Contenido

Contenido: Tema 04

Contenido: Tema 04

En el caso más general, tenemos un sistema que consta de:

N partículas, $n = 3N$ grados de libertad, k const. holonómicas.[1]

Coordenadas generalizadas

conjunto de coordenadas **independientes** que especifican completamente la configuración del sistema: $\{q_1, q_2, \ldots, q_{n-k}\}$.

El sistema de coordenadas **original** (cartesiano, por ejemplo) puede ser expresado en términos de las coordenadas **generalizadas**:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_1(q_1, q_2, \ldots, q_{n-k}, t), \\
x_2 &= x_2(q_1, q_2, \ldots, q_{n-k}, t), \\
&\vdots \\
x_n &= x_n(q_1, q_2, \ldots, q_{n-k}, t).
\end{aligned}
$$

[1] del tipo $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, t) = 0$.

Suponiendo que todas las **coordenadas generalizadas** y el tiempo cambian ligeramente[2] por las cantidades $\{dq_i\}$ y dt, entonces el cambio inducido en x_1, por ejemplo, será:

$$dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial x_1}{\partial q_2}dq_2 + \ldots + \frac{\partial x_1}{\partial q_{n-k}}dq_{n-k} + \frac{\partial x_1}{\partial t}dt,$$

con lo cual se tiene que el **desplazamiento general** para la coordenada $x_i = x_i\{q_\alpha, t\}$ esta dado por,

$$dx_i = \sum_{\alpha=1}^{n-k} \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}dq_\alpha + \frac{\partial x_i}{\partial t}dt \quad \forall \quad i = 1, \ldots, n$$

así como la **velocidad** $\dot{x}_i = \dot{x}_i\{q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t\}$:

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{n-k} \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}\frac{dq_\alpha}{dt} + \frac{\partial x_i}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{n-k} \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \frac{\partial x_i}{\partial t}.$$

[2] Por ejemplo, representar el cambio dinámico en la configuración del sistema cuando t se incrementa a $t + dt$.

Principio de Hamilton

El movimiento de un sistema desde el tiempo t_1 hasta el tiempo t_2 es tal que la integral de línea, llamada **acción** o **integral de acción**,

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad \forall \quad L = T - V,$$

tiene un valor **estacionario** para la trayectoria actual del movimiento.

Sistemas monogénicos

sistemas mecánicos para los cuales todas las fuerzas (excepto las de constricción) son derivables de **potenciales escalares** generalizados que pueden ser función de las coordenadas, velocidades y/o el tiempo.[3]

[3] Cuando el potencial sólo depende de las coordenadas, entonces se dice que el sistema es **conservativo**.

Principio de Hamilton y ecuaciones de Lagrange

Principio de Hamilton

El **principio de Hamilton** se puede expresar, por tanto, como la **variación** de la **acción** I:

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt$$

tal que cuando se tenga la trayectoria actual del movimiento arroje un valor **estacionario**:

$$\delta I = 0 \quad \forall \quad L(q_i, \dot{q}_i, t) \quad \Leftarrow \quad \text{trayectoria del movimiento.}$$

Se observa que el planteamiento del **principio de Hamilton** es similar al problema fundamental del **cálculo de variaciones**, para el caso de un funcional $f = f(y_i, y_i', x)$ en donde se requiere encontrar el extremal de J,

$$\delta J = \delta \int_1^2 f(y_i, y_i', x) dx \;\; \forall \;\; i = 1, \ldots, n.$$

Del **cálculo de variaciones** se obtuvo la **ecuación de Euler**:

$$J = \int_1^2 f(y_i, y_i', x)dx \quad \Rightarrow \quad \partial J = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i'}\right) = 0.$$

Haciendo el símil con el **principio de Hamilton**,

$$I = \int_1^2 L(q_i, \dot{q}_i, t)dt,$$

junto con las siguientes transformaciones:

$$x \;\rightarrow\; t, \;\; y_i \;\rightarrow\; q_i, \;\; y_i' \;\rightarrow\; \dot{q}_i, \;\; f(y_i, \dot{y}_i, x) \;\rightarrow\; L(q_i, \dot{q}_i, t),$$

se obtienen las ecuaciones de movimiento de **Lagrange** correspondientes a la acción I:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \;\; \forall \;\; i = 1, 2, \ldots, n-k,$$

en donde se asume que las q_i's son **independientes**, por tanto el problema requiere que las k constricciones sean **holonómicas**.

