ECUACIONES DIFERENCIALES

INGENIERÍA (NIVEL LICENCIATURA)

Curso Básico - Primavera 2017

Omar De la Peña-Seaman

Instituto de Física (IFUAP)
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP)

Curso Ecuaciones Diferenciales

Información General

Período de clases (16 sem.)

9 Enero – 9 Mayo 2017

Horario

Lunes–Viernes: 17–18 hrs

Criterios de evaluación

- Participación en clase: **20%**
- Tareas de cada tema: **20%**
- Exámenes: **60%**

Bibliografía

1. D.G. Zill, W.S. Wright, *Ecuaciones Diferenciales con problemas con valores en la frontera*, 8va edición (CENGAGE Learning 2015).
2. E. Kreyszig, *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería* Vol.1 & 2, 3a edición (Limusa Wiley 2003).
3. W.E. Boyce, R.C. DiPrima, *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*, 4a edición (Limusa Wiley 2000).

Curso Ecuaciones Diferenciales

Información General

Contenido del curso

1. Introducción a las ecs. diferenciales	(1 sem.)
2. Ecs. diferenciales de primer orden	(3 sem.)
3. Ecs. diferenciales de orden superior	(4 sem.)
4. Modelos lineales oscilatorios	(1 & $1/2$ sem.)
5. Transformada de Laplace	(3 sem.)
6. Series de Fourier	(2 sem.)
7. Ecs. diferenciales parciales	(1 & $1/2$ sem.)

Fuente de consulta e información

Las sesiones de clase, tareas y exámenes estarán disponibles *on-line* al término de cada tema en la siguiente dirección:

http://www.ifuap.buap.mx/~oseaman/differential_equations_2017.html

Contenido

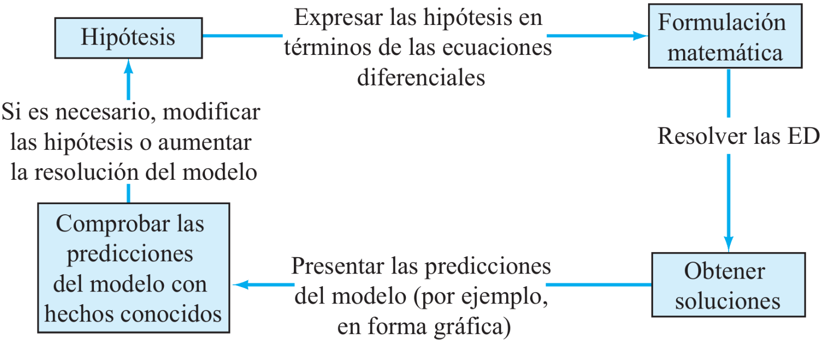
1. Introducción a las ecuaciones diferenciales

Contenido: Tema 01

Contenido: Tema 01

Modelos matemáticos

Proceso de modelado



Decaimiento radiactivo

- Los núcleos de átomos radiactivos se **desintegran** o se convierten en átomos de otras sustancias.
- Por ejemplo, con el tiempo, el radio **Ra-226**, intensamente radiactivo, se transforma en el radiactivo gas radón **Rn-222**.
- Se supone que la razón dA/dt con la que los núcleos se desintegran es:

$$\frac{dA}{dt} = kA \;\; \forall \;\; k < 0,$$

- Normalmente se conoce la cantidad inicial radioactiva A_0, por tanto conocemos $A(0) = A_0$, es decir, el problema consiste en uno con **valores iniciales** conocido también como **valores de frontera**.

Ley de enfriamiento/calentamiento de Newton

La rapidez con la que cambia la temperatura de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del **cuerpo** y la del **medio** que lo rodea (temp. ambiente):

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m),$$

donde T_m es la temperatura del medio ambiente, y dT/dt es la rapidez con que cambia la temp. del cuerpo.

Propagación de enfermedades

Una enfermedad contagiosa se propaga a través de una comunidad por personas que han estado en contacto con otras enfermas,

$x(t)$ $\rightarrow$ num. personas **infectadas**,

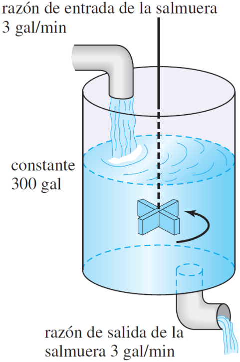
$y(t)$ $\rightarrow$ num. personas **sanas**,

por tanto, la razón dx/dt con que se propaga la enfermedad,

$$\frac{dx}{dt} = kxy = kx(n + 1 - x),$$

donde $x + y = n + 1$, siendo n la población total y $x(0) = 1$.

