Contenido

Contenido: Tema 04

Contenido: Tema 04

En el caso más general, tenemos un sistema que consta de:

N partículas, $n = 3N$ grados de libertad, k const. holonómicas. [1]

Coordenadas generalizadas

conjunto de coordenadas independientes que especifican completamente la configuración del sistema: $\{q_1, q_2, \ldots, q_{n-k}\}$.

El sistema de coordenadas original (cartesiano por ejemplo) puede ser expresado en términos de las coordenadas generalizadas: como,

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_1(q_1, q_2, \ldots, q_{n-k}, t), \\
x_2 &= x_2(q_1, q_2, \ldots, q_{n-k}, t), \\
&\vdots \\
x_n &= x_n(q_1, q_2, \ldots, q_{n-k}, t).
\end{aligned}
$$

[1] del tipo $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, t) = 0$.

Coordenadas generalizadas

Suponiendo que todas las **coord. generalizadas** y el tiempo cambian ligeramente [2] por las cantidades $\{dq_i\}$ y dt, entonces el cambio inducido en (por ejemplo) x_1 será:

$$dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x_1}{\partial q_2} dq_2 + \ldots + \frac{\partial x_1}{\partial q_{n-k}} dq_{n-k} + \frac{\partial x_1}{\partial t} dt,$$

tenemos por tanto que el **desplazamiento general** para la coordenada $x_i = x_i\{q_\alpha, t\}$ esta dado por,

$$dx_i = \sum_{\alpha=1}^{n-k} \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \frac{\partial x_i}{\partial t} dt \quad \forall \quad i = 1, \ldots, n$$

así como la **velocidad** $\dot{x}_i = \dot{x}_i\{q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t\}$:

$$\frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i = \sum_{\alpha=1}^{n-k} \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} \frac{dq_\alpha}{dt} + \frac{\partial x_i}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{n-k} \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial x_i}{\partial t}.$$

[2] Por ejemplo, representar el cambio dinámico en la configuración del sistema cuando t se incrementa a $t + dt$.

Principio de Hamilton

El movimiento de un sistema desde el tiempo t_1 hasta el tiempo t_2 es tal que la integral de línea (llamada **acción** o **integral de acción**),

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad \forall \quad L = T - V,$$

tiene un valor **estacionario** para la trayectoria actual del movimiento.

Sistemas monogénicos

sistemas mecánicos para los cuales todas las fuerzas (excepto las de constricción) son derivables de potenciales escalares generalizados que pueden ser función de las coordenadas, velocidades y el tiempo. [3]

[3] Cuando el potencial sólo depende de las coordenadas, entonces se dice que el sistema es **conservativo**.

El **principio de Hamilton** se puede expresar, por tanto, como la **variación** de la **acción** I:

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt$$

tal que cuando se tenga la trayectoria actual del movimiento arroje un valor estacionario:

$$\delta I = 0 \quad \forall \quad L(q_i, \dot{q}_i, t) \quad \Leftarrow \quad \text{trayectoria del mov.}$$

Se observa que el planteamiento del principio de Hamilton es similar al problema fundamental del cálculo de variaciones, para el caso de un funcional $f = f(y_i, y_i', x)$ en donde se requiere encontrar el extremal de J,

$$\delta J = \delta \int_1^2 f(y_i, y_i', x) dx \;\; \forall \;\; i = 1, \ldots, n.$$

Del cálculo de variaciones se obtuvo la **ecuación de Euler**:

$$J = \int_1^2 f(y_i, y_i', x)dx \quad \Rightarrow \quad \partial J = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i'}\right) = 0,$$

haciendo el símil con el **principio de Hamilton**,

$$I = \int_1^2 L(q_i, \dot{q}_i, t)dt$$

y mediante las siguientes transformaciones:

$$x \;\to\; t, \;\; y_i \;\to\; q_i, \;\; y_i' \;\to\; \dot{q}_i, \;\; f(y_i, \dot{y}_i, x) \;\to\; L(q_i, \dot{q}_i, t),$$

se obtienen las ecs. de movimiento **Lagrange** correspondientes a la acción I:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \;\; \forall \;\; i = 1, 2, \ldots, n - k.$$

en donde se asume que las q_i's son independientes, por tanto el problema requiere que las k constricciones sean **holonómicas**.

