Contenido

Contenido: Tema 03

Contenido: Tema 03

Ecuaciones homogéneas y no-homogéneas

Definiciones de ecs. homogéneas y no-homogéneas

Una ecuación diferencial lineal de n-ésimo orden de la forma,

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0,$$

se dice que es **homogénea**, mientras que una ecuación,

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x),$$

con $g(x) \neq 0$ es **no-homogénea**.

En general, consideramos que se cumple lo siguiente:

- lo coeficientes $a_i(x) \;\; \forall \;\; i = 1, 2, \ldots, n$ y $g(x)$ son **continuos**,
- $a_n(x) \neq 0$ para todo x en el intervalo de definición.

Ejemplos:

$$2y'' + 3y' - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{ED lineal } \textbf{homogénea} \text{ de segundo orden,}$$
$$x^3y''' + 6y' + 10y = e^x \quad \Rightarrow \quad \text{ED lineal } \textbf{no-homogénea} \text{ de tercer orden.}$$

Ecuaciones homogéneas y no-homogéneas

Ecs. homogéneas: Principio de superposición

En general, se denota a la derivada como $dy/dx = Dy$, donde D se conoce como **operador diferencial**,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = D^n y.$$

Principio de superposición

Sean $y_1, y_2, \ldots, y_k$ soluciones en un intervalo I, de la ec. **homogénea** de n-ésimo orden,

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0,$$

entonces la combinación lineal:

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_k y_k(x) \quad \forall \quad c_i = \text{ctes.}$$

también es una **solución** en el mismo intervalo.

Solución general: ecuaciones homogéneas

Sean $y_1, y_2, \ldots, y_n$ el set **completo** de soluciones en un intervalo I, de la ec. lineal **homogénea** de n-ésimo orden,

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0,$$

entonces la **solución general** de la ec. en el mismo intervalo es:

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x) \;\; \forall \;\; c_i = \text{ctes}.$$

En donde las funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son **linealmente independientes**, cumpliendo por tanto con la ec. del **Wronskiano**:

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ {y'}_1 & {y'}_2 & \cdots & {y'}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & \cdots & y_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Se tiene la ec. diferencial lineal homogénea de segundo orden,

$$y'' - 9y = 0 \;\text{ con soluciones: }\; y_1 = e^{3x}, \quad y_2 = e^{-3x},$$

comprobando que las sol. sean **linealmente independientes**:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-3x} \\ 3e^{3x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -6 \neq 0,$$

por tanto, al ser **linealmente independientes** y formar un **set completo**, [1] la **solución general** esta dada como:

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \\ &= c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}. \end{aligned}$$

[1] ya que se tiene el mismo número de soluciones independientes que de orden de la ED.

Ecuaciones homogéneas y no-homogéneas

Ecs. no-homogéneas: solución general

Cualquier función y_p libre de parámetros arbitrarios que satisfaga la ec. lineal **no-homogénea**,

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x),$$

$\forall \;\; g(x) \neq 0$, se dice que es una **solución particular** de la ec. diferencial.

Solución general: ecuaciones no-homogéneas

Sea y_p cualquier solución **particular** de una ED lineal **no-homogénea**, y sea $y_1, y_2, \ldots, y_n$ un **set completo** de soluciones de la ec. diferencial **homogénea** asociada ($g(x) = 0$), entonces la **sol. general** de la ec. es:

$$y = y_c(x) + y_p(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x) + y_p(x),$$

$\forall \;\; c_i =$ ctes, en donde y_c se le conoce como la **función complementaria** para la ecuación diferencial.

Ecuaciones homogéneas y no-homogéneas

Ecs. no-homogéneas: solución general, ejemplo

Consideremos la sig. ecuación diferencial **no-homogénea**,

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 3x,$$

la solución **general** de la ec. diferencial vendrá dada por

$$y = y_c + y_p,$$

donde la **función complementaria** y_c es solución de la ec. **homogénea**,

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0 \quad \Rightarrow \quad y_c = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$$

mientras que la **sol. particular** y_p satisface la ec. no-homogénea original,

$$y_p = -\frac{11}{12} - \frac{1}{2}x,$$

por tanto, la sol. general será:

$$y = y_c + y_p = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} - \frac{11}{12} - \frac{1}{2}x.$$

Principio de superposición

Sean $y_{p_1}, y_{p_2}, \ldots, y_{p_k}$ soluciones **particulares** de la ecuación diferencial lineal no-homogénea de n-ésimo orden:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g_i(x),$$

donde $i = 1, 2, \ldots, k$, entonces:

$$y_p = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) + \ldots + y_{p_k}(x),$$

será una **solución particular** de:

$$\begin{aligned} &a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y \\ &= g_1(x) + g_2(x) + \ldots + g_k(x). \end{aligned}$$

Tenemos las siguientes ecuaciones no-homogéneas, [2] con sus respectivas **soluciones particulares**,

$$\begin{aligned} y_{p_1} = -4x^2 \quad &\forall \quad y'' - 3y' + 4y = -16x^2 + 24x - 8, \\ y_{p_2} = e^{2x} \quad &\forall \quad y'' - 3y' + 4y = 2e^{2x}, \\ y_{p_3} = xe^{x} \quad &\forall \quad y'' - 3y' + 4y = 2xe^{x} - e^{x}, \end{aligned}$$

por tanto, tenemos que la **superposición**:

$$y = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3} = -4x^2 + e^{2x} + xe^{x},$$

será solución de la sig. ec. diferencial no-homogénea:

$$y'' - 3y' + 4y = -16x^2 + 24x - 8 + 2e^{2x} + 2xe^{x} - e^{x}.$$

[2] las cuales solo difieren en la forma de $g(x)$.

