

4. Dinámica Lagrangiana y Hamiltoniana

Contenido: Tema 04

4. Dinámica Lagrangiana y Hamiltoniana

- 4.1 Coordenadas generalizadas, principio de Hamilton y ecuaciones de Lagrange
- 4.2 Constricciones, multiplicadores de Lagrange, fuerzas generalizadas
- 4.3 Teoremas de conservación y propiedades de simetría
- 4.4 Ecuaciones canónicas de Hamilton

Contenido: Tema 04

4. Dinámica Lagrangiana y Hamiltoniana

- 4.1 Coordenadas generalizadas, principio de Hamilton y ecuaciones de Lagrange
- 4.2 Constricciones, multiplicadores de Lagrange, fuerzas generalizadas
- 4.3 Teoremas de conservación y propiedades de simetría
- 4.4 Ecuaciones canónicas de Hamilton

Principio de Hamilton y ecuaciones de Lagrange

Coordenadas generalizadas

En el caso más general, se tiene un sistema que consta de:

N partículas, $n = 3N$ grados de libertad, k const. holonómicas.¹

Coordenadas generalizadas

Conjunto de coordenadas **independientes** que especifican completamente la configuración del sistema: $\{q_1, q_2, \dots, q_{n-k}\}$.

El sistema de coordenadas **original** (cartesiano, por ejemplo) puede ser expresado en términos de las coordenadas **generalizadas**:

$$x_1 = x_1(q_1, q_2, \dots, q_{n-k}, t),$$

$$x_2 = x_2(q_1, q_2, \dots, q_{n-k}, t),$$

$$\vdots$$

$$x_n = x_n(q_1, q_2, \dots, q_{n-k}, t).$$

¹Del tipo $f(x_1, x_2, x_3, \dots, t) = 0$.

Principio de Hamilton y ecuaciones de Lagrange

Coordenadas generalizadas

Suponiendo que todas las **coordenadas generalizadas** y el tiempo cambian ligeramente² por las cantidades $\{dq_i\}$ y dt , entonces el cambio inducido en x_1 , por ejemplo, será:

$$dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x_1}{\partial q_2} dq_2 + \dots + \frac{\partial x_1}{\partial q_{n-k}} dq_{n-k} + \frac{\partial x_1}{\partial t} dt,$$

con lo cual se tiene que el **desplazamiento general** para la coordenada $x_i = x_i\{q_\alpha, t\}$ esta dado por:

$$dx_i = \sum_{\alpha=1}^{n-k} \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \frac{\partial x_i}{\partial t} dt \quad \forall \quad i = 1, \dots, n$$

así como la **velocidad** $\dot{x}_i = \dot{x}_i\{q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t\}$:

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{n-k} \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} \frac{dq_\alpha}{dt} + \frac{\partial x_i}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{n-k} \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial x_i}{\partial t}.$$

²Por ejemplo, representar el cambio dinámico en la configuración del sistema cuando t se incrementa a $t + dt$.

Principio de Hamilton y ecuaciones de Lagrange

Principio de Hamilton

Principio de Hamilton

El movimiento de un sistema desde el tiempo t_1 hasta el tiempo t_2 es tal que la integral de línea, llamada **acción** o **integral de acción**:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad \forall \quad L = T - V,$$

tiene un valor **estacionario** para la trayectoria actual del movimiento, siendo L la **Lagrangiana** del sistema.

Sistemas monogénicos

Sistemas mecánicos para los cuales todas las fuerzas (excepto las de constricción) son derivables de **potenciales escalares** generalizados que pueden ser función de las coordenadas, velocidades y/o el tiempo.³

³Cuando el potencial sólo depende de las coordenadas, entonces se dice que el sistema es **conservativo**.