Contenido: Tema 04

Multiplicadores de Lagrange, fuerzas generalizadas

Extensión del principio de Hamilton a sistemas semi-holonómicos

Al contar con un sistema que posee constricciones **semi-holonómicas** tipo

$$f_k(q_1, q_2, \ldots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n) = 0, \quad \forall \quad k = 1, 2, \ldots, m$$ [4]

ya no es posible aplicar de manera estándar el principio de Hamilton para obtener las ecuaciones de movimiento de Lagrange, debido a que las q_i's ya no son independientes.

El procedimiento para eliminar tal inconveniente y poder aplicar Lagrange es desacoplar las fuerzas de constricción del lagrangiano de manera explícita mediante el método de los **multiplicadores de Lagrange**:

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k f_k = 0,$$ [5]

[4] restricción holonómica: $f(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) = 0$.

[5] los multiplicadores de Lagrange λ_k son funciones indeterminadas.

Multiplicadores de Lagrange, fuerzas generalizadas

Extensión del principio de Hamilton a sistemas semi-holonómicos

Para sistemas semi-holonómicos el principio de Hamilton se mantiene

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0,$$

$$\Rightarrow \quad \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt = 0,$$

Sin embargo, anular término a término cada elemento de la sumatoria ya no es posible ya que las q_j no son independientes debido a que aún están mezcladas mediante las k constricciones.

Para desacoplar las q_j hacemos uso de los **multiplicadores de Lagrange**,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(L + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k f_k \right) dt = 0.$$

Multiplicadores de Lagrange, fuerzas generalizadas

Extensión del principio de Hamilton a sistemas semi-holonómicos

De esta manera, ya podemos aplicar la variación por separado:

$$\delta q_j \;\; \forall \;\; j = 1, 2, \ldots, n \qquad \delta\lambda_k \;\; \forall \;\; k = 1, 2, \ldots, m,$$

teniendo así $n + m$ variables por determinar.

Considerando $\lambda_k = \lambda_k(t)$, entonces, las n ecuaciones para δq_j son [6]

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j \;\; \forall \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

con: $$Q_j = \sum_{k=1}^{m} \left\{ \lambda_k \left[\frac{\partial f_k}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f_k}{\partial \dot{q}_j}\right)\right] - \frac{d\lambda_k}{dt}\frac{\partial f_k}{\partial \dot{q}_j} \right\},$$

mientras que $\delta\lambda_k$ nos da las m ecuaciones de constricción,

$$f_k(q_1, q_2, \ldots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n) = 0 \quad \forall \;\; k = 1, 2, \ldots, m,$$

y en donde Q_j son las **fuerzas generalizadas** del sistema.

[6] J. Ray, *Amer. J. Phys.* **34**, 406 (1966).

Consideremos una partícula cuyo Lagrangiano es,

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - V(x, y, z)$$

sujeto a la constricción

$$f(\dot{x}, \dot{y}, y) = \dot{x}\dot{y} + ky = 0 \quad \forall \quad k = \text{cte.}$$

Las ecuaciones de movimiento se obtendrán aplicando las ecuaciones de Lagrange, incluyendo los **multiplicadores de Lagrange**:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = Q_q \quad \forall \quad q = x, y, z.$$

con: $$Q_q = \lambda\left[\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}}\right)\right] - \frac{d\lambda}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{q}}.$$

Aplicando las ecuaciones anteriores se llegan a las siguientes ecuaciones de movimiento,

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x} + \lambda\ddot{y} + \dot{\lambda}\dot{y} + \frac{\partial V}{\partial x} &= 0, \\
m\ddot{y} + \lambda\ddot{x} - k\lambda + \dot{\lambda}\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y} &= 0, \\
m\ddot{z} + \frac{\partial V}{\partial z} &= 0,
\end{aligned}
$$

sujeto a la constricción:

$$\dot{x}\dot{y} + ky = 0.$$

Lo anterior representa un sistema de 4 ecuaciones diferenciales, que constan de 4 variables independientes:

- 3 coordenadas generalizadas (x, y, z),
- 1 multiplicador de Lagrange (λ), el cual está relacionado con la condición de constricción.

