

Contenido

1. Cálculo de variaciones

Contenido: Tema 03

1. Cálculo de variaciones
 - 1.1 Definición y ecuaciones de Euler
 - 1.2 Generalización a varias variables, constricciones

Contenido: Tema 03

1. Cálculo de variaciones

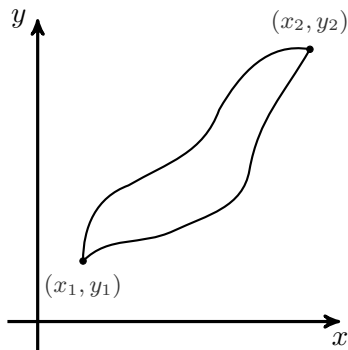
1.1 Definición y ecuaciones de Euler

1.2 Generalización a varias variables, constricciones

Definición y ecuaciones de Euler

Fundamentos

Consideremos el siguiente problema básico,



x : variable independiente definida en el intervalo $[x_1, x_2]$.

$y(x)$: función de x definida en el mismo intervalo y diferenciable.

Tenemos la relación,

$$f = f[y(x), y'(x), x],$$

definida en una trayectoria $y(x)$ en el intervalo $[x_1, x_2]$ y en donde

$$y'(x) \equiv \frac{dy}{dx}.$$

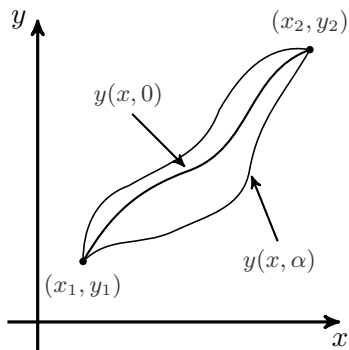
El objetivo fundamental es determinar $y(x)$ tal que

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f[y(x), y'(x), x] dx$$

sea un **extremal**.

Definición y ecuación de Euler

Fundamentos



Sea $y(x, 0)$ la trayectoria solución y $y(x, \alpha)$ alguna trayectoria vecina, tal que,

$$y(x, \alpha) = y(x, 0) + \alpha \eta(x),$$

en donde α es una cantidad infinitesimal y $\eta(x)$ satisface,

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0.$$

Para tal familia de curvas, J se puede expresar como,

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f[y(x, \alpha), y'(x, \alpha), x] dx,$$

con la condición de **extremal** dada como,

$$\left. \frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0,$$

para todas las $\eta(x)$ posibles.

Definición y ecuación de Euler

Ecuación de Euler

Para determinar el resultado de la condición anterior, calculamos la diferencial de la integral $J(\alpha)$,

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f[y(x, \alpha), y'(x, \alpha), x] dx,$$
$$\Rightarrow \frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} \right] dx.$$

Considerando la segunda integral,

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial \eta}{\partial x} dx \quad \forall \quad \frac{\partial y}{\partial \alpha} = \eta(x) \quad \& \quad \frac{\partial y'}{\partial \alpha} = \frac{\partial \eta}{\partial x},$$

por tanto,

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] dx.$$

Definición y ecuación de Euler

Ecuación de Euler

De la expresión anterior, integrando el segundo término por partes,

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} dx = \left. \frac{\partial f}{\partial y'} \eta(x) \right|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta(x) dx, \quad ^1$$

debido a la condición de que la familia de curvas (representada por el parámetro α) debe pasar por $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, entonces $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, por tanto,

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right] \eta(x) dx.$$

Con lo cual, la condición de **extremal** estará dada como,

$$\left. \frac{\partial J}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} dx \eta(x) \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right]_{\alpha=0} = 0.$$

¹ $\int u dv = uv - \int v du$

Definición y ecuación de Euler

Ecuación de Euler

Como $\eta(x)$ es una función arbitraria, entonces $J(\alpha)$ es un extremal si,

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0,$$

lo que se conoce como **ecuación de Euler**.