Principio de Hamilton y ecuaciones de Lagrange

Principio de Hamilton

El **principio de Hamilton** se puede expresar, por tanto, como la **variación** de la **acción** I :

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt$$

tal que cuando se tenga la trayectoria actual del movimiento arroje un valor **estacionario**:

$$\delta I = 0 \quad \forall \quad L(q_i, \dot{q}_i, t) \quad \Leftarrow \quad \text{trayectoria del movimiento.}$$

Se observa que el planteamiento del **principio de Hamilton** es similar al problema fundamental del **cálculo de variaciones**, para el caso de un funcional $f = f(y_i, y'_i, x)$ en donde se requiere encontrar el extremal de J ,

$$\delta J = \delta \int_1^2 f(y_i, y'_i, x) dx \quad \forall \quad i = 1, \dots, n.$$

Principio de Hamilton y ecuaciones de Lagrange

Ecuaciones de Lagrange

Del **cálculo de variaciones** se obtuvo la **ecuación de Euler**:

$$J = \int_1^2 f(y_i, y'_i, x) dx \Rightarrow \partial J = 0 \iff \frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) = 0.$$

Haciendo el símil con el **principio de Hamilton**,

$$I = \int_1^2 L(q_i, \dot{q}_i, t) dt,$$

junto con las siguientes transformaciones:

$$x \rightarrow t, \quad y_i \rightarrow q_i, \quad y'_i \rightarrow \dot{q}_i, \quad f(y_i, y'_i, x) \rightarrow L(q_i, \dot{q}_i, t),$$

se obtienen las ecuaciones de movimiento de **Lagrange** correspondientes a la acción I :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \forall \quad i = 1, 2, \dots, n - k,$$

en donde se asume que las q_i 's son **independientes**, por tanto el problema requiere que las k constricciones sean **holonómicas**.

Contenido: Tema 04

4. Dinámica Lagrangiana y Hamiltoniana

- 4.1 Coordenadas generalizadas, principio de Hamilton y ecuaciones de Lagrange
- 4.2 Constricciones, multiplicadores de Lagrange, fuerzas generalizadas
- 4.3 Teoremas de conservación y propiedades de simetría
- 4.4 Ecuaciones canónicas de Hamilton

Multiplicadores de Lagrange, fuerzas generalizadas

Extensión del principio de Hamilton a sistemas semi-holonómicos

Al contar con un sistema que posee constricciones **semi-holonómicas** tipo :

$$f_k(q_1, q_2, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) = 0, \quad \forall \quad k = 1, 2, \dots, m^4$$

ya no es posible aplicar de manera estándar el principio de Hamilton para obtener las ecuaciones de movimiento de Lagrange, debido a que las q_i 's ya no son **independientes**.

El procedimiento para eliminar tal inconveniente y poder aplicar Lagrange es **desacoplar** las fuerzas de restricción del lagrangiano de manera explícita mediante el método de los **multiplicadores de Lagrange**:

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k f_k = 0.^5$$

⁴Restricción holonómica: $f(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = 0$.

⁵Los multiplicadores de Lagrange λ_k son funciones indeterminadas.

Multiplicadores de Lagrange, fuerzas generalizadas

Extensión del principio de Hamilton a sistemas semi-holonómicos

Para sistemas **semi-holonómicos** el principio de Hamilton se mantiene:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0,$$
$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt = 0,$$

Sin embargo, anular término a término cada elemento de la sumatoria ya **no** es posible, debido a que las q_j **no** son **independientes** porque aún están mezcladas mediante las k constricciones.

Para desacoplar las q_j 's se hace uso de los **multiplicadores de Lagrange**,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(L + \sum_{k=1}^m \lambda_k f_k \right) dt = 0.$$

Multiplicadores de Lagrange, fuerzas generalizadas

Extensión del principio de Hamilton a sistemas semi-holonómicos

De esta manera, ya es posible aplicar la variación por separado:

$$\delta q_j \quad \forall \quad j = 1, 2, \dots, n \quad \delta \lambda_k \quad \forall \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

teniendo así $n + m$ variables por determinar.

Considerando $\lambda_k = \lambda_k(t)$, entonces, las n ecuaciones para δq_j son,⁶

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j \quad \forall \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\text{con: } Q_j = \sum_{k=1}^m \left\{ \lambda_k \left[\frac{\partial f_k}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_k}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] - \frac{d\lambda_k}{dt} \frac{\partial f_k}{\partial \dot{q}_j} \right\},$$

mientras que $\delta \lambda_k$ da las m ecuaciones de **constricción**:

$$f_k(q_1, q_2, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) = 0 \quad \forall \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

y en donde Q_j son las **fuerzas generalizadas** del sistema.

⁶J. Ray, *Amer. J. Phys.* **34**, 406 (1966).