Contenido: Tema 04

Al contar con un sistema que posee constricciones **semi-holonómicas** tipo

$$f_k(q_1, q_2, \ldots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n) = 0, \quad \forall \quad k = 1, 2, \ldots, m$$ [4]

ya no es posible aplicar de manera estándar el principio de Hamilton para obtener las ecuaciones de movimiento de Lagrange, debido a que las q_i's ya no son **independientes**.

El procedimiento para eliminar tal inconveniente y poder aplicar Lagrange es **desacoplar** las fuerzas de constricción del lagrangiano de manera explícita mediante el método de los **multiplicadores de Lagrange**:

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k f_k = 0,$$ [5]

[4] Restricción holonómica: $f(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) = 0$.

[5] los multiplicadores de Lagrange λ_k son funciones indeterminadas.

Multiplicadores de Lagrange, fuerzas generalizadas

Extensión del principio de Hamilton a sistemas semi-holonómicos

Para sistemas **semi-holonómicos** el principio de Hamilton se mantiene

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0,$$

$$\Rightarrow \quad \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt = 0,$$

Sin embargo, anular término a término cada elemento de la sumatoria ya **no** es posible, debido a que las q_j **no** son **independientes** porque aún están mezcladas mediante las k constricciones.

Para desacoplar las q_j se hace uso de los **multiplicadores de Lagrange**,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(L + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k f_k \right) dt = 0.$$

Multiplicadores de Lagrange, fuerzas generalizadas

Extensión del principio de Hamilton a sistemas semi-holonómicos

De esta manera, ya es posible aplicar la variación por separado,

$$\delta q_j \;\; \forall \;\; j = 1, 2, \ldots, n \qquad \delta\lambda_k \;\; \forall \;\; k = 1, 2, \ldots, m,$$

teniendo así $n + m$ variables por determinar.

Considerando $\lambda_k = \lambda_k(t)$, entonces, las n ecuaciones para δq_j son,[6]

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j \;\; \forall \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\text{con: } Q_j = \sum_{k=1}^{m} \left\{ \lambda_k \left[\frac{\partial f_k}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f_k}{\partial \dot{q}_j}\right) \right] - \frac{d\lambda_k}{dt}\frac{\partial f_k}{\partial \dot{q}_j} \right\},$$

mientras que $\delta\lambda_k$ da las m ecuaciones de **constricción**,

$$f_k(q_1, q_2, \ldots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n) = 0 \quad \forall \;\; k = 1, 2, \ldots, m,$$

y en donde Q_j son las **fuerzas generalizadas** del sistema.

[6] J. Ray, *Amer. J. Phys.* **34**, 406 (1966).

Multiplicadores de Lagrange, fuerzas generalizadas

Extensión del principio de Hamilton a sistemas semi-holonómicos: Ejemplo

Considerando una partícula cuyo Lagrangiano es,

$$L = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \right) - V(x, y, z)$$

sujeto a la constricción:

$$f(\dot{x}, \dot{y}, y) = \dot{x}\dot{y} + ky = 0 \quad \forall \quad k = \text{cte.}$$

Las ecuaciones de movimiento se obtendrán aplicando las ecuaciones de Lagrange, incluyendo los **multiplicadores de Lagrange**:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = Q_q \quad \forall \quad q = x, y, z,$$

con: $Q_q = \lambda \left[\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}}\right)\right] - \frac{d\lambda}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{q}}.$