Recordando la expresión para las **fuerzas generalizadas**,

$$Q_j = \sum_{k=1}^{m} \left\{ \lambda_k \left[\frac{\partial f_k}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f_k}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] - \frac{d\lambda_k}{dt} \frac{\partial f_k}{\partial \dot{q}_j} \right\},$$

se observa que puede ser reducida para para sistemas con **constricciones holónomicas** del tipo $f_k(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) = 0$,

$$Q_j = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial q_j} \quad \forall \quad k = \text{num. de constricciones.}$$

Las razones para aplicar tal formalismo [7] con const. holonómicas son:
(1): no es deseable reducir todas las q's a coordenadas independientes,
(2): se desea obtener las **fuerzas de constricción**.

[7] descripción explícita de las relaciones de constricción en el problema.

Contenido: Tema 04

Momento generalizado

Consideremos un sistema holonómico (y conservativo), el cual tiene $n - m$ coordenadas q_i independientes, [8] y por tanto el mismo número de ecuaciones de Lagrange dadas por,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \;\; \forall \;\; i = 1, 2, \ldots, n - m.$$

Al tener un sistema conservativo, entonces $V = V(q_1, q_2, \ldots, q_{n-m})$, por lo tanto, las ec. de Lagrange se pueden expresar como,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0 \;\; \forall \;\; T = T(\dot{q}_i).$$

Expandiendo el primer término,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\sum_{j=1}^{n-m}\frac{1}{2}m\dot{q}_j^2 = m\dot{q}_i = p_i.$$

[8] donde m son el número de constricciones.

De lo anterior podemos definir una cantidad conocida como el **momento generalizado** o **momento canónico**,

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}.$$

En general, el Lagrangiano L depende de las q_i's y $\dot{q}_i$'s:

$$L = L(q_1, q_2, \ldots, q_{n-m}; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_{n-m}; t)$$

Ahora, si L no contiene explícitamente alguna coordenada q_i [9] se dice que q_i es una **coordenada cíclica**, y entonces de la ec. de Lagrange,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{dp_i}{dt} = \dot{p}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad p_i = \text{cte.}$$

[9] aunque si puede contener la correspondiente $\dot{q}_i$.

Del resultado anterior podemos llegar al siguiente

Teorema de conservación

El momento generalizado p_i correspondiente a una coordenada **cíclica** es una **constante de movimiento**, es decir, se conserva.

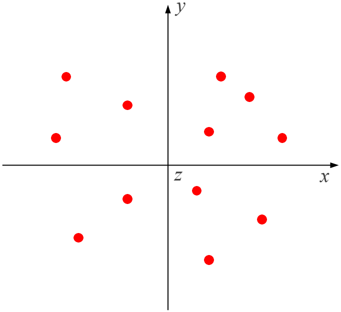
Se observa que existe una relación entre la **simetría** del problema y las cantidades que se conservan, la cual se da mediante las **coordenadas cíclicas**.