Multiplicadores de Lagrange, fuerzas generalizadas

Extensión del principio de Hamilton a sistemas semi-holonómicos: Ejemplo

Considerando una partícula cuyo Lagrangiano es,

$$L = \frac{1}{2}m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z)$$

sujeto a la restricción:

$$f(\dot{x}, \dot{y}, y) = \dot{x}\dot{y} + ky = 0 \quad \forall \quad k = \text{cte.}$$

Las ecuaciones de movimiento se obtendrán aplicando las ecuaciones de Lagrange, incluyendo los **multiplicadores de Lagrange**:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = Q_q \quad \forall \quad q = x, y, z,$$

con: $Q_q = \lambda \left[\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}} \right) \right] - \frac{d\lambda}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{q}}.$

Multiplicadores de Lagrange, fuerzas generalizadas

Extensión del principio de Hamilton a sistemas semi-holonómicos: Ejemplo

Aplicando las ecuaciones anteriores, se llegan a las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned}m\ddot{x} + \lambda\ddot{y} + \dot{\lambda}\dot{y} + \frac{\partial V}{\partial x} &= 0, \\m\ddot{y} + \lambda\ddot{x} - k\lambda + \dot{\lambda}\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y} &= 0, \\m\ddot{z} + \frac{\partial V}{\partial z} &= 0,\end{aligned}$$

sujeto a la constricción:

$$\dot{x}\dot{y} + ky = 0.$$

Lo anterior representa un sistema de **4** ecuaciones diferenciales, que constan de **4** variables independientes:

- 3 coordenadas generalizadas (x, y, z),
- 1 multiplicador de Lagrange (λ), el cual está relacionado con la condición de constricción.

Multiplicadores de Lagrange, fuerzas generalizadas

Sistemas con constricciones holonómicas

Recordando la expresión para las **fuerzas generalizadas**,

$$Q_j = \sum_{k=1}^m \left\{ \lambda_k \left[\frac{\partial f_k}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_k}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] - \frac{d\lambda_k}{dt} \frac{\partial f_k}{\partial \dot{q}_j} \right\},$$

se observa que puede ser reducida para sistemas con **constricciones holónomicas** del tipo $f_k(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = 0$,

$$Q_j = \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial q_j} \quad \forall \quad k = \text{núm. de constricciones}.$$

Las razones para aplicar tal formalismo⁷ con const. holonómicas son:

- (1): No es deseable reducir todas las q 's a coordenadas independientes.
- (2): Se desea obtener las **fuerzas de restricción**.

⁷Descripción explícita de las relaciones de restricción en el problema.

Contenido: Tema 04

4. Dinámica Lagrangiana y Hamiltoniana

- 4.1 Coordenadas generalizadas, principio de Hamilton y ecuaciones de Lagrange
- 4.2 Constricciones, multiplicadores de Lagrange, fuerzas generalizadas
- 4.3 Teoremas de conservación y propiedades de simetría
- 4.4 Ecuaciones canónicas de Hamilton

Teoremas de conservación y propiedades de simetría

Momento generalizado

Considerando un sistema holonómico (y conservativo), el cual tiene $n - m$ coordenadas q_i independientes,⁸ y por tanto el mismo número de ecuaciones de Lagrange dadas por,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \forall \quad i = 1, 2, \dots, n - m.$$

Al tener un sistema **conservativo**, entonces $V = V(q_1, q_2, \dots, q_{n-m})$, por lo tanto, las ec. de Lagrange se pueden expresar como,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0 \quad \forall \quad T = T(\dot{q}_i).$$

Expandiendo el primer término,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \sum_{j=1}^{n-m} \frac{1}{2} m \dot{q}_j^2 = m \dot{q}_i = p_i.$$

⁸Donde m es el número de constricciones.

Teoremas de conservación y propiedades de simetría

Momento generalizado y coordenadas cíclicas

De lo anterior se puede definir una cantidad conocida como el **momento generalizado** o **momento canónico**,

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}.$$

En general, el Lagrangiano L depende de las q_i 's y $\dot{q}_i$'s:

$$L = L(q_1, q_2, \dots, q_{n-m}; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_{n-m}; t),$$

pero si L no contiene explícitamente alguna coordenada q_i ,⁹ se dice que q_i es una **coordenada cíclica**, y entonces de la ec. de Lagrange,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0, \Rightarrow \frac{dp_i}{dt} = \dot{p}_i = 0 \Rightarrow p_i = \text{cte.}$$

⁹Aunque si puede contener la correspondiente $\dot{q}_i$.