Mezclas



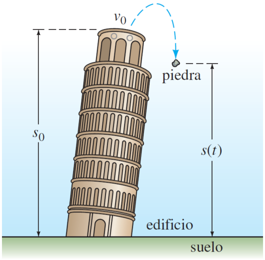
Se mezclan dos soluciones salinas de diferentes concentraciones, y se desea conocer la cantidad de sal contenida en la mezcla en función del tiempo, siendo que cuando la sol. esta bien mezclada se tiene una pérdida (sale con la misma razón que entra):

$$\frac{dA}{dt} = R_{in} - R_{out} \quad \forall \quad A(t) = \text{cant. sal},$$

en donde,

$$\begin{aligned} R_{in} &= (2\ \text{lb/gal}) \cdot (3\ \text{gal/min}) = 6\ \text{lb/min}, \\ R_{out} &= \left(\frac{A(t)}{300}\ \text{lb/gal} \right) \cdot (3\ \text{gal/min}) = \frac{A(t)}{100}\ \text{lb/min}, \\ \therefore \quad \frac{dA}{dt} &= 6 - \frac{1}{100} A. \end{aligned}$$

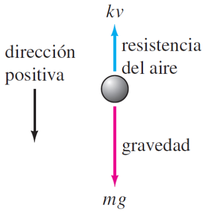
Caída libre y resistencia del aire



Utilizando la **segunda ley de Newton**, tenemos que $F = ma$, donde a es la aceleración del cuerpo, entonces,

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = mg \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2s}{dt^2} = g,$$

sujeto a las condiciones iniciales: $s(0) = s_0$, y $s'(0) = -v_0$.



Tomando en cuenta la **resistencia del aire**, se tiene que la ec. de fuerzas es,

$$\begin{aligned} F &= F_1 + F_2 = mg - kv, \\ \therefore \quad m\frac{d^2s}{dt^2} &= mg - k\frac{ds}{dt}. \end{aligned}$$

Contenido: Tema 01

Definiciones, clasificación y soluciones

Introducción

Consideremos la siguiente función [1] y calculemos su derivada,

$$y = e^{0.1x^2} \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 0.2xe^{0.1x^2},$$

sustituyendo en la expresión anterior $e^{0.1x^2}$ por y, tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = 0.2xy.$$

Ahora, si nos preguntamos que función representa la variable y tal que cumpla con la ecuación anterior, nos enfrentamos al **problema básico** del tema de ecs. diferenciales:

cómo resolver una ecuación con derivadas para la función desconocida $y = \phi(x)$??

[1] la cual es contínua y diferenciable en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Ecuación diferencial

Se denomina **ecuación diferencial (ED)** a la ecuación que contiene derivadas de una o mas variables respecto a una o más variables independientes.

Las **ED** se pueden clasificar por **tipo**:

- **Ecuación diferencial ordinaria (EDO)**: si la ec. sólo contiene derivadas de **una o mas** variables dependientes respecto a **una sola** variable independiente.

$$\frac{dy}{dx} + 5y = e^x, \quad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 6y = 0, \quad \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2x + y.$$

- **Ecuación diferencial parcial (EDP)**: ecuación que involucra derivadas parciales de **una o más** variables dependientes de **dos o más** variables independientes.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Definiciones, clasificación y soluciones

Clasificaciones

Las **ED** también se pueden clasificar por **orden**, lo cual representa el orden de la **mayor derivada** en la ec. diferencial.

$$\frac{dy}{dx} + 5y = e^x \quad \rightarrow \quad \text{EDO de } \textbf{primer orden},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 6y = 0 \quad \rightarrow \quad \text{EDO de } \textbf{segundo orden},$$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2x + y \quad \rightarrow \quad \text{EDO de } \textbf{primer orden},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x \quad \rightarrow \quad \text{EDO de } \textbf{segundo orden},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\frac{\partial u}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \text{EDP de } \textbf{segundo orden}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \rightarrow \quad \text{EDP de } \textbf{primer orden}.$$

Clasificaciones

Otro esquema de clasificación de las **ED** es por **linealidad**: si la ED es **lineal** en las variables y derivadas $y, dy/dx, \ldots, d^n y/dy^n$, entonces la ED es **lineal**:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x),$$

de donde observamos las siguientes características,

- la variable dependiente y y todas sus derivadas son de **primer grado**, es decir, la potencia de cada término que contiene y es igual a 1,
- los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ de y y sus derivadas **dependen** de la variable independiente x.

