Contenido

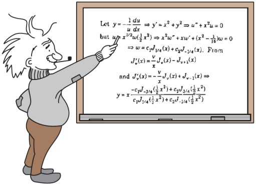
2. Ecuaciones diferenciales de primer orden

Contenido: Tema 02

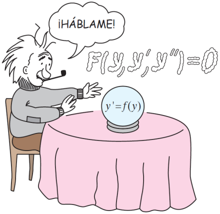
Contenido: Tema 02

Los métodos de estudio de ecuaciones diferenciales se pueden clasificar en tres grandes grupos,

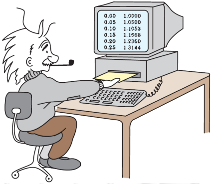
Analítico



Cualitativo



Numérico



dentro de los cuales nos enfocaremos en el **método analítico**, comenzando con ecuaciones diferenciales de **primer orden**.

Variables separables

Fundamentos

Ecuación separable

Ecuación diferencial de primer orden de la forma,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{g(x)}{h(y)}.$$

La forma separable de una EDO también se puede expresar como:

$$g(x)dx + h(y)dy = 0,$$

integrando desde un **valor de frontera** (x_0, y_0) hasta (x, y) tenemos:

$$\int_{x_0}^{x} g(x)dx + \int_{y_0}^{y} h(y)dy = 0.$$

De la ecuación anterior observamos lo siguiente:

1. Los límites inferiores contribuyen **sólo** con valores ctes. a la solución, $\Rightarrow$ se pueden ignorar y sólo añadir una **cte. de integración**.
2. Esta técnica **no** requiere que la EDO sea lineal.

Variables separables

Ejemplo

Resolver la sig. ecuación diferencial por el método de **variables separables**,

$$(1+x)dy - ydx = 0.$$

Analizando si es separable,

$$(1+x)dy - ydx = 0 \quad \rightarrow \quad (1+x)dy = ydx \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x},$$

integrando,

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x} \quad \rightarrow \quad \text{ln}y = \text{ln}(1+x) + \text{ln}c,$$

$$\text{ln}y = \text{ln}\left[c(1+x)\right],$$

$$\therefore \;\; y = c(1+x).$$

Contenido: Tema 02

Ecuaciones exactas

Definición

Consideremos la forma general de las EDO de primer órden,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} \quad \Rightarrow \quad M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0.$$

A esta ecuación se le dice **exacta** si es posible expresarla mediante un diferencial $df \;\; \forall \;\; f(x,y) =$ cte,

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0, \\ \Rightarrow \quad & \frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) \;\; \& \;\; \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y). \end{aligned}$$

Para comprobar que tal $f(x,y)$ existe, y que por tanto la EDO es exacta:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Ecuaciones exactas

Método de solución

Considerando que se cumple la condición de EDO exacta:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

por tanto, existe una función $f(x,y)$ tal que,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) \;\;\&\;\; \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y),$$

integrando *parcialmente* cada una de las expresiones anteriores,

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y) \;\;\&\;\; f(x,y) = \int N(x,y)dy + h(x),$$

finalmente, se comparan los resultados de las integrales con las funciones $g(y)$ y $h(x)$ para determinar su naturaleza y así obtener $f(x,y) = c$.

Ecuaciones exactas

Ejemplo

Resolver la sig. EDO por medio del método de **ecuaciones exactas**,

$$2xydx + (x^2 - 1)dy = 0.$$

Analizando si cumple con la condición de EDO **exacta**,

$$M(x,y) = 2xy, \quad \& \quad N(x,y) = x^2 - 1,$$

$$\rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 2x \;\; \& \;\; \frac{\partial N}{\partial x} = 2x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

por tanto sí se trata de una ec. **exacta**, por lo que procedemos a resolver:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) = 2xy \quad \rightarrow \quad f(x,y) = \int 2xydx + g(y)$$

$$\Rightarrow \quad f(x,y) = x^2y + g(y),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y) = x^2 - 1 \quad \rightarrow \quad f(x,y) = \int (x^2 - 1)dy + h(x)$$

$$\Rightarrow \quad f(x,y) = x^2y - y + h(x).$$

Ecuaciones exactas

Ejemplo

Comparando ambos resultados,

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= x^2y + g(y), \\
f(x,y) &= x^2y - y + h(x),
\end{aligned}
$$

observamos que para poder obtener en ambos casos la misma $f(x,y)$ se debe cumplir:

$$g(y) = -y, \quad \& \quad h(x) = 0,$$

por tanto, obtenemos para $f(x,y)$:

$$f(x,y) = x^2y - y = c,$$

obteniendo finalmente como solución de la EDO,

$$x^2y - y = c \quad \Rightarrow \quad y = \frac{c}{x^2 - 1}.$$

Contenido: Tema 02

Ecuaciones lineales

Definición

Ecuación lineal

Una ecuación diferencial de primer orden se puede representar en **forma estándar**,

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x).^{a}$$

[a] dividiendo la ec. original por el coeficiente $a_1(x)$.