Aplicando las ecuaciones anteriores, se llegan a las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + \lambda\ddot{y} + \dot{\lambda}\dot{y} + \frac{\partial V}{\partial x} &= 0, \\ m\ddot{y} + \lambda\ddot{x} - k\lambda + \dot{\lambda}\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y} &= 0, \\ m\ddot{z} + \frac{\partial V}{\partial z} &= 0, \end{aligned}$$

sujeto a la constricción:

$$\dot{x}\dot{y} + ky = 0.$$

Lo anterior representa un sistema de **4** ecuaciones diferenciales, que constan de **4** variables independientes:

- 3 coordenadas generalizadas (x, y, z),
- 1 multiplicador de Lagrange (λ), el cual está relacionado con la condición de constricción.

Multiplicadores de Lagrange, fuerzas generalizadas

Sistemas con constricciones holonómicas

Recordando la expresión para las **fuerzas generalizadas**,

$$Q_j = \sum_{k=1}^{m} \left\{ \lambda_k \left[\frac{\partial f_k}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f_k}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] - \frac{d\lambda_k}{dt}\frac{\partial f_k}{\partial \dot{q}_j} \right\},$$

se observa que puede ser reducida para sistemas con **constricciones holónomicas** del tipo $f_k(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) = 0$,

$$Q_j = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial q_j} \quad \forall \quad k = \text{núm. de constricciones.}$$

Las razones para aplicar tal formalismo [7] con const. holonómicas son:
(1): No es deseable reducir todas las q's a coordenadas independientes,
(2): Se desea obtener las **fuerzas de constricción**.

[7] Descripción explícita de las relaciones de constricción en el problema.

Momento generalizado

Considerando un sistema holonómico (y conservativo), el cual tiene $n - m$ coordenadas q_i independientes,[8] y por tanto el mismo número de ecuaciones de Lagrange dadas por,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \;\; \forall \;\; i = 1, 2, \ldots, n - m.$$

Al tener un sistema **conservativo**, entonces $V = V(q_1, q_2, \ldots, q_{n-m})$, por lo tanto, las ec. de Lagrange se pueden expresar como,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0 \;\; \forall \;\; T = T(\dot{q}_i).$$

Expandiendo el primer término,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \sum_{j=1}^{n-m} \frac{1}{2} m \dot{q}_j^2 = m \dot{q}_i = p_i.$$

[8] Donde m es el número de constricciones.

De lo anterior se puede definir una cantidad conocida como el **momento generalizado** o **momento canónico**,

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}.$$

En general, el Lagrangiano L depende de las q_i's y $\dot{q}_i$'s:

$$L = L(q_1, q_2, \ldots, q_{n-m}; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_{n-m}; t),$$

pero si L no contiene explícitamente alguna coordenada q_i,[9] se dice que q_i es una **coordenada cíclica**, y entonces de la ec. de Lagrange,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{dp_i}{dt} = \dot{p}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad p_i = \text{cte.}$$

[9] Aunque si puede contener la correspondiente $\dot{q}_i$.

Del resultado anterior se puede llegar al siguiente:

Teorema de conservación

El momento generalizado p_i correspondiente a una coordenada **cíclica** es una **constante de movimiento**, es decir, se conserva.

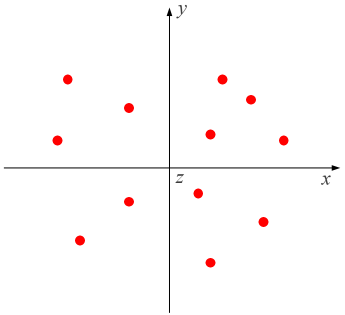
Se observa que existe una relación entre la **simetría** del problema y las cantidades que se **conservan**, la cual se da mediante las **coordenadas cíclicas**.