Además, tenemos que la cantidad

$$d\alpha \frac{\partial y}{\partial \alpha} \equiv \delta y,$$

representa el corrimiento infinitesimal del recorrido alterno con respecto al recorrido correcto $y(x)$ en el punto x , por tanto representa un **desplazamiento virtual**.

Esta notación se utiliza también para la condición de extremal,

$$d\alpha \frac{\partial J}{\partial \alpha} \equiv \delta J$$

Definición y ecuación de Euler

Segunda forma de la ecuación de Euler

La ecuación de Euler,

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0$$

puede ser expresada de otra manera, partiendo del funcional $f(y, y', x)$:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}, \\ &= y' \frac{\partial f}{\partial y} + y'' \frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{\partial f}{\partial x}, \end{aligned}$$

ahora, por otro lado, consideremos:

$$\frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = y'' \frac{\partial f}{\partial y'} + y' \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right),$$

restando ambas ecuaciones, tenemos:

$$\frac{df}{dx} - \frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = y' \frac{\partial f}{\partial y} - y' \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) + \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Definición y ecuación de Euler

Segunda forma de la ecuación de Euler

De la ecuación anterior agrupando términos,

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx} - \frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) &= y' \frac{\partial f}{\partial y} - y' \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) + \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{d}{dx} \left(f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial x} &= y' \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right],\end{aligned}$$

donde se observa que el término de la derecha corresponde a la **ecuación de Euler**,

$$\left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] = 0,$$

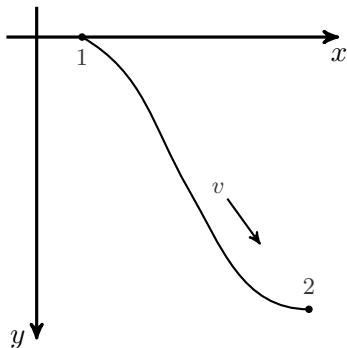
por tanto, tenemos:

$$\frac{d}{dx} \left(f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$

lo cual se conoce como **segunda forma** de la ec. de Euler.

Definición y ecuación de Euler

Segunda forma de la ecuación de Euler: Braquistocrona



Si parte del reposo y v es la velocidad a lo largo de la curva, entonces el t desde 1 hasta 2 es,

$$t = \int_1^2 dt = \int_1^2 \frac{ds}{v}.$$

Ahora, por conservación de energía, junto con $V(y = 0) = 0$, tenemos que

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy \Rightarrow v = \sqrt{2gy}.$$

Por tanto, sust. en t ,

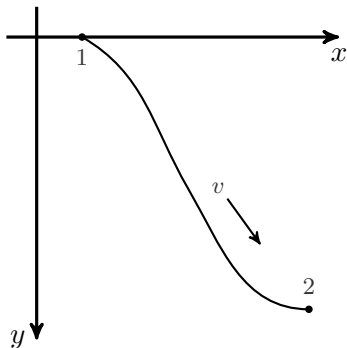
$$t_{12} = \int_1^2 \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \int_1^2 \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}} dx,$$

identificando el funcional f ,

$$f = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}.$$

Definición y ecuación de Euler

Segunda forma de la ecuación de Euler: Braquistocrona



Observamos que f es ind. de x :

$$f(y, y') = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}},$$

ahora, recordando la segunda forma de la ec. de Euler,

$$\frac{d}{dx} \left(f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \left(f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0$$

$$\Rightarrow f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} = \text{cte.}$$

Calculando y sustituyendo,

$$\sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}} - \frac{y'^2}{\sqrt{2gy(1 + y'^2)}} = c,$$

reduciendo llegamos a:

$$y(1 + y'^2) = a \quad \forall \quad 2a = \text{cte.}$$

Definición y ecuación de Euler

Segunda forma de la ecuación de Euler: Braquistocrona

Reescribiendo:

