Contenido

Contenido

Leyes de Newton

I Un cuerpo permanecerá en reposo o movimiento uniforme hasta que una fuerza actúe en el.

II Un cuerpo al cual se le aplica una fuerza se mueve de tal manera que la razón de cambio en el tiempo del momento equivale a dicha fuerza.

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad \therefore \quad \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m\mathbf{a}.$$

III Si dos cuerpos ejercen fuerzas entre ellos, tales fuerzas serán iguales en magnitud y opuestas en dirección.

Leyes de Newton

Definiciones

La segunda ley de Newton implica el conocimiento de la **masa** del cuerpo,

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\mathbf{a}.$$

En el caso de que se quiera conocer el **peso** de un cuerpo, se tiene:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{W} = m\mathbf{g},$$

lo anterior implica la equivalencia de dos diferentes conceptos:

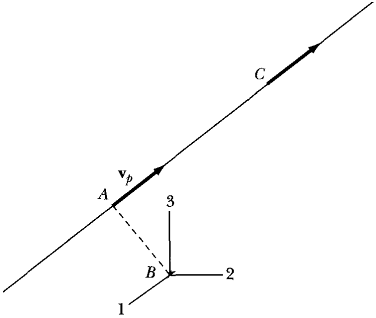
masa inercial
: aquella que determina la aceleración de un cuerpo bajo la acción de una fuerza dada.

masa gravitacional
: aquella que determina las fuerzas gravitacionales entre un cuerpo y otros cuerpos.

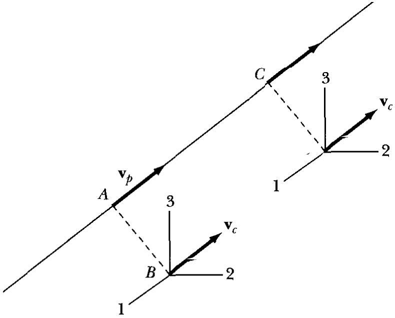
Experimentalmente ha sido demostrado que ambas **masas** son prácticamente idénticas (diferencias menores a 10^{-12}) lo cual se conoce como **principio de equivalencia**.

Marco de Referencia Inercial

Un marco de referencia es **inercial** si las leyes de Newton son válidas en ese marco, es decir, si un cuerpo que no se encuentre bajo la acción de fuerzas externas se mueve a velocidad cte. sin cambio de dirección o permanece en reposo.



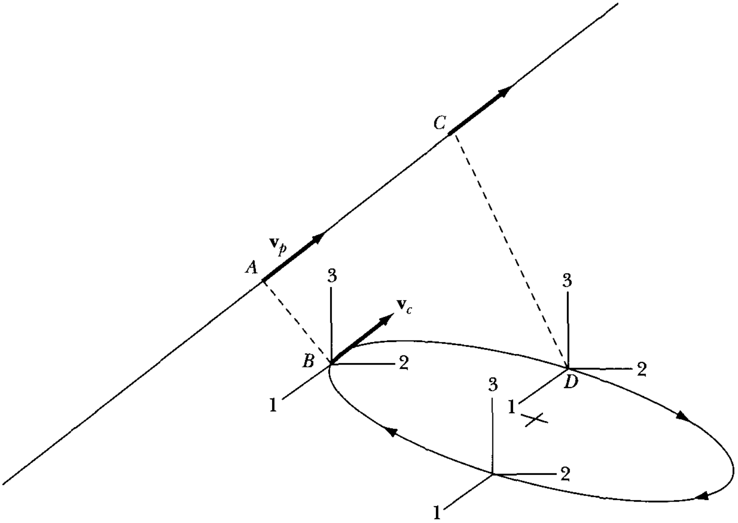
Inercial



Inercial

Leyes de Newton

Marcos de Referencia



No-inercial

Ecuaciones de Movimiento

Definición

La ecuación derivada de la segunda ley de Newton nos ayuda a encontrar las **ecuaciones de movimiento** de un sistema:

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\ddot{\mathbf{r}}, \quad \forall \quad m \neq m(t),$$

en donde lo anterior representa una ec. diferencial de segundo orden.