Teoremas de conservación y propiedades de simetría

Momento generalizado, coordenadas cíclicas y propiedades de simetría

Del resultado anterior se puede llegar al siguiente:

Teorema de conservación

El momento generalizado p_i correspondiente a una coordenada **cíclica** es una **constante de movimiento**, es decir, se conserva.

Se observa que existe una relación entre la **simetría** del problema y las cantidades que se **conservan**, la cual se da mediante las **coordenadas cíclicas**.

Si el sistema es invariante bajo la **transformación** continua de alguna coord. generalizada q_i , entonces T y V **no variarán** ante los cambios de q_i , por tanto,

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_i = \text{cte.}$$

Teoremas de conservación y propiedades de simetría

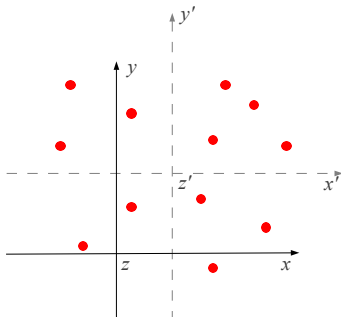
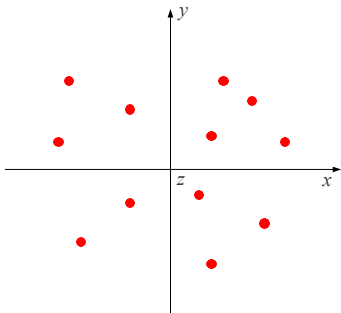
Momento generalizado, coordenadas cíclicas y propiedades de simetría

Invariante ante
operaciones de
transformación
continua (simetrías)



Cantidades que
se conservan:
momentos general-
izados relacionados
con tal transformación

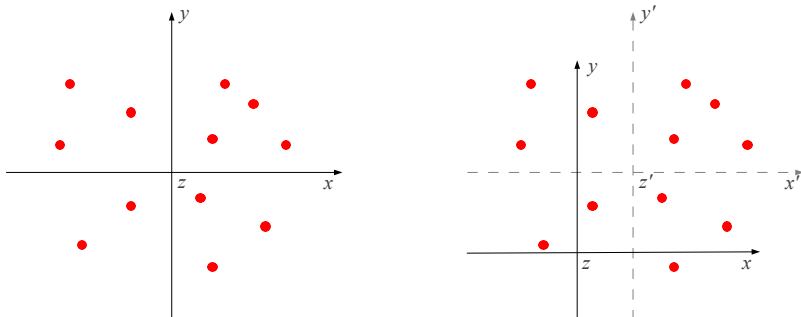
Traslación en un potencial constante $U \neq U(x, y)$



Teoremas de conservación y propiedades de simetría

Momento generalizado, coordenadas cíclicas y propiedades de simetría

Traslación en un potencial constante $U \neq U(x, y)$



En este caso al tener $U \neq U(x, y)$, el problema es **invariante** ante la operación de **traslación** en el plano $x-y$:

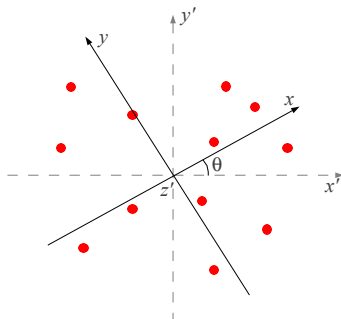
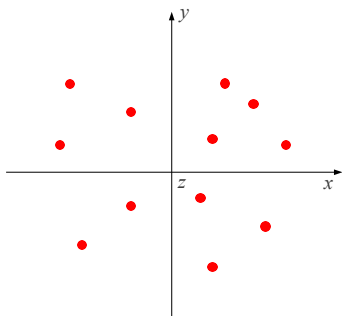
$$x \rightarrow x + \alpha, \quad y \rightarrow y + \beta,$$

por lo que las comp. de p_x y p_y serán **constantes de movimiento**.