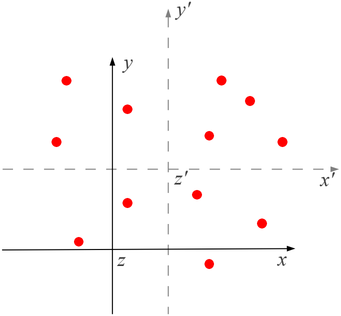
Si el sistema es invariante bajo la **transformación** continua de alguna coord. generalizada, q_i, entonces T y V no variarán ante los cambios de q_i, por tanto,

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_i = \text{cte.}$$

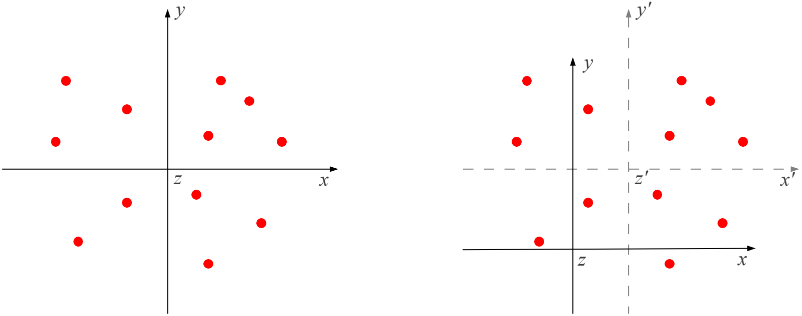
invariante ante operaciones de transformación continua (simetrías) $\longleftrightarrow$ cantidades que se conservan: momentos generalizados relacionados con tal traslación

Traslación en un potencial constante $U \neq U(x, y)$





Traslación en un potencial constante $U \neq U(x,y)$

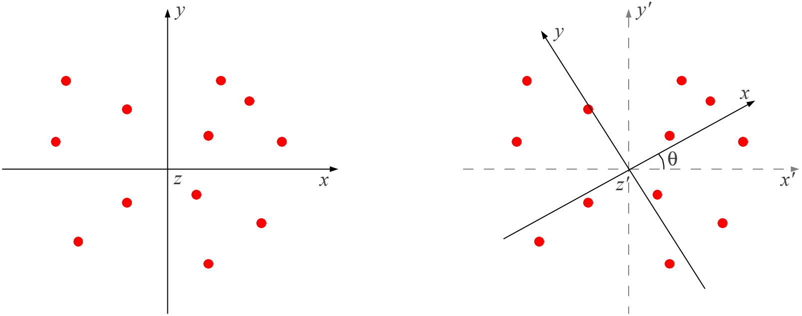


En este caso al tener $U \neq U(x,y)$, el problema es **invariante** ante la operación de **traslación** en el plano x-y:

$$x \to x + \alpha, \quad y \to y + \beta,$$

por lo que las comp. de P_x y P_y serán **constantes de movimiento**

Rotación en un potencial constante $U \neq U(x, y)$

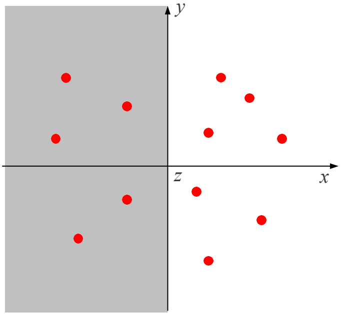


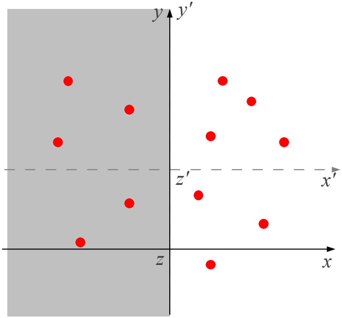
El sistema también será **invariante** ante la operación de **rotación** respecto al eje z:

$$\hat{\mathbf{x}} \rightarrow \text{Cos}\,\theta\hat{\mathbf{x}}' + \text{Sen}\,\theta\hat{\mathbf{y}}', \quad \hat{\mathbf{y}} \rightarrow -\text{Sen}\,\theta\hat{\mathbf{x}}' + \text{Cos}\,\theta\hat{\mathbf{y}}',$$

por lo que la comp. L_z será también una **cte. de movimiento**.

Potencial constante $U = U_1 \quad \forall \quad x \leq 0$ **&** $U = U_2 \quad \forall \quad x > 0$





En este caso como el potencial no es el mismo en todo el espacio, entonces el problema es **invariante** solamente ante la operación de **traslación** en y:

$$y \to y + \beta,$$

y por tanto solo P_y será **cte. de movimiento**.