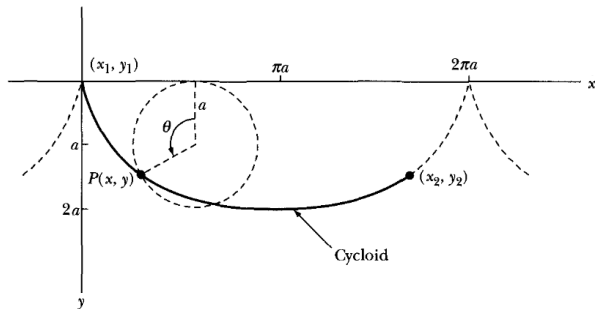
$$\begin{aligned}y(1 + y'^2) &= 2a \\ \Rightarrow \frac{2ay - y^2}{y^2} &= y'^2\end{aligned}$$

$$\therefore \int \frac{y dy}{\sqrt{2ay - y^2}} = x,$$

proponiendo,

$$\begin{aligned}y &= a(1 - \cos \theta) \\ \Rightarrow x &= a(\theta - \sin \theta),\end{aligned}$$

lo que corresponde a las ecs. paramétricas de una **cicloide**.



Contenido: Tema 03

1. Cálculo de variaciones

1.1 Definición y ecuaciones de Euler

1.2 Generalización a varias variables, constricciones

Generalización a varias variables, constricciones

Funcional con varias variables dependientes

Generalizando el prob. fundamental del cálculo de variaciones para el caso donde f es una función de muchas variables y_i y sus derivadas y'_i :

$$\delta J = \delta \int_1^2 f(y_1(x), y_2(x), \dots; y'_1(x), y'_2(x), \dots; x) dx,$$

considerando que $J = J(\alpha)$ y que α etiqueta un set de curvas $y_i(x, \alpha)$:

$$y_1(x, \alpha) = y_1(x, 0) + \alpha \eta_1(x),$$

$$y_2(x, \alpha) = y_2(x, 0) + \alpha \eta_2(x),$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$y_i(x, \alpha) = y_i(x, 0) + \alpha \eta_i(x),$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

y donde $y_1(x, 0)$, $y_2(x, 0)$, etc., son las soluciones del problema extremal, mientras que η_1 , η_2 , etc., son funciones independientes arbitrarias (continuas y diferenciables) de x que se anulan en los puntos frontera.

Generalización a varias variables, constricciones

Funcional con varias variables dependientes

Calculando la variación de J ,

$$\delta J = \int_1^2 \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f}{\partial y'_i} \delta y'_i \right) dx$$

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} d\alpha = \int_1^2 \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial f}{\partial y'_i} \frac{\partial y'_i}{\partial \alpha} d\alpha \right) dx,$$

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} d\alpha = \int_1^2 \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \eta_i(x) + \frac{\partial f}{\partial y'_i} \frac{d\eta_i(x)}{dx} \right) d\alpha dx,^2$$

integrando por partes el segundo término,

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{\partial f}{\partial y'_i} \frac{d\eta_i(x)}{dx} dx &= \left. \frac{\partial f}{\partial y'_i} \eta_i(x) \right|_1^2 - \int_1^2 \eta_i(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) dx \\ &= \int_1^2 \eta_i(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) dx = \int_1^2 \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) dx \end{aligned}$$

² $\partial y_i / \partial \alpha = \eta(x)$, $\partial y'_i / \partial \alpha = d\eta_i(x) / dx$

Generalización a varias variables, constricciones

Funcional con varias variables dependientes

Sustituyendo lo anterior en la variación de J ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial \alpha} d\alpha &= \int_1^2 \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} d\alpha dx \\ \Rightarrow \delta J &= \int_1^2 \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) \delta y_i dx,\end{aligned}$$

aplicando la condición extremal $\delta J = 0$,

$$\int_1^2 \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) \delta y_i dx = 0,$$

debido a que las y_i 's son var. independientes $\Rightarrow \delta y_i$ también lo son,

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) = 0 \quad \forall \quad i = 1, 2, \dots, n$$

la cual representa la generalización a varias variables de la **ecuación de Euler**.