Para resolver la ecuación estándar, busquemos un **factor** $\mu(x)$ tal que transforme a la ec. diferencial en una **exacta**:

$$\begin{aligned}
&\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x) \quad \rightarrow \quad \mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)p(x)y = \mu(x)f(x), \\
\Rightarrow \quad & \mu(x)dy + \mu(x)p(x)y dx = \mu(x)f(x)dx, \\
\therefore \quad & \mu(x)dy + \left[\mu(x)p(x)y - \mu(x)f(x)\right]dx = 0.
\end{aligned}$$

Ecuaciones lineales

Método de solución

Ahora, recordando la condición para que una EDO sea **exacta**:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right),$$

por tanto, para nuestro problema, si queremos que se tenga una ecuación exacta, se debe cumplir,

$$\begin{aligned} d\varphi &= \mu(x)dy + \left[\mu(x)p(x)y - \mu(x)f(x)\right]dx = 0, \\ \therefore \quad & \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \mu(x) \quad \& \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \mu(x)p(x)y - \mu(x)f(x), \\ \Rightarrow \quad & \frac{\partial \mu(x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu(x)p(x)y\right]. \end{aligned}$$

Simplificando la expresión anterior,

$$\frac{\partial \mu(x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu(x)p(x)y\right] \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mu(x)}{dx} = \mu(x)p(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mu(x)}{\mu(x)} = p(x)dx,$$

Integrando la expresión anterior se obtiene:

$$\frac{d\mu(x)}{\mu(x)} = p(x)dx \;\Rightarrow\; \ln\mu(x) = \int p(x)dx \;\Rightarrow\; \mu(x) = \exp\left(\int p(x)dx\right).$$

Obteniendo el **factor integrante** $\mu(x)$, es posible encontrar una solución general a la ecuación diferencial,

$$\begin{aligned}
& \frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x), \\
\Rightarrow \quad & e^F\frac{dy}{dx} + e^F p(x)y = e^F f(x) \;\; \forall \;\; F = \int p(x)dx, \\
\Rightarrow \quad & \frac{d}{dx}\left(ye^F\right) = e^F q(x) \;\;\rightarrow\;\; d\left(ye^F\right) = e^F q(x)dx, \\
\therefore \quad & y(x) = e^{-F}\left[\int e^F q(x)dx + C\right] \equiv y_2(x) + y_1(x).
\end{aligned}$$

Ecuaciones lineales

Propiedades de la solución: ecuación homogénea

Los dos términos de la solución $y(x)$ tienen la siguiente interpretación:

$$y_1(x) = Ce^{-F} \text{ solución de la ec. } \textbf{homogénea}.$$

Para demostrar lo anterior, observemos la ec. general,

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \ \ \forall \ \ f(x) = 0,$$

resolviendo la ec. homogénea obtenida,

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx \quad \Rightarrow \quad \ln y = -\int p(x)dx + B,$$

donde recordemos,

$$F = \int p(x)dx \quad \Rightarrow \quad \ln y = -F + B \quad \Rightarrow \quad y = Ce^{-F},$$

renombrando $e^B \to C$, obteniendo así el resultado esperado.

Ecuaciones lineales

Propiedades de la solución: ecuación no-homogénea

El siguiente término de la solución,

$$y_2(x) = e^{-F} \int e^F f(x) dx,$$

corresponde al término $f(x)$, y por tanto es una solución a la ecuación original **no-homogénea**.

Del análisis anterior se observa:

- $y_1(x)$ representa la solución general correspondiente a la ecuación **homogénea**,
- $y_2(x)$ representa la solución general correspondiente a la ecuación **no-homogénea**.