En el caso de que $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ sea conocida, entonces resolviendo lo anterior podemos llegar a la **ecuación de movimiento**:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t),$$

especificando los valores iniciales:

$$\mathbf{r}(t=0) = \mathbf{r}_0 \quad \& \quad \dot{\mathbf{r}}(t=0) = \mathbf{v}_0.$$

Teoremas de conservación

Momento lineal

Si una partícula es **libre**, entonces no existen fuerzas aplicadas a ella, por tanto,

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{p}} = 0,$$

lo cual implica que,

$$\mathbf{p} = \text{cte}.$$

Lo anterior aplica también a componentes de $\mathbf{p}$:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = 0 \;\; \forall \;\; \mathbf{s} = \text{cte},$$

por tanto,

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = \dot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{s} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p} \cdot \mathbf{s} = \text{cte}.$$

indicando finalmente:

Conservación del momento lineal

El momento lineal total $\mathbf{p}$ de una partícula se conserva cuando la fuerza total aplicada es cero, o la componente de mom. lineal en una dirección en donde la fuerza es cero será una cte. independiente del tiempo.

Teoremas de conservación

Momento angular

El **momento angular** $\mathbf{L}$ de una partícula respecto a un origen desde el cual $\mathbf{r}$ es medido se define como

$$\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p},$$

y la **torca** $\mathbf{N}$ referente al mismo origen como:

$$\mathbf{N} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad \forall \quad \mathbf{F} = \text{fuerza aplicada.}$$

Reescribiendo la expresión para $\mathbf{N}$ tenemos,

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} \quad \forall \quad \mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}.$$

Ahora, por otro lado:

$$\dot{\mathbf{L}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}},$$

pero,

$$\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} = \dot{\mathbf{r}} \times m\mathbf{v} = m\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} = 0,$$

por tanto,

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{N}.$$

Conservación momento angular

El momento angular de una partícula que no esté bajo la acción de torca alguna se conserva.

Teoremas de conservación

Trabajo y energía cinética

El **trabajo** ejercido por una fuerza $\mathbf{F}$ sobre una partícula para cambiar su condición del estado 1 al estado 2 viene dado como,

$$W_{12} \equiv \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

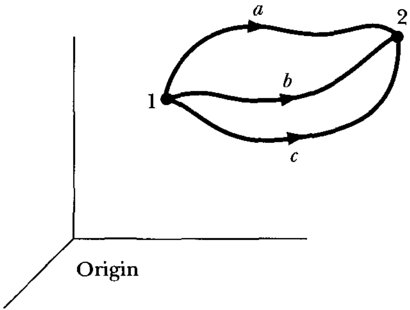
Considerando a $\mathbf{F}$ como la fuerza resultante en la partícula, entonces,

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= m\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}dt = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v}dt \\ &= \frac{m}{2}\frac{d}{dt}\left(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}\right)dt = \frac{m}{2}\frac{d}{dt}(v^2)dt = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right), \end{aligned}$$

Con lo anterior podemos expresar el trabajo de la siguiente manera,

$$W_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \left.\left(\frac{1}{2}mv^2\right)\right|_1^2 = \frac{1}{2}m\left(v_2^2 - v_1^2\right) = T_2 - T_1,$$

en donde T es la **energía cinética** de la partícula.



Para ciertos sistemas, el trabajo realizado para mover una partícula del estado 1 al estado 2 es independiente del camino elegido, por tanto sólo dependerá de las condiciones de los estados final e inicial.

Tales condiciones serán ganancias o pérdidas en la energía del sistema, por tanto definimos la **energía potencial** como la capacidad de realizar trabajo,

$$\int_1^2 \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \equiv -(U_2 - U_1),$$

lo cual se puede obtener considerando,

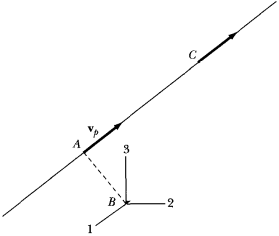
$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -\nabla U, \\ \Rightarrow \quad \int_1^2 \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= -\int_1^2 (\nabla U)\cdot d\mathbf{r} \\ = -\int_1^2 dU &= U_1 - U_2. \end{aligned}$$

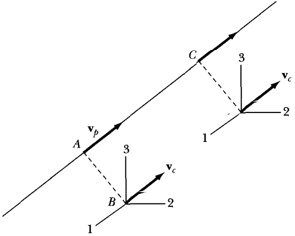
Teoremas de conservación

Energía total

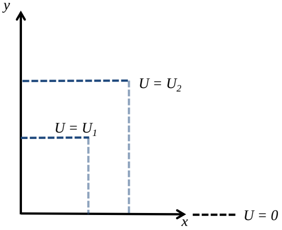
Tanto en la energía **cinética** como **potencial**, la elección del marco de referencia tendrá influencia en su valor en cada punto.