Generalización a varias variables, constricciones

Constricciones

Consideremos el caso en el que,

$$f \{y_i, y'_i, x\} = f(y, z, y', z', x)$$

por tanto, la cantidad a la que deseamos hallar su extremal será

$$J = \int_1^2 f \{y_i, y'_i, x\} dx = \int_1^2 f(y, z, y', z', x) dx,$$

aplicando la condición de extremal,

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_1^2 \left[\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial \alpha} \right] dx$$

en donde,

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{\partial f}{\partial \xi'} \frac{\partial \xi'}{\partial \alpha} dx &= \int_1^2 \frac{\partial f}{\partial \xi'} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial \alpha} dx = \frac{\partial f}{\partial \xi'} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi'} \right) dx \\ &= - \int_1^2 \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi'} \right) dx \quad \forall \quad \xi = y, z. \end{aligned}$$

Generalización a varias variables, constricciones

Constricciones

Sustituyendo,

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_1^2 \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \left[\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial z'} \right) \right] \frac{\partial z}{\partial \alpha} \right\} dx = 0.$$

Ahora, para el caso en el que existe una relación de **constricción**,

$$g \{y_i, x\} = g(y, z, x) = 0,$$

las variaciones $\partial y/\partial \alpha$ y $\partial z/\partial \alpha$ ya no son **independientes**, por tanto las expresiones en $\partial J/\partial \alpha$ no se anulan término a término.

Para eliminar tal dependencia, tomemos en cuenta la constricción,

$$\frac{dg}{d\alpha} = \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} = - \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \alpha}$$

por tanto, sustituyendo;

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_1^2 \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] - \left[\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial z'} \right) \right] \frac{\partial g/\partial y}{\partial g/\partial z} \right\} \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx = 0.$$

Generalización a varias variables, constricciones

Constricciones

De la ecuación anterior,

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_1^2 \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] - \left[\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial z'} \right) \right] \frac{\partial g / \partial y}{\partial g / \partial z} \right\} \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx = 0$$

como $\partial y / \partial \alpha$ es una función genérica que multiplica a todo el integrando, se debe cumplir,

$$\left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^{-1} = \left[\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial z'} \right) \right] \left(\frac{\partial g}{\partial z} \right)^{-1},$$

en donde se observa que el lado **izq.** incluye derivadas respecto y y y' , mientras que el **derecho** derivadas respecto z y z' , por lo que ambas deben ser iguales a una función de x solamente:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^{-1} = \left[\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial z'} \right) \right] \left(\frac{\partial g}{\partial z} \right)^{-1} = -\lambda(x).$$

Generalización a varias variables, constricciones

Constricciones

Reescribiendo lo anterior, tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) + \lambda(x) \frac{\partial g}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial z'} \right) + \lambda(x) \frac{\partial g}{\partial z} &= 0\end{aligned}$$

en donde $\lambda(x)$ es una función por determinar, que se le conoce como **multiplicador de Lagrange**.

Generalizando el caso anterior para n variables y m constricciones, se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) + \sum_{j=1}^m \lambda_j(x) \frac{\partial g_j}{\partial y_i} &= 0 \\ g_j \{y_i, x\} &= 0\end{aligned}$$

en donde $i = 1, 2, \dots, n$ y $j = 1, 2, \dots, m$.

Generalización a varias variables, constricciones

Constricciones isoperimétricas

Las constricciones **isoperimétricas** son aquellas en las cuales se requiere que la integral de una función dada $g(y, y', x)$ sea un valor fijo K :

$$J = \int_1^2 f(y, y', x) dx \quad \forall \quad K = \int_1^2 g(y, y', x) dx,$$

en donde K representa por tanto una **constricción integral**.

Para resolver el problema aplicamos el método de multiplicadores de Lagrange,

$$h(y, y', x) = f(y, y', x) + \lambda g(y, y', x),$$

entonces ahora tendremos un nuevo funcional h libre de constricciones:

$$H = \int_1^2 h(y, y', x) dx,$$

el cual nos arroja la siguiente ec. de Euler modificada:

$$\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial H}{\partial y'} \right) = 0.$$