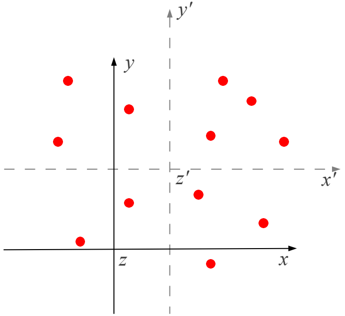
Si el sistema es invariante bajo la **transformación** continua de alguna coord. generalizada q_i, entonces T y V **no variarán** ante los cambios de q_i, por tanto,

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_i = \text{cte.}$$

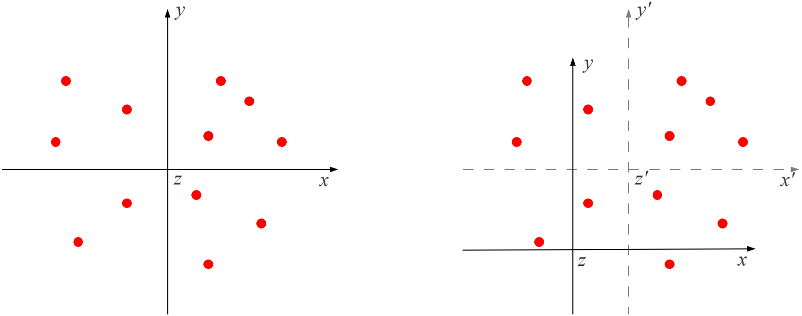
Invariante ante operaciones de transformación continua (simetrías) $\Longleftrightarrow$ Cantidades que se conservan: momentos generalizados relacionados con tal transformación

Traslación en un potencial constante $U \neq U(x, y)$





Traslación en un potencial constante $U \neq U(x, y)$

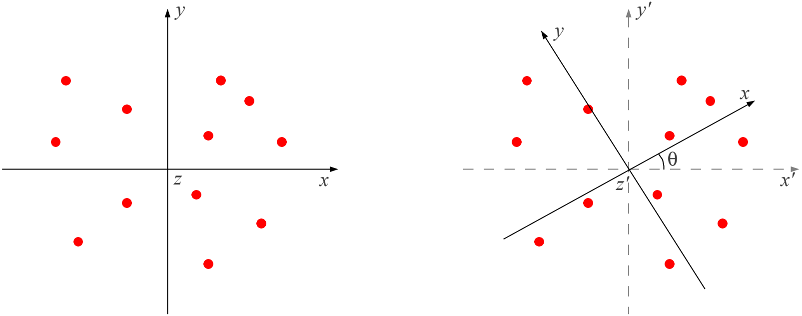


En este caso al tener $U \neq U(x, y)$, el problema es **invariante** ante la operación de **traslación** en el plano x-y:

$$x \to x + \alpha, \quad y \to y + \beta,$$

por lo que las comp. de p_x y p_y serán **constantes de movimiento**.

Rotación en un potencial constante $U \neq U(x, y)$

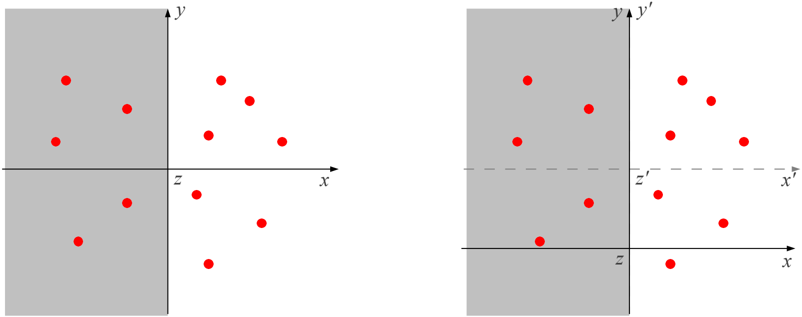


El sistema también será **invariante** ante la operación de **rotación** respecto al eje z:

$$\hat{\mathbf{x}} \rightarrow \text{Cos}\,\theta\hat{\mathbf{x}}' + \text{Sen}\,\theta\hat{\mathbf{y}}', \quad \hat{\mathbf{y}} \rightarrow -\text{Sen}\,\theta\hat{\mathbf{x}}' + \text{Cos}\,\theta\hat{\mathbf{y}}',$$

por lo que la comp. L_z será también una **cte. de movimiento**.