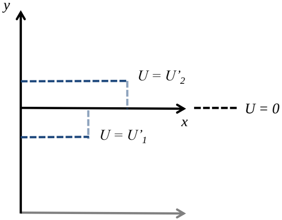
Energía Cinética





Energía Potencial





Teoremas de conservación

Energía total

Escoger el origen de un sistema de referencia es arbitrario, y por tanto el valor **puntual** de la energía [1] no tiene sentido físico, lo realmente importante son las **variaciones** o **cambios** de energía:

$$U_1 - U_2 \quad \& \quad T_1 - T_2.$$

Definiendo ahora la **energía total** de una partícula,

$$E \equiv T + U,$$

calculemos el cambio de E en función del tiempo,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dT}{dt} + \frac{dU}{dt},$$

en donde para la energía cinética tenemos:

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = dT \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}}.$$

[1] cinética y potencial

Teoremas de conservación

Energía total

Para la energía potencial,

$$\frac{dU}{dt} = \sum_i \frac{dU}{dx_i}\frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t} = \sum_i \frac{dU}{dx_i}\dot{x}_i + \frac{\partial U}{\partial t} = (\nabla U)\cdot\dot{\mathbf{r}} + \frac{\partial U}{\partial t}.$$

Sustituyendo dT/dt y dU/dt en la variación de E respecto al tiempo,

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{dT}{dt} + \frac{dU}{dt} \\ \Rightarrow \quad \frac{dE}{dt} &= \mathbf{F}\cdot\dot{\mathbf{r}} + (\nabla U)\cdot\dot{\mathbf{r}} + \frac{\partial U}{\partial t} \\ &= (\mathbf{F} + \nabla U)\cdot\dot{\mathbf{r}} + \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t}, \quad \forall \quad \mathbf{F} = -\nabla U. \end{aligned}$$

En el caso de que $U \neq U(t) \Rightarrow \partial U/\partial t = 0$, y por tanto se tiene que el campo de fuerzas $\mathbf{F}$ será **conservativo**, obteniendo:

Conservación de la energía

La energía total E de una partícula en un campo de fuerzas conservativo es una constante en el tiempo.

A partir de la descripción de la energía de un sistema o partícula [2]

$$E = T + U = \frac{1}{2}mv^2 + U(x),$$

se puede obtener la ecuación de movimiento del mismo,

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(x)\right]},$$

lo cual integrando nos arroja,

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{\pm dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(x)\right]}}.$$

Con tan solo introducir la forma del potencial se puede (en principio!) obtener la ecuación de movimiento: $x = x(t)$.