Ejemplos:

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3} + x\frac{dy}{dx} - 5y = e^x, \quad \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0, \quad (y-x)dx + 4xdy = 0.$$

Definiciones, clasificación y soluciones

Clasificaciones y notación

Por otro lado, una ED es **no lineal** cuando **no** cumple con los criterios anteriores, por ejemplo:

$$(1-y)\frac{dy}{dx}+2y=e^{x}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}+\mathsf{Sen}y=0, \quad \frac{d^4y}{dx^4}+y^2=0.$$

Por otro lado, en la descripción de las ED, utilizaremos los siguientes tipos de **notación**:

- **Leibniz**: dy/dx, d^2y/dx^2, $d^3y/dx^3 \ldots d^ny/dx^n$.
- **Prima**: y', y'', $y''' \ldots y^{(n)}$.
- **Punto**: $\dot{y}$, $\ddot{y}$.
- **Subíndice**: se utiliza para las EDP, e indica las variables independientes de la ec.,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-2\frac{\partial u}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad u_{xx}=u_{tt}-2u_t.$$

Simbólicamente se puede expresar una ec. diferencial ordinaria de n-ésimo orden con una variable dependiente por la **forma general** siguiente:

$$F(x, y, y^{'}, \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

donde F es una función con valores reales de $n+2$ variables: $x, y, y', \ldots, y^{(n)}$

De la ecuación anterior, despejando el término de la **mayor** derivada,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$

lo cual se conoce como la **forma normal** de la ec. diferencial. Por ejemplo,

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y, y').$$

Solución de una EDO

Es cualquier función ϕ, definida en un intervalo I, y que tiene al menos n derivadas contínuas en I, las cuales cuando se sustituyen en una EDO de n-ésimo orden reducen la ecuación a un identidad.

Por tanto, la solución de una EDO es una función ϕ que posee n derivadas donde,

$$F(x, \phi(x), \phi'(x), \ldots, \phi^{(n)}(x)) = 0 \ \ \forall \ \ x \in I,$$

es decir, se dice que ϕ **satisface** la ecuación diferencial en I.

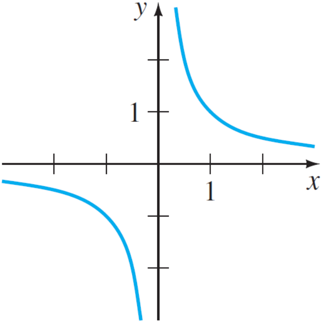
La solución obtenida debe venir definida en un **intervalo** I, el cual:

- se conoce como el **intervalo de definición** o **dominio de la solución**,
- puede ser un intervalo **abierto** (a, b), **cerrado** $[a, b]$, uno **infinito** (a, ∞), etc.

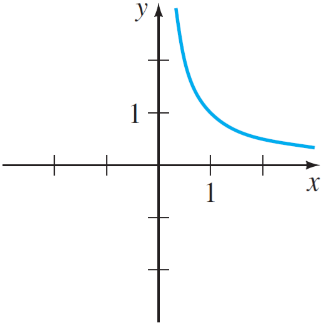
Definiciones, clasificación y soluciones

Curva solución

Función



Solución



- **función** $y = 1/x$,
- **dominio**: $\forall \;\; x \neq 0$,
- función **discontínua** en $x = 0$.

- **solución** de la EDO $xy' + y = 0$ $\Rightarrow y = 1/x$,
- **dominio**: $\forall \;\; x \in (0, \infty)$,
- solución **contínua y diferenciable** en todo el dominio.

Definiciones, clasificación y soluciones

Soluciones explícitas e implícitas

Solución explícita

Una solución en la cual la variable dependiente se expresa **sólo** en términos de la variable independiente y las constantes.