Es decir, hemos encontrado la solución **completa** de la EDO lineal de primer orden,

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x) \;\; \forall \;\; y = y_1^h(x) + y_2^{nh}(x).$$

Ejemplo

Consideremos la siguiente ecuación diferencial,

$$x\frac{dy}{dx} - 4y = x^6 e^x,$$

la ecuación es **no homogénea**, la cual expresando en la forma estándar,

$$\frac{dx}{dy} - \frac{4}{x}y = x^5 e^x \quad \text{comparando:} \quad \frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x),$$

$$\Rightarrow \quad p(x) = -\frac{4}{x}, \quad f(x) = x^5 e^x,$$

hallando por tanto el **factor integrante**,

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \text{exp}\left[\int p(x)dx\right] = \text{exp}\left[\int -\frac{4}{x}dx\right] \\ &= \text{exp}\left[-4\ln x\right] = \text{exp}\left[\ln(x^{-4})\right] = x^{-4}. \end{aligned}$$

Ecuaciones lineales

Ejemplo

Multiplicando la ecuación diferencial por el factor integrante obtenido anteriormente,

$$\begin{aligned}
& \frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}y = x^5 e^x \quad \forall \quad \mu(x) = x^{-4}, \\
\Rightarrow \qquad & \frac{1}{x^4}\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x^5}y = xe^x, \\
\therefore \qquad & \frac{d}{dx}\left[\frac{y}{x^4}\right] = xe^x, \\
\Rightarrow \qquad & \int d\left[\frac{y}{x^4}\right] = \int xe^x dx,
\end{aligned}$$

integrando: $\dfrac{y}{x^4} = xe^x - e^x + C \quad \therefore \quad y = (x-1)x^4 e^x + Cx^4,$

en donde tenemos:

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= Cx^4, \quad \text{sol. } \textbf{homogénea}, \\
y_2(x) &= (x-1)x^4 e^x, \quad \text{sol. } \textbf{no-homogénea}.
\end{aligned}$$

Contenido: Tema 02

Soluciones por sustitución

Ecuaciones homogéneas

Si una función tiene la siguiente propiedad,

$$f(tx,ty) = t^{\alpha} f(x,y) \;\; \forall \;\; a \in \mathbb{R},$$

entonces se dice que se trata de una **función homogénea** de grado α.

Una ED de primer orden en forma diferencial,

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

se dice que es **homogénea** si ambas funciones coeficientes M y N son ecuaciones homogénicas del **mismo** grado,

$$M(tx,ty) = t^{\alpha} M(x,y) \;\; \& \;\; N(tx,ty) = t^{\alpha} N(x,y),$$

$\therefore$ se pueden expresar mediante las **sustituciones** propuestas como:

$$y = ux \quad \Rightarrow \quad M(x,y) = x^{\alpha} M(1,u) \;\; \& \;\; N(x,y) = x^{\alpha} N(1,u),$$
$$x = vy \quad \Rightarrow \quad M(x,y) = y^{\alpha} M(v,1) \;\; \& \;\; N(x,y) = y^{\alpha} N(v,1).$$

siendo **equivalente** aplicar cualquiera de las sustituciones, dando lugar a una ED de primer orden **separable**.

Soluciones por sustitución

Ecuaciones homogéneas

Para ejemplificar el punto anterior, analizemos:

$$
\begin{aligned}
& M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \\
\therefore \quad & x^{\alpha} M(1,u)dx + x^{\alpha} N(1,u)dy = 0 \ \ \forall \ \ y = ux, \\
\Rightarrow \quad & M(1,u)dx + N(1,u)(udx + xdu) = 0 \ \ \forall \ \ dy = udx + xdu, \\
& \left[M(1,u) + uN(1,u) \right] dx + xN(1,u)du = 0, \\
\therefore \quad & \frac{dx}{x} + \frac{N(1,u)}{M(1,u) + uN(1,u)} du = 0,
\end{aligned}
$$

la cual representa una ED de forma **separable**.

De manera análoga, se tiene para $y = vx$,

$$
\frac{M(v,1)}{vM(v,1) + N(v,1)} dv + \frac{dy}{y} = 0.
$$

Soluciones por sustitución

Ejemplo

Resolver la siguiente ecuación diferencial,

$$(x^2 + y^2)dx + (x^2 - xy)dy = 0,$$

intentando por el método de **sustitución**, observamos:

$$M(x, y) = x^2 + y^2, \quad \& \quad N(x, y) = x^2 - xy,$$

por tanto, ambas funciones son de **grado 2**, entonces proponemos:,

$$\begin{aligned} & y = ux, \quad dy = udx + xdu, \\ \Rightarrow \quad & (x^2 + u^2x^2)dx + (x^2 - ux^2)(udx + xdu) = 0, \\ \therefore \quad & (1 + u)x^2dx + (1 - u)x^3du = 0, \end{aligned}$$