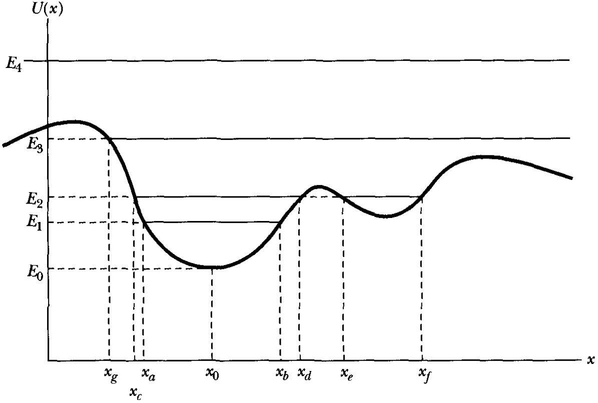
[2] para potenciales conservativos

Energía

Tipos de movimiento

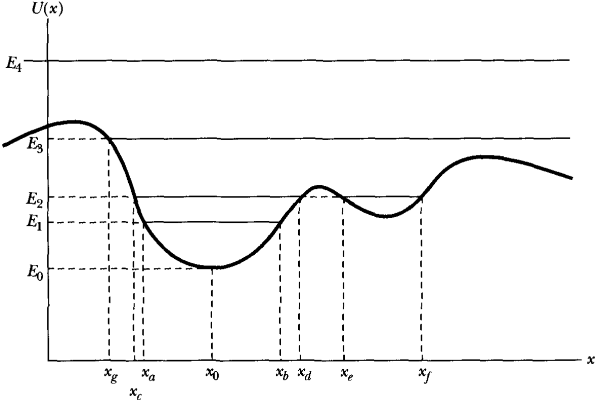
El movimiento de una partícula puede ser deducido, en gran medida, por la forma de $U(x)$, sin necesidad de obtener la ecuación de movimiento, además de que, en general,

$$\frac{1}{2}mv^2 = T \geq 0 \quad \Rightarrow \quad E \geq U(x).$$



Energía

Tipos de movimiento

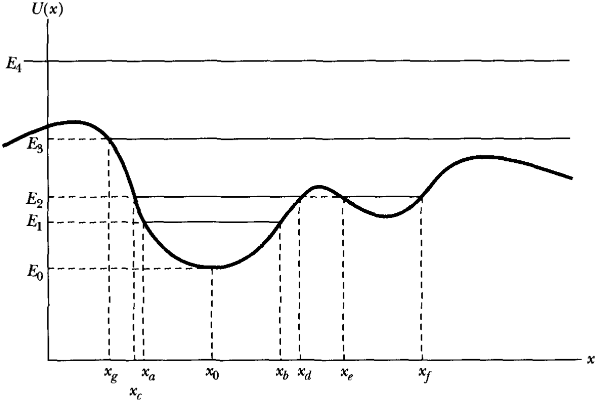


$E = E_0$

El movimiento de la partícula sólo tiene un valor $x = x_0$, por tanto está en reposo con $T = 0$, ya que $E_0 = U(x_0)$.

Energía

Tipos de movimiento

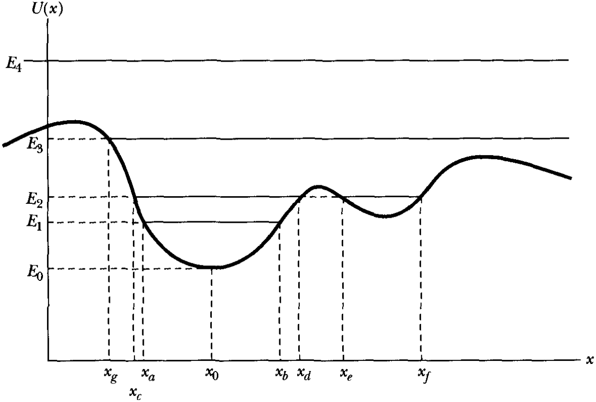


$E = E_1$

El movimiento de la partícula será **periódico** y **acotado** en $x_a \leq x \leq x_b$, siendo x_a y x_b puntos de **retorno**, en donde $T = 0$.

Energía

Tipos de movimiento

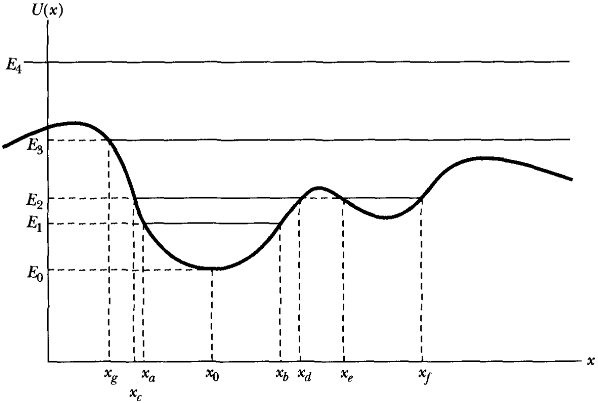


$E = E_2$

El movimiento de la partícula igualmente será **periódico** y **acotado** pero en dos regiones: $x_c \leq x \leq x_d$ y $x_e \leq x \leq x_f$, sin la posibilidad de transitar entre regiones.