Potencial constante $U = U_1 \; \forall \; x \leq 0$ & $U = U_2 \; \forall \; x > 0$



En este caso como el potencial **no** es el mismo en todo el espacio, entonces el problema es **invariante** solamente ante la operación de **traslación** en y:

$$y \rightarrow y + \beta,$$

y por tanto solo p_y será **cte. de movimiento**.

Considerando un lagrangiano general, el cual puede ser función de las coord. q_i, las velocidades $\dot{q}_i$ y posiblemente el tiempo t, entonces la derivada total de L con respecto a t es:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d\dot{q}_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d\dot{q}_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t},$$

pero de las ecs. de Lagrange se tiene,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

por tanto, sustituyendo en dL/dt,

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d\dot{q}_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} = \sum_i \frac{d}{dt}\left(\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial L}{\partial t}.$$

Reacomodando términos del resultado anterior,

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt}\left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial L}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L\right) + \frac{\partial L}{\partial t} = 0.$$

La cantidad en paréntesis se le conoce como **función de energía**[10]:

$$h(q_1, q_2, \ldots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n; t) = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L,$$

por tanto se tiene:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Si el lagrangiano **no** depende explícitamente del tiempo, entonces $dh/dt = 0$. Por tanto, se dice que h se **conserva**, o que se trata de una **constante de movimiento**.

[10] Ya que h tiene unidades de energía.

Teoremas de conservación y propiedades de simetría

Conservación de la energía

Para conocer el significado físico de h, se considera un sistema de N partículas con const. holonómicas, además de fuerzas conservativas.

Para este sistema la **energía cinética** es,

$$T = \frac{1}{2}\sum_k m_k \dot{\mathbf{r}}_k^2 \;\; \forall \;\; k = 1, 2, \ldots, N \;\; \& \;\; \mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k(q_1, q_2, \ldots, q_n).$$

Como las const. son holonómicas y no-dependientes del tiempo,

$$\dot{\mathbf{r}}_k = \sum_i \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i}\dot{q}_i,$$

por tanto, sustituyendo lo anterior en la **energía cinética**,

$$T = \frac{1}{2}\sum_k m_k \sum_{ij}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i}\dot{q}_i\right)\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j}\dot{q}_j\right),$$

$$\Rightarrow \quad T = \sum_{ij}\left(\frac{1}{2}\sum_k m_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j}\right)\dot{q}_i\dot{q}_j = \sum_{ij} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j.$$

La energía cinética, por tanto, es una **función cuadrática homogénea** de las vel. generalizadas, con **coeficientes de masa** simétricos[11]

$$a_{ij} = \frac{1}{2}\sum_k m_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j}.$$

Por otro lado, del **teorema de Euler de funciones homogéneas** se establece que si f es una función homogénea de rango $n \Rightarrow$

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_k) = \lambda^n f(x_1, x_2, \ldots, x_k),$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{k} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = nf.$$

Entonces, aplicando el teorema de Euler a la energía cinética ($n = 2$),

$$T = \sum_{ij} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j \quad \Rightarrow \quad \sum \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = 2T.$$

[11] $a_{ij} = a_{ji}$.

Como se ha considerado que las fuerzas son **conservativas**,[12]

$$L = T - U \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{q}_i} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i},$$

por tanto, sustituyendo en h,

$$\begin{aligned} h &= \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L, \\ &= \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - L, \\ &= 2T - (T-U), \\ \Rightarrow \quad h &= T + U = E, \end{aligned}$$

es decir, la función de energía es, de hecho, la **energía total** del sistema.

[12] El potencial es función de las coord. solamente: $U = U(q_1, q_2, \ldots, q_n)$.

Contenido: Tema 04

Ecuaciones canónicas de Hamilton

Principios fundamentales

El método **Hamiltoniano** no es superior ni aporta información adicional al sistema bajo estudio respecto al formalismo **Lagrangiano**, sin embargo tiene sus ventajas.