Teoremas de conservación y propiedades de simetría

Momento generalizado, coordenadas cíclicas y propiedades de simetría

Rotación en un potencial constante $U \neq U(x, y)$



El sistema también será **invariante** ante la operación de **rotación** respecto al eje z :

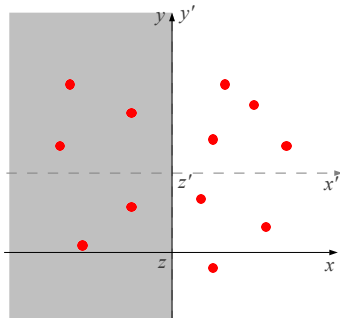
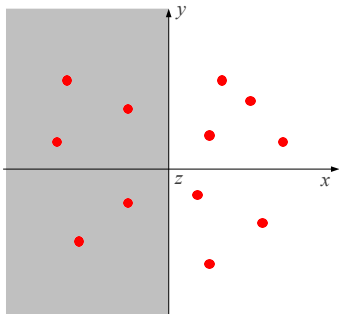
$$\hat{x} \rightarrow \cos \theta \hat{x}' + \sin \theta \hat{y}', \quad \hat{y} \rightarrow -\sin \theta \hat{x}' + \cos \theta \hat{y}',$$

por lo que la comp. L_z será también una **cte. de movimiento**.

Teoremas de conservación y propiedades de simetría

Momento generalizado, coordenadas cíclicas y propiedades de simetría

Potencial constante $U = U_1 \ \forall \ x \leq 0 \ \& \ U = U_2 \ \forall \ x > 0$



En este caso como el potencial **no** es el mismo en todo el espacio, entonces el problema es **invariante** solamente ante la operación de **traslación** en y :

$$y \rightarrow y + \beta,$$

y por tanto solo p_y será **cte. de movimiento**.

Teoremas de conservación y propiedades de simetría

Conservación de la energía

Considerando un lagrangiano general, el cual puede ser función de las coord. q_i , las velocidades $\dot{q}_i$ y posiblemente el tiempo t , entonces la derivada total de L con respecto a t es:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t},$$

pero de las ecs. de Lagrange se tiene,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

por tanto, sustituyendo en dL/dt ,

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} = \sum_i \frac{d}{dt} \left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial L}{\partial t}.$$

Teoremas de conservación y propiedades de simetría

Conservación de la energía

Reacomodando términos del resultado anterior,

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt} \left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) + \frac{\partial L}{\partial t} = 0.$$

La cantidad en paréntesis se le conoce como **función de energía**¹⁰:

$$h(q_1, q_2, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n; t) = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L,$$

por tanto se tiene:

$$\frac{dh}{dt} = - \frac{\partial L}{\partial t}.$$

Si el lagrangiano **no** depende explícitamente del tiempo, entonces $dh/dt = 0$. Por tanto, se dice que h se **conserva**, o que se trata de una **constante de movimiento**.

¹⁰Ya que h tiene unidades de energía.

Teoremas de conservación y propiedades de simetría

Conservación de la energía

Para conocer el significado físico de h , se considera un sistema de N partículas con const. holonómicas, además de fuerzas conservativas.

Para este sistema la **energía cinética** es,

$$T = \frac{1}{2} \sum_k m_k \dot{\mathbf{r}}_k^2 \quad \forall \quad k = 1, 2, \dots, N \quad \& \quad \mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_n).$$

Como las const. son holonómicas y no-dependientes del tiempo,

$$\dot{\mathbf{r}}_k = \sum_i \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \dot{q}_i,$$

por tanto, sustituyendo lo anterior en la **energía cinética**,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_k m_k \sum_{ij} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \dot{q}_j \right), \\ \Rightarrow T &= \sum_{ij} \left(\frac{1}{2} \sum_k m_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j = \sum_{ij} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j. \end{aligned}$$

Teoremas de conservación y propiedades de simetría

Conservación de la energía

La energía cinética, por tanto, es una **función cuadrática homogénea** de las vel. generalizadas, con **coeficientes de masa** simétricos¹¹

$$a_{ij} = \frac{1}{2} \sum_k m_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j}.$$

Por otro lado, del **teorema de Euler de funciones homogéneas** se establece que si f es una función homogénea de rango $n \Rightarrow$

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_k) = \lambda^n f(x_1, x_2, \dots, x_k),$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^k x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = n f.$$

Entonces, aplicando el teorema de Euler a la energía cinética ($n = 2$),

$$T = \sum_{ij} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad \Rightarrow \quad \sum \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2T.$$

¹¹ $a_{ij} = a_{ji}$.