Ejemplos:

$$\frac{dy}{dx} = xy^{1/2} \quad \rightarrow \quad y = \frac{1}{16}x^4, \quad xy' + y = 0 \quad \rightarrow y = 1/x,$$
$$y'' - 2y' + y = 0 \quad \rightarrow \quad y = xe^x.$$

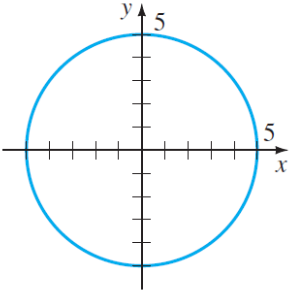
Solución implícita

Es la relación $G(x, y) = 0$ solución de una EDO, suponiendo que existe al menos una función ϕ que satisface la relación así como la EDO en el intervalo I.

Ejemplo:

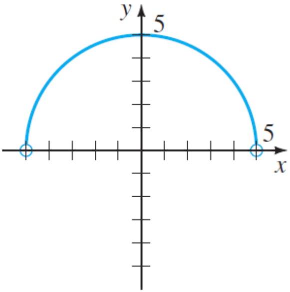
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 = 25.$$

Solución implícita



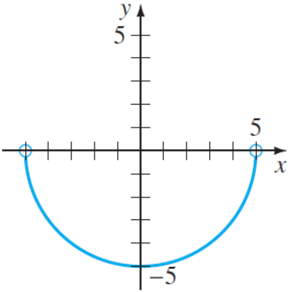
$$x^2 + y^2 = 25.$$

Solución explícita



$$y_1 = \sqrt{25 - x^2},$$
$$\forall \quad -5 < x < 5.$$

Solución explícita



$$y_2 = -\sqrt{25 - x^2},$$
$$\forall \quad -5 < x < 5.$$

Definiciones, clasificación y soluciones

Familias de soluciones

Cuando se resuelve una ecuación diferencial de **primer orden**, normalmente se obtiene una solución que contiene **una sola** cte. arbitraria o parámetro c:

$$F(x, y, y') = 0 \quad \Rightarrow \quad G(x, y, c) = 0,$$

en donde el conjunto de soluciones $G(x, y, c) = 0$ se le conoce como **familia de soluciones uniparamétricas**.

Generalizando, para una ED de orden n,

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \quad \Rightarrow \quad G(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0,$$

siendo $G(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$ una **familia de soluciones n-paramétrica**, por tanto observamos:

- una sola ecuación diferencial puede tener un número **infinito** de soluciones,
- una solución de la ED libre de parámetros se le conoce como **solución particular**.

Definiciones, clasificación y soluciones

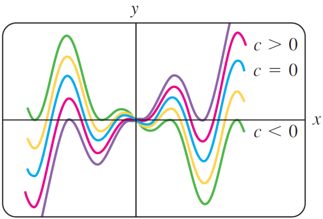
Familias de soluciones

La EDO lineal de primer orden,

$$xy' - y = x^2\mathsf{Sen}x,$$

tiene como **familia de sol.**:

$$y = cx - x\mathsf{Cos}x \ \ \forall \ \ x \in (-\infty, \infty),$$



siendo una **sol. particular**,

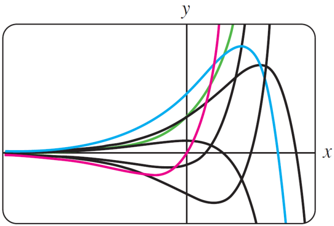
$$y = -x \ \ \forall \ \ c = 0.$$

La EDO lineal de segundo orden,

$$y'' - 2y' + y = 0,$$

tiene como **familia de sol.**:

$$y = c_1e^x + c_2xe^x \ \ \forall \ \ x \in (-\infty, \infty),$$



siendo algunas **sol. particulares**,

$$y = 5xe^x \quad (c_1 = 0, c_2 = 5),$$

$$y = 5e^x - 2xe^x \quad (c_1 = 5, c_2 = 2)$$

Contenido: Tema 01

Problema con valores iniciales (PVI) de n-ésimo orden

Ecuación diferencial de n-ésimo orden,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right),$$

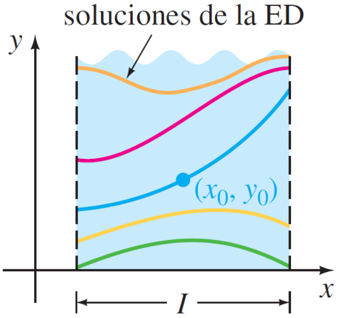
sujeta a n **condiciones iniciales (CI)** especificadas en $x_0 \in I$:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ \ldots\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

donde $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ son constantes reales arbitrarias dadas.