Consideremos un lagrangiano general, el cual puede ser función de las coord. q_i, las velocidades $\dot{q}_i$ y posiblemente el tiempo t, entonces la derivada total de L con respecto a t es

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d\dot{q}_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d\dot{q}_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t},$$

pero de las ecs. de Lagrange tenemos,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

por tanto, sustituyendo en dL/dt,

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d\dot{q}_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} = \sum_i \frac{d}{dt}\left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial L}{\partial t}.$$

Teoremas de conservación y propiedades de simetría

Conservación de la energía

Del resultado anterior reacomodamos términos,

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt}\left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial L}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L\right) + \frac{\partial L}{\partial t} = 0.$$

La cantidad en paréntesis la llamamos **función de energía** [10]:

$$h(q_1, q_2, \ldots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n; t) = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L,$$

por tanto tenemos:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Si el lagrangiano no depende explícitamente del tiempo, entonces $dh/dt = 0$. Por tanto, se dice que h se **conserva** o que se trata de una **constante de movimiento**.

[10] ya que h tiene unidades de energía.

Conservación de la energía

Para conocer el significado físico de h, consideremos un sistema de N partículas con const. holonómicas, además de fuerzas conservativas.

Para este sistema la **energía cinética** es,

$$T = \frac{1}{2}\sum_k m_k \dot{\mathbf{r}}_k^2 \ \ \forall \ \ k = 1, 2, \ldots, N \ \ \& \ \ \mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k(q_1, q_2, \ldots, q_n).$$

Como las const. son holonómicas y no-dependientes del tiempo,

$$\dot{\mathbf{r}}_k = \sum_i \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i}\dot{q}_i,$$

sustituyendo lo anterior en la **energía cinética**,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\sum_k m_k \sum_{ij}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i}\dot{q}_i\right)\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j}\dot{q}_j\right) \\ \Rightarrow \quad T &= \sum_{ij}\left(\frac{1}{2}\sum_k m_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j}\right)\dot{q}_i\dot{q}_j = \sum_{ij} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j. \end{aligned}$$

La energía cinética, por tanto, es una **función cuadrática homogénea** de las vel. generalizadas, con **coeficientes de masa** simétricos [11]

$$a_{ij} = \frac{1}{2}\sum_k m_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j}.$$

Por otro lado, del **teorema de Euler de funciones homogéneas** se establece que si f es una función homogénea de rango $n \Rightarrow$

$$\begin{aligned} f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_k) &= \lambda^n f(x_1, x_2, \ldots, x_k) \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} &= nf. \end{aligned}$$

Entonces, aplicando el teorema de Euler a la energía cinética (n=2),

$$T = \sum_{ij} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j \quad \Rightarrow \quad \sum \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = 2T.$$

[11] $a_{ij} = a_{ji}$.

Como se ha considerado que las fuerzas son **conservativas** [12] $\Rightarrow$

$$L = T - U \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial (T - U)}{\partial \dot{q}_i} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i},$$

Por tanto, sustituyendo en h,

$$\begin{aligned} h &= \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \\ &= \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - L \\ &= 2T - (T - U) \\ \Rightarrow \quad h &= T + U = E. \end{aligned}$$

entonces, la función de energía es, de hecho, la **energía total** del sistema.

[12] el potencial es función de las coord. solamente: $U = U(q_1, q_2, \ldots, q_n)$.

Contenido: Tema 04

Ecuaciones canónicas de Hamilton

Principios fundamentales

El **método Hamiltoniano** no es superior ni aporta información adicional al sistema bajo estudio respecto al formalismo Lagrangiano, sin embargo tiene sus ventajas

Formalismo Lagrangiano

- n grados de libertad: q_i's
- n ecuaciones de movimiento de **segundo orden**: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$
- $\therefore$ se necesitan de $2n$ cond. iniciales para determinar el movimiento del sistema.
- el estado del sist. se representa como un punto en un **espacio de configuración** n-dimensional.