Teoremas de conservación y propiedades de simetría

Conservación de la energía

Como se ha considerado que las fuerzas son **conservativas**,¹²

$$L = T - U \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial(T - U)}{\partial \dot{q}_i} \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i},$$

por tanto, sustituyendo en h ,

$$\begin{aligned} h &= \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L, \\ &= \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - L, \\ &= 2T - (T - U), \\ \Rightarrow \quad h &= T + U = E, \end{aligned}$$

es decir, la función de energía es, de hecho, la **energía total** del sistema.

¹²El potencial es función de las coord. solamente: $U = U(q_1, q_2, \dots, q_n)$.

Contenido: Tema 04

4. Dinámica Lagrangiana y Hamiltoniana

- 4.1 Coordenadas generalizadas, principio de Hamilton y ecuaciones de Lagrange
- 4.2 Constricciones, multiplicadores de Lagrange, fuerzas generalizadas
- 4.3 Teoremas de conservación y propiedades de simetría
- 4.4 Ecuaciones canónicas de Hamilton

Ecuaciones canónicas de Hamilton

Principios fundamentales

El método **Hamiltoniano** no es superior ni aporta información adicional al sistema bajo estudio respecto al formalismo **Lagrangiano**, sin embargo tiene sus ventajas.

Formalismo Lagrangiano

- n grados de libertad: q_i 's.
- n ecuaciones de movimiento de **segundo orden**: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$.
- $\therefore$ se necesitan de $2n$ cond. iniciales para determinar el movimiento del sistema.
- El estado del sistema se representa como un punto en un **espacio de configuración** n -dimensional.

Formalismo Hamiltoniano

- $2n$ grados de libertad: q_i 's y p_i 's.
- $2n$ ecuaciones de movimiento de **primer orden**.
- $\therefore$ se necesitan de $2n$ cond. iniciales para determinar el movimiento del sistema.
- El estado del sistema se representa como un punto en un **espacio fase** $2n$ -dimensional.

Ecuaciones canónicas de Hamilton

Transformación de Legendre

En el formalismo Hamiltoniano las $2n$ variables correspondientes son:

- **Coordenadas generalizadas:** $q_i \forall i = 1, 2, \dots, n$
- **Momentos conjugados:** $p_i = \partial L(q_j, \dot{q}_j) / \partial \dot{q}_i \forall i = 1, 2, \dots, n$

donde el set (q, p) se le conoce como **variables canónicas**.

La transición del formalismo Lagrangiano $(q, \dot{q}, t)$ al Hamiltoniano (q, p, t) se realiza mediante:

Transformaciones de Legendre

Se considera una función de dos variables $f(x, y)$, tal que su diferencial total sea,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = u dx + v dy.$$

Si se desea cambiar la base (x, y) a (u, y) , tal que ahora una nueva función dg se exprese en términos de du y dy , entonces se puede definir:

$$g = f - ux \Rightarrow dg = df - u dx - x du, \Rightarrow dg = v dy - x du.$$

Ecuaciones canónicas de Hamilton

Transformación de Legrende

Comparando el resultado anterior de dg con la diferencial total,

$$dg = vdy - xdu = \frac{\partial g}{\partial y}dy + \frac{\partial g}{\partial u}du \quad \therefore \quad v = \frac{\partial g}{\partial y}, \quad x = -\frac{\partial g}{\partial u}.$$

Aplicando ahora la **transformación de Legrende** a $L(q, \dot{q}, t)$ tal que arroje $H(q, p, t)$,

$$dL = \frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t}dt, \quad \text{pero: } p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Rightarrow \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i},^{13}$$

$$\therefore dL = \dot{p}_i dq_i + p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t}dt.$$

Construyendo $H(q, p, t)$ en función de $L(q, \dot{q}, t)$:

$$H(q, p, t) = \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t),$$

¹³Sust. p_i en $d/dt(\partial L/\partial \dot{q}_i) - \partial L/\partial q_i = 0$.

Ecuaciones canónicas de Hamilton

Ecuaciones de Hamilton

obteniendo la diferencial total de $H(q, p, t)$ definido anteriormente,

$$\begin{aligned} H(q, p, t) &= \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t), \\ \Rightarrow dH &= \dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i - dL, \\ &= \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt, \\ \text{pero } dH &= \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt. \end{aligned}$$

Relacionando términos de las expresiones anteriores, se obtienen $2n$ relaciones conocidas como las **ecuaciones canónicas de Hamilton**,

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t},$$

las cuales constituyen el set de $2n$ ecuaciones de movimiento de **primer orden** que reemplazan las n ecs. de segundo orden (provenientes del formalismo Lagrangiano).