Formalismo Lagrangiano

- n grados de libertad: q_i's.
- n ecuaciones de movimiento de **segundo orden**: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$.
- $\therefore$ se necesitan de $2n$ cond. iniciales para determinar el movimiento del sistema.
- El estado del sistema se representa como un punto en un **espacio de configuración** n-dimensional.

Formalismo Hamiltoniano

- $2n$ grados de libertad: q_i's y p_i's.
- $2n$ ecuaciones de movimiento de **primer orden**.
- $\therefore$ se necesitan de $2n$ cond. iniciales para determinar el movimiento del sistema.
- El estado del sistema se representa como un punto en un **espacio fase** $2n$-dimensional.

Ecuaciones canónicas de Hamilton

Transformación de Legrende

En el formalismo Hamiltoniano las $2n$ variables correspondientes son:

- **Coordenadas generalizadas**: $q_i \ \forall \ i = 1, 2, \ldots, n$
- **Momentos conjugados**: $p_i = \partial L(q_j, \dot{q}_j)/\partial \dot{q}_i \ \forall \ i = 1, 2, \ldots, n$

donde el set (q, p) se le conoce como **variables canónicas**.

La transición del formalismo Lagrangiano $(q, \dot{q}, t)$ al Hamiltoniano (q, p, t) se realiza mediante:

Transformaciones de Legrende

Se considera una función de dos variables $f(x, y)$, tal que su diferencial total sea,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = u dx + v dy,$$

Si se desea cambiar la base (x, y) a (u, y), tal que ahora una nueva función dg se exprese en términos de du y dy, entonces se puede definir:

$$g = f - ux \quad \Rightarrow \quad dg = df - u dx - x du, \quad \Rightarrow \quad dg = v dy - x du.$$

Comparando el resultado anterior de dg con la diferencial total,

$$dg = vdy - xdu = \frac{\partial g}{\partial y}dy + \frac{\partial g}{\partial u}du \quad \therefore \quad v = \frac{\partial g}{\partial y}, \quad x = -\frac{\partial g}{\partial u}.$$

Aplicando ahora la **transformación de Legrende** a $L(q, \dot{q}, t)$ tal que arroje $H(q, p, t)$,

$$dL = \frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t}dt, \quad \text{pero:} \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ \Rightarrow \ \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \text{[13]}$$

$$\therefore \quad dL = \dot{p}_i dq_i + p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t}dt.$$

Construyendo $H(q, p, t)$ en función de $L(q, \dot{q}, t)$:

$$H(q, p, t) = \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t),$$

[13] Sust. p_i en $d/dt(\partial L/\partial \dot{q}_i) - \partial L/\partial q_i = 0$.

Ecuaciones canónicas de Hamilton

Ecuaciones de Hamilton

obteniendo la diferencial total de $H(q,p,t)$ definido anteriormente,

$$\begin{aligned} H(q,p,t) &= \dot{q}_i p_i - L(q,\dot{q},t), \\ \Rightarrow \quad dH &= \dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i - dL, \\ &= \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt, \\ \text{pero} \quad dH &= \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt. \end{aligned}$$

Relacionando términos de las expresiones anteriores, se obtienen $2n$ relaciones conocidas como las **ecuaciones canónicas de Hamilton**,

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t},$$

las cuales constituyen el set de $2n$ ecuaciones de movimiento de **primer orden** que reemplazan las n ecs. de segundo orden (provenientes del formalismo Lagrangiano).

Ecuaciones canónicas de Hamilton

Coordenadas cíclicas en el Hamiltoniano

Recordando que en el caso de la formulación Lagrangiana se consideraba a una coordenada q_j **cíclica** si no aparecía explícitamente en L, por tanto,

$$\text{de:} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \text{cte.}$$

$$\text{pero} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = p_j \;\; \& \;\; \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial H}{\partial q_j} = 0,$$

$\therefore$ una coordenada **cíclica** también estará ausente en el Hamiltoniano y el **momento conjugado** será una **cantidad conservada**.