Formalismo Hamiltoniano

- $2n$ grados de libertad: q_i's y p_i's
- $2n$ ecuaciones de movimiento de **primer orden**
- $\therefore$ se necesitan de $2n$ cond. iniciales para determinar el movimiento del sistema.
- el estado del sist. se representa como un punto en un **espacio fase** $2n$-dimensional.

Ecuaciones canónicas de Hamilton

Transformación de Legrende

En el formalismo Hamiltoniano las $2n$ variables correspondientes son:

- Coordenadas generalizadas: $q_i \ \forall \ i = 1, 2, \ldots, n$
- Momentos conjugados: $p_i = \partial L(q_j, \dot{q}_j)/\partial \dot{q}_i \ \forall \ i = 1, 2, \ldots, n$

donde el set (q, p) se le conoce como **variables canónicas**.

La transición del formalismo Lagrangiano $(q, \dot{q}, t)$ al Hamiltoniano (q, p, t) se realiza mediante

Transformaciones de Legrende

Consideremos una función de dos variables $f(x, y)$, tal que su diferencial total sea

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = u dx + v dy,$$

Ahora, cambiando la base (x, y) a (u, y) tal que ahora una nueva función dg se exprese en términos de du y dy, por tanto definimos,

$$g = f - ux, \quad \Rightarrow \quad dg = df - udx - xdu, \quad \Rightarrow \quad dg = vdy - xdu.$$

Comparando el resultado anterior de dg con la diferencial total,

$$dg = vdy - xdu = \frac{\partial g}{\partial y}dy + \frac{\partial g}{\partial u}du, \quad \therefore \quad v = \frac{\partial g}{\partial y}, \quad x = -\frac{\partial g}{\partial u}.$$

Aplicando ahora la **transformación de Legrende** a $L(q, \dot{q}, t)$ tal que nos arroje $H(q, p, t)$,

$$\begin{aligned} dL &= \frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t}dt, \quad \text{pero} \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \;\Rightarrow\; \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \\ \therefore \quad dL &= \dot{p}_i dq_i + p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t}dt. \end{aligned}$$ [13]

Construyendo $H(q, p, t)$ en función de $L(q, \dot{q}, t)$:

$$H(q, p, t) = \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t),$$

[13] sust. p_i en $d/dt(\partial L/\partial \dot{q}_i) - \partial L/\partial q_i = 0$.

Ecuaciones canónicas de Hamilton

Ecuaciones de Hamilton

obteniendo la diferencial total de $H(q,p,t)$ definido anteriormente,

$$
\begin{aligned}
H(q,p,t) &= \dot{q}_i p_i - L(q,\dot{q},t) \\
\Rightarrow \quad dH &= \dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i - dL \\
&= \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\
\text{pero,} \quad dH &= \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt
\end{aligned}
$$

Relacionando términos de las expresiones anteriores, obtenemos $2n$ relaciones conocidas como las **ecuaciones canónicas de Hamilton**,

$$
\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t},
$$

las cuales constituyen el set de $2n$ ecuaciones de movimiento de **primer orden** que reemplazan las n ecs. de segundo orden (provenientes del formalismo Lagrangiano).

Ecuaciones canónicas de Hamilton

Coordenadas cíclicas en el Hamiltoniano

Recordemos que en el caso de la formulación Lagrangiana se consideraba a una coordenada q_j **cíclica** si no aparecía explícitamente en L, por tanto,

$$\text{de:} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \text{cte.}$$

$$\text{pero} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = p_j \quad \& \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial H}{\partial q_j} = 0,$$

$\therefore$ una coordenada **cíclica** también estará ausente en el Hamiltoniano y el **momento conjugado** será una **cantidad conservada**.