Energía

Tipos de movimiento

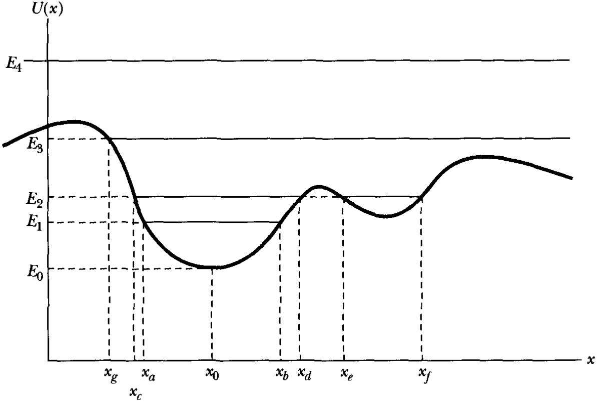


$E = E_3$

La partícula vendrá desde el infinito, se detendrá $(T = 0)$ en $x = x_g$ y se regresará al infinito, por tanto se trata de un movimiento **parcialmente acotado**.

Energía

Tipos de movimiento



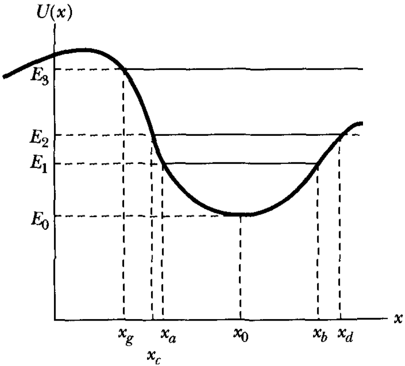
$E = E_4$

El movimiento será **no-acotado** y la partícula se puede encontrar en cualquier cualquier posición, donde la velocidad variará, ya que:

$$E = E_4 = T + U(x) \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}mv^2 = E_4 - U(x).$$

Energía

Expansión del potencial



El movimiento con E_1 en $x_a \leq x \leq x_b$ puede ser analizado con la aproximación armónica,

$$U(x) = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2,$$

en donde $x = x_0$ representa el **punto de equilibrio** del sistema, el cual en este caso será un equilibrio **estable**.

En general, expandiendo el potencial $U(x)$ en serie de Taylor alrededor del punto de equilibrio,

$$U(x) = U_0 + (x - x_0)\left(\frac{dU}{dx}\right)_{x_0} + \frac{(x - x_0)^2}{2!}\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_{x_0} + \frac{(x - x_0)^3}{3!}\left(\frac{d^3U}{dx^3}\right)_{x_0}$$

Energía

Expansión del potencial

Para la expansión de $U(x)$ anterior, en donde $x = x_0$ es el punto de equilibrio, se tiene que:

$$\left(\frac{dU}{dx}\right)_{x_0} = 0,$$

quedando la expresión de $U(x)$ como,

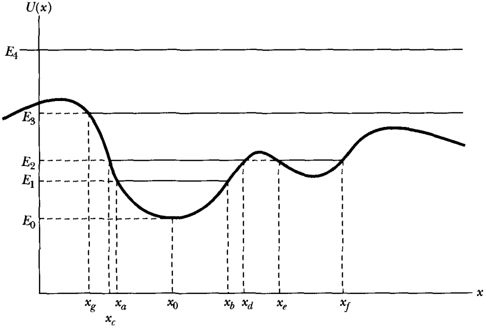
$$U(x) = \frac{(x-x_0)^2}{2!}\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_{x_0} + \frac{(x-x_0)^3}{3!}\left(\frac{d^3U}{dx^3}\right)_{x_0} + \dots$$

en donde se ha definido el cero del potencial como:

$$U(x) - U_0 \rightarrow U(x).$$

Para el caso en que $x = \Delta x + x_0 \ \forall\ \Delta x \ll x_0$, entonces

$$U(x) = \frac{(x-x_0)^2}{2!}\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_{x_0}.$$



Con la expresión aproximada del potencial para x pequeños se puede definir la condición de equilibrio:

$$\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_{x_0} > 0 \qquad \textbf{equilibrio estable},$$

$$\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_{x_0} < 0 \qquad \textbf{equilibrio inestable}.$$