Ecuaciones canónicas de Hamilton

Coordenadas cíclicas en el Hamiltoniano

Recordando que en el caso de la formulación Lagrangiana se consideraba a una coordenada q_j **cíclica** si no aparecía explícitamente en L , por tanto,

$$\text{de: } \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \text{cte.}$$

$$\text{pero } \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = p_j \quad \& \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial q_j} = 0,$$

$\therefore$ una coordenada **cíclica** también estará ausente en el Hamiltoniano y el **momento conjugado** será una **cantidad conservada**.

Ahora, para el caso de la **dependencia temporal**, se tenía que del Hamiltoniano se podía obtener la siguiente relación,

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Ecuaciones canónicas de Hamilton

Conservación de la energía

Analizando la diferencial total $dH(p, q, t)$,

$$\begin{aligned}dH &= \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt, \\ \Rightarrow \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial t} = \dot{q}_i \dot{p}_i - \dot{p}_i \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial t}, \\ \therefore \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.\end{aligned}$$

Entonces, se observa que,

- si $L \neq L(t)$, $\Rightarrow H \neq H(t)$ $\therefore H$ es una **cte. de movimiento**.
- si el potencial es **conservativo** ($U = U\{q_i\}$) $\Rightarrow H = T + U$.

IMP: las cond. anteriores **no** son mutuamente necesarias y suficientes!!

- Un sistema puede tener $H = \text{cte.}$ pero $H \neq T + U$, o ...
- ... puede ser que $H = T + U$, pero $H = H(t) \Rightarrow H \neq \text{cte.}$

Ecuaciones canónicas de Hamilton

Principio de Hamilton modificado

En cálculo de variaciones se estudió el **principio de Hamilton** en el espacio de configuraciones,

$$\delta I \equiv \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0 \quad \forall \quad \delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0.$$

Ahora, se desea expresar lo anterior en términos del **Hamiltoniano**,

$$H = p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t), \quad \Rightarrow \quad L(q, \dot{q}, t) = p_i \dot{q}_i - H(p, q, t),$$

con lo cual se obtiene el **principio de Hamilton modificado** en el espacio fase,

$$\delta I \equiv \delta \int_{t_1}^{t_2} [p_i \dot{q}_i - H(p, q, t)] dt = 0,$$

imponiendo que la acción I sea estacionaria bajo variaciones independientes de q y p y fijo en los extremos:

$$p_i \rightarrow p_i + \epsilon_1 \eta_i(t) \quad \ni \quad \delta p_i(t_1) = \delta p_i(t_2) = 0,$$

$$q_i \rightarrow q_i + \epsilon_2 \xi_i(t), \quad \ni \quad \delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0.$$

Ecuaciones canónicas de Hamilton

Principio de Hamilton modificado

Calculando la variación en el principio de Hamilton modificado,

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[p_i \delta \dot{q}_i + \dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i \right] dt = 0,$$

analizando el primer término,

$$p_i \delta \dot{q}_i = p_i \frac{d}{dt}(\delta q_i) = \frac{d}{dt}(p_i \delta q_i) - \dot{p}_i \delta q_i,$$

sustituyendo,

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{d}{dt}(p_i \delta q_i) - \dot{p}_i \delta q_i + \dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i \right] dt = 0, \\ \Rightarrow & \int_{t_1}^{t_2} d[p_i \delta q_i] + \int_{t_1}^{t_2} \left[-\dot{p}_i \delta q_i + \dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i \right] dt = 0, \end{aligned}$$

integrando el primer término,

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} d[p_i \delta q_i] = p_i \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} = p_i(t_2) \delta q_i(t_2) - p_i(t_1) \delta q_i(t_1) = 0.$$

Ecuaciones canónicas de Hamilton

Principio de Hamilton modificado

Entonces sólo queda el segundo término,

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[-\dot{p}_i \delta q_i + \dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i \right] dt = 0,$$

agrupando,

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i \right] dt = 0,$$

como se tiene que las q_i 'a y p_i 's son coordenadas **independientes**, entonces δq_i 's y δp_i 's también lo son, por tanto:

$$\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0 \quad \& \quad \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0,$$

las cuales representan a las **ecuaciones de Hamilton**,

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \& \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$