Ahora, para el caso de la dependencia temporal, recordemos que del Hamiltoniano llegabamos a lo siguente,

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Ecuaciones canónicas de Hamilton

Conservación de la energía

Analizando la diferencial total $dH(p,q,t)$,

$$\begin{aligned} dH &= \frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial H}{\partial t}dt \\ \Rightarrow \quad \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial t} = \dot{q}_i\dot{p}_i - \dot{p}_i\dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial t} \\ \therefore \quad \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \end{aligned}$$

Entonces, observamos que,

- si $L \neq L(t)$, $\Rightarrow H \neq H(t) \therefore H$ es una **cte. de movimiento**.
- si el potencial es conservativo $(U = U\{q_i\}) \Rightarrow H = T + V$.

IMP: las cond. anteriores no son mutuamente necesarias y suficientes!!

- Un sistema puede tener $H =$cte. pero $H \neq T + V$, o ...
- ... puede ser que $H = T + V$, pero $H = H(t)$, $\Rightarrow H \neq$ cte.

Ecuaciones canónicas de Hamilton

Principio de Hamilton modificado

En cálculo de variaciones se estudió el **principio de Hamilton** en el espacio de configuraciones,

$$\delta I \equiv \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)dt = 0 \;\; \forall \;\; \delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0.$$

Ahora, se desea expresar lo anterior en términos del **Hamiltoniano**,

$$H = p_i \dot{q}_i - L(q,\dot{q},t), \quad \Rightarrow \quad L(q,\dot{q},t) = p_i \dot{q}_i - H(p,q,t)$$

entonces obtenemos el **principio de Hamilton modificado** en el espacio fase,

$$\delta I \equiv \delta \int_{t_1}^{t_2} \left[p_i \dot{q}_i - H(p,q,t) \right] dt = 0.$$

Imponiendo que la acción I sea estacionaria bajo variaciones independientes de q y p y fijo en los extremos,

$$p_i \;\rightarrow\; p_i + \epsilon_1 \eta_i(t), \quad \ni \;\; \delta p_i(t_1) = \delta p_i(t_2) = 0,$$
$$q_i \;\rightarrow\; q_i + \epsilon_2 \xi_i(t), \quad \ni \;\; \delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0.$$

Ecuaciones canónicas de Hamilton

Principio de Hamilton modificado

Calculando la variación en el principio de Hamilton modificado,

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[p_i\delta\dot{q}_i + \dot{q}_i\delta p_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i \right] dt = 0$$

analizando el primer término,

$$p_i\delta\dot{q}_i = p_i\frac{d}{dt}(\delta q_i) = \frac{d}{dt}(p_i\delta q_i) - \dot{p}_i\delta q_i,$$

sustituyendo,

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{d}{dt}(p_i\delta q_i) - \dot{p}_i\delta q_i + \dot{q}_i\delta p_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i \right] dt &= 0, \\ \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} d\left[p_i\delta q_i\right] + \int_{t_1}^{t_2} \left[-\dot{p}_i\delta q_i + \dot{q}_i\delta p_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i \right] dt &= 0, \end{aligned}$$

integrando el primer término,

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} d\left[p_i\delta q_i\right] = p_i\delta q_i\Big|_{t_1}^{t_2} = p_i(t_2)\delta q_i(t_2) - p_i(t_1)\delta q_i(t_1) = 0.$$

Ecuaciones canónicas de Hamilton

Principio de Hamilton modificado

Entonces sólo nos queda el segundo término,

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[-\dot{p}_i\delta q_i+\dot{q}_i\delta p_i-\frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i-\frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i\right]dt=0,$$

agrupando,

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\left(\dot{q}_i-\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\delta p_i-\left(\dot{p}_i+\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)\delta q_i\right]dt=0,$$

como tenemos que las q_i'a y p_i's son coordenadas **independientes**, entonces δq_i'a y δp_i's también lo son, por tanto,

$$\dot{q}_i-\frac{\partial H}{\partial p_i}=0, \quad \& \quad \dot{p}_i+\frac{\partial H}{\partial q_i}=0,$$

las cuales representan a las **ecuaciones de Hamilton**,

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \& \quad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$