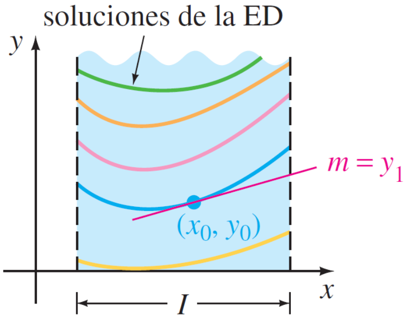
Caso $n = 1$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(x, y), \\ \forall \;\; y(x_0) &= y_0. \end{aligned}$$



Caso $n = 2$

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= f(x, y, y'), \\ \forall \;\; y(x_0) &= y_0, \;\; y'(x_0) = y_1. \end{aligned}$$



Problemas con valores iniciales

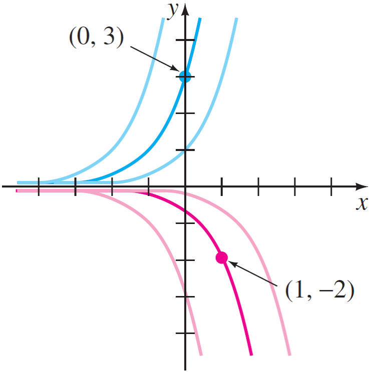
Ejemplo: PVI de primer orden

Tenemos la ecuación diferencial de primer orden,

$$y' = y \quad \Rightarrow \quad y = ce^x \;\; \forall \;\; x \in (-\infty, \infty).$$

Consideremos las siguientes **condiciones iniciales**:

1. $y(0) = 3 \rightarrow y = 3e^x$,
2. $y(1) = -2 \rightarrow y = -2e^{x-1}$.

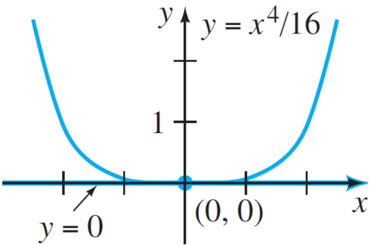


Consideremos la siguiente ecuación diferencial de primer orden, con valores iniciales,

$$\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}, \quad y(0) = 0,$$

la cual tiene **dos soluciones**:

$$y = 0, \;\& \; y = \frac{1}{16}x^4.$$



En general, se **pueden** tener ED's con **más** de una solución, por tanto es deseable tener una manera de asegurar lo siguiente:

- la **mayoría** de las ED's tendrán soluciones,
- las soluciones de los PVI **probablemente** sean únicas.

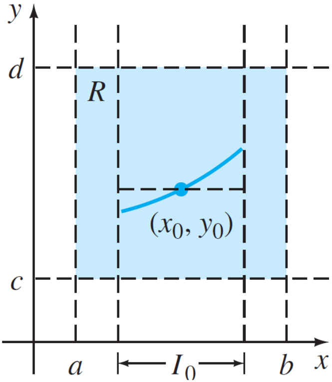
Existencia de una solución única

Sea R una región en el plano xy definida por,

$$a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d,$$

que contiene un punto (x_0, y_0) en su interior. Si $f(x, y)$ y $\partial f / \partial y$ son contínuas en R, entonces **existe** algún intervalo $I_0 : (x_0 - h, x_0 + h) \; \forall \; h > 0$, contenido en $[a, b]$, y una función **única** $y(x)$, definida en I_0, que es una solución del problema con valores iniciales:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \forall \quad y(x_0) = y_0.$$



Problemas con valores iniciales

Existencia y unicidad de las soluciones

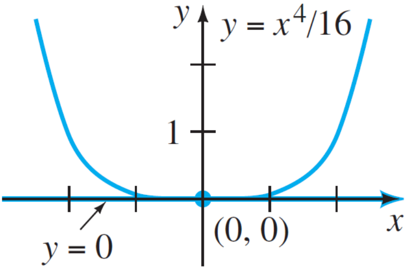
Aplicando el **teorema de existencia y unicidad** a la ec. diferencial analizada anteriormente,

$$\frac{dy}{dx} = xy^{1/2},$$

tenemos:

$$f(x, y) = xy^{1/2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{2y^{1/2}},$$

siendo **contínuas** ambas en la región limitada por $y > 0$.



Por tanto, la ec. diferencial analizada, con valores iniciales,

$$\frac{dy}{dx} = xy^{1/2} \quad \text{con} \quad y(2) = 1,$$

tiene solución **única**.[2]

[2] la cual es $y = x^4/16$.