones de movimiento de Hamilton

$$K = H + \frac{\partial S}{\partial t} \;\Rightarrow\; K = H(J),$$

$$\dot{J} = -\frac{\partial K}{\partial w} = 0 \;\Rightarrow\; J = \text{cte.},$$

$$\dot{w} = \frac{\partial K}{\partial J} = \nu \;\Rightarrow\; w = \nu t + \beta.$$

$$\lambda = \lambda(t) \Rightarrow \; S = S(q, J, \lambda(t))$$

Transformación canónica

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad w = \frac{\partial S}{\partial J},$$

Ecuaciones de movimiento de Hamilton

$$K = H + \frac{\partial S}{\partial t},$$

en donde:

$$S = \int p dq.$$

Invariantes adiabáticos

Ecuaciones de movimiento

Se observa que es necesario hallar $\partial S/\partial t$ para obtener las ecuaciones de movimiento en el caso $\lambda = \lambda(t)$:

$$\dot{J} = -\frac{\partial K}{\partial w}, \quad \dot{w} = \frac{\partial K}{\partial J}.$$

Para ello se usa:

$$S = \int p dq, \quad \forall \quad p = p(q, E, \lambda(t)),$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial S}{\partial t} = \int \frac{\partial p}{\partial t} dq = \dot{\lambda} \int \frac{\partial p}{\partial \lambda} dq = \dot{\lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\int p dq \right],$$

$$= \dot{\lambda} \frac{\partial S}{\partial \lambda} = \dot{\lambda} \Lambda(w, J),$$

en donde se ha definido:

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} = \Lambda(w, J).$$

Por tanto, de la expresión para el Hamiltoniano transformado,

$$\begin{aligned} K &= H + \frac{\partial S}{\partial t}, \\ &= H(J) + \dot{\lambda}\Lambda(w, J), \end{aligned}$$

se hallan las **ecuaciones de movimiento** cuando $\lambda = \lambda(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{J} &= -\frac{\partial K}{\partial w} = -\frac{\partial \Lambda}{\partial w}\dot{\lambda}, \\ \dot{w} &= \frac{\partial K}{\partial J} = \nu(J) + \frac{\partial \Lambda}{\partial J}\dot{\lambda}, \end{aligned}$$

en donde $\nu(J) = \partial H/\partial J$ es la **frecuencia** de oscilación calculada considerando $\lambda = \text{cte}$.