la cual ya se trata de una ecuación **separable**, por tanto, procedemos como corresponde,

$$\frac{dx}{x} + \frac{1 - u}{1 + u}du = 0,$$

Soluciones por sustitución

Ejemplo

integrando la ec. anterior,

$$\frac{dx}{x} + \frac{1-u}{1+u}du = 0 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dx}{x} = \int \frac{1-u}{1+u}du = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \left(1 - \frac{2}{m}\right) dm \quad \forall \quad m = u+1, \quad dm = du,$$

$$\therefore \quad \ln x = m - 2\ln m + \ln C',$$

$$\ln x = u - 2\ln(u+1) + \ln C,^{1}$$

$$\ln x = \frac{y}{x} - 2\ln\left(\frac{x+y}{x}\right) + \ln C,$$

lo cual reordenando queda como:

$$\ln\left[\frac{(x+y)^2}{Cx}\right] = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad (x+y)^2 = Cxe^{y/x}. \tag{1}$$

[1] $1 + \ln C' = \ln C$.

Contenido: Tema 02

Ecuación de Bernoulli

Definición

La **ecuación de Bernoulli** es una ecuación de primer orden **no-lineal**, cuya forma general es de la siguiente manera,

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)y^n \quad \forall \quad n \in \mathbb{R}.$$

Esta ecuación, sin embargo, puede convertirse en una **lineal** realizando el siguiente cambio de variable,

$$\begin{aligned} u = y^{1-n} \quad &\Rightarrow \quad y = u^{\frac{1}{1-n}}, \\ \frac{du}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} \quad &\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n}y^n\frac{du}{dx}. \end{aligned}$$

Sustituyendo, por tanto, en la ec. de Bernoulli, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-n}y^n\frac{du}{dx} + p(x)y \quad &= \quad f(x)y^n, \\ \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} + p(x)(1-n)y^{1-n} \quad &= \quad f(x)(1-n), \\ \therefore \quad \frac{du}{dx} + p(x)(1-n)u \quad &= \quad f(x)(1-n), \quad \textbf{EDO lineal}. \end{aligned}$$

Ecuación de Bernoulli

Ejemplo

Resolver la ec. diferencial,

$$x\frac{dy}{dx} + y = x^2y^2,$$

analizando la EDO, se observa que se trata de la ecuación no-lineal de **Bernoulli**,

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)y^n \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = xy^2 \;\; \forall \;\; n = 2,$$

proponiendo por tanto el sig. cambio de variable,

$$u = y^{1-n} \quad \Rightarrow \quad u = y^{-1} \;\; \forall \;\; n = 2,$$

$$\therefore \quad y = u^{-1} \;\; \& \;\; \frac{dy}{dx} = -u^{-2}\frac{du}{dx}.$$

Ecuación de Bernoulli

Ejemplo

Sustituyendo en la ec. diferencial,

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = xy^2 \quad \Rightarrow \quad -u^{-2}\frac{du}{dx} + \frac{1}{x}u^{-1} = xu^{-2},$$

$$\therefore \quad \frac{du}{dx} - \frac{u}{x} = -x, \quad \text{EDO } \textbf{lineal}.$$

Resolviendo por **factor integrante**,

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \exp\left[\int p(x)dx\right] \;\; \forall \;\; p(x) = -\frac{1}{x}, \\ &= \exp\left[-\int \frac{1}{x}dx\right] = \exp\left[-\ln x\right] = \exp\left[\ln(x^{-1})\right] = x^{-1}. \end{aligned}$$

Multiplicando la ec. diferencial por factor integrante,

$$\frac{du}{dx} - \frac{u}{x} = -x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x}\frac{du}{dx} - \frac{u}{x^2} = -1,$$

la ec. anterior puede ser expresada como una diferencial total,

$$\frac{1}{x}\frac{du}{dx} - \frac{u}{x^2} = -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}u\right] = -1,$$

integrando la ec. anterior,

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}u\right] = -1 \quad \Rightarrow \quad \int d\left[\frac{u}{x}\right] = -\int dx,$$

$$\therefore \quad \frac{u}{x} = -x + c \quad \Rightarrow \quad u = -x^2 + cx,$$

finalmente, sustituyendo la propuesta inicial $u = y^{-1}$,

$$u = y^{-1} = -x^2 + xc \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{cx - x^2}.$$