Ahora, para el caso de la **dependencia temporal**, se tenía que del Hamiltoniano se podá obtener la siguiente relación,

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Ecuaciones canónicas de Hamilton

Conservación de la energía

Analizando la diferencial total $dH(p,q,t)$,

$$\begin{aligned} dH &= \frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial H}{\partial t}dt, \\ \Rightarrow \quad \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial t} = \dot{q}_i\dot{p}_i - \dot{p}_i\dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial t}, \\ \therefore \quad \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \end{aligned}$$

Entonces, se observa que,

- si $L \neq L(t)$, $\Rightarrow H \neq H(t) \therefore H$ es una **cte. de movimiento**.
- si el potencial es **conservativo** $(U = U\{q_i\}) \Rightarrow H = T + V$.

IMP: las cond. anteriores no son mutuamente necesarias y suficientes!!

- Un sistema puede tener $H =$cte. pero $H \neq T + V$, o ...
- ... puede ser que $H = T + V$, pero $H = H(t)$, $\Rightarrow H \neq$ cte.

Ecuaciones canónicas de Hamilton

Principio de Hamilton modificado

En cálculo de variaciones se estudió el **principio de Hamilton** en el espacio de configuraciones,

$$\delta I \equiv \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0 \ \ \forall \ \ \delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0.$$

Ahora, se desea expresar lo anterior en términos del **Hamiltoniano**,

$$H = p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t), \ \ \Rightarrow \ \ L(q, \dot{q}, t) = p_i \dot{q}_i - H(p, q, t),$$

con lo cual se obtiene el **principio de Hamilton modificado** en el espacio fase,

$$\delta I \equiv \delta \int_{t_1}^{t_2} \left[p_i \dot{q}_i - H(p, q, t) \right] dt = 0,$$

imponiendo que la acción I sea estacionaria bajo variaciones independientes de q y p y fijo en los extremos:

$$\begin{aligned} p_i \ &\rightarrow \ p_i + \epsilon_1 \eta_i(t) \quad && \ni \ \ \delta p_i(t_1) = \delta p_i(t_2) = 0, \\ q_i \ &\rightarrow \ q_i + \epsilon_2 \xi_i(t), \quad && \ni \ \ \delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0. \end{aligned}$$

Ecuaciones canónicas de Hamilton

Principio de Hamilton modificado

Calculando la variación en el principio de Hamilton modificado,

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[p_i \delta \dot{q}_i + \dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i \right] dt = 0,$$

analizando el primer término,

$$p_i \delta \dot{q}_i = p_i \frac{d}{dt}(\delta q_i) = \frac{d}{dt}(p_i \delta q_i) - \dot{p}_i \delta q_i,$$

sustituyendo,

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{d}{dt}(p_i \delta q_i) - \dot{p}_i \delta q_i + \dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i \right] dt = 0,$$

$$\Rightarrow \quad \int_{t_1}^{t_2} d\left[p_i \delta q_i\right] + \int_{t_1}^{t_2} \left[-\dot{p}_i \delta q_i + \dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i \right] dt = 0,$$

integrando el primer término,

$$\Rightarrow \quad \int_{t_1}^{t_2} d\left[p_i \delta q_i\right] = p_i \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} = p_i(t_2)\delta q_i(t_2) - p_i(t_1)\delta q_i(t_1) = 0.$$

Ecuaciones canónicas de Hamilton

Principio de Hamilton modificado

Entonces sólo queda el segundo término,

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[-\dot{p}_i \delta q_i + \dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i \right] dt = 0,$$

agrupando,

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i \right] dt = 0,$$

como se tiene que las q_i'a y p_i's son coordenadas **independientes**, entonces δq_i's y δp_i's también lo son, por tanto:

$$\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0 \quad \& \quad \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0,$$

las cuales representan a las **ecuaciones de Hamilton**,

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \& \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$