Contenido: Tema 03

Reducción de orden

Definición del método

Consideremos una ecuación diferencial de segundo orden, lineal, y homogénea,

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0,$$

a la cual le conocemos **una** de sus **dos** soluciones: $y = y_1(x) \neq 0$ para todo el intervalo de definición, entonces podemos definir la siguiente relación:

$$y = u(x)y_1(x),$$

para poder determinar la **otra** solución de la ED. [3]

Calculando las derivadas de la función propuesta:

$$\begin{aligned} y &= u(x)y_1(x), \\ y' &= uy'_1 + u'y_1, \\ y'' &= uy''_1 + 2u'y'_1 + u''y_1. \end{aligned}$$

[3] tal sust. es posible debido a que y_1 y y_2 deben ser linealmente independientes.

Reducción de orden

Definición del método

Sustituyendo lo anterior en la ED,

$$\begin{aligned}
& y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \\
\Rightarrow\quad & \left[u{y''}_1 + 2u'{y'}_1 + u''y_1\right] + P(x)\left[u{y'}_1 + u'y_1\right] + Q(x)\left[uy_1\right] = 0, \\
\therefore\quad & u''y_1 + u'\left[2{y'}_1 + P(x)y_1\right] + u\left[{y''}_1 + P(x){y'}_1 + Q(x)y_1\right] = 0, \\
& u''y_1 + u'\left[2{y'}_1 + P(x)y_1\right] = 0,^{4}
\end{aligned}$$

proponiendo la siguiente sustitución:

$$w = u' \quad \Rightarrow \quad y_1 w' + \left(2{y'}_1 + P(x)y_1\right)w = 0,$$

obtenemos, por tanto, una ED de **primer orden** en las var. w y x. [5]

$$\frac{dw}{dx} + \left(2\frac{{y'}_1}{y_1} + P(x)\right)w = 0.$$

[4] el último término se anula debido a que y_1 es solución de la ED.

[5] recordando que y_1 es una función conocida de x.

Reducción de orden

Definición del método

La ED obtenida anteriormente es **separable**, por tanto resolviendo,

$$
\begin{aligned}
& \frac{dw}{dx} + \left(2\frac{y'_1}{y_1} + P(x)\right) w = 0, \\
\Rightarrow \quad & \int \frac{dw}{w} = -\int \frac{2}{y_1}\frac{dy_1}{dx}dx - \int P(x)dx = -\int \frac{2}{y_1}dy_1 - \int P(x)dx, \\
\therefore \quad & \ln w = -\ln y_1^2 - \int P(x)dx, \\
& \ln\left(wy_1^2\right) = -\int P(x)dx, \\
\Rightarrow \quad & wy_1^2 = \frac{du}{dx}y_1^2 = \exp\left[-\int P(x)dx\right], \quad \forall \;\; u' = w, \\
\therefore \quad & u = \int \frac{1}{y_1^2}\exp\left[-\int P(x)dx\right] dx, \quad \forall \;\; y = uy_1 \\
\Rightarrow \quad & y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2}\exp\left[-\int P(x)dx\right] dx.
\end{aligned}
$$

Contenido: Tema 03

Consideremos una ED de primer orden lineal homogénea,

$$ay' + by = 0 \ \ \forall \ \ a \neq 0 \ \& \ b \ \ \textbf{constantes},$$

reescribiendo la ED anterior,

$$y' = ky \ \ \forall \ \ k = -b/a = \text{cte.},$$

observamos que la **única** función elemental que cumple con la ec. anterior [6] es una **función exponencial**: e^{mx},

$$\therefore \quad y = e^{mx}, \quad y' = me^{mx},$$

$$\rightarrow \quad ay' + by = 0 \quad \rightarrow \quad ame^{mx} + be^{mx} = 0 \ \text{ o } \ e^{mx}(am + b) = 0,$$

de la ec. anterior se observa que para que cumpla, se debe tener:

$$am + b = 0,$$

por tanto, sólo cuando m cumple con la condición anterior, la función $y = e^{mx}$ será **solución** de la ED $ay' + by = 0$.

[6] función cuya derivada es una cte. múltiple de si misma.

Ecs. lineales homogéneas con coeficientes constantes

Ecuaciones diferenciales de segundo orden

Consideremos el caso de una ec. diferencial de segundo orden homogénea,

$$ay'' + by' + cy = 0 \;\; \forall \;\; a, b, c = \textbf{constantes},$$

proponiendo una solución,

$$y = e^{mx}, \;\; y' = me^{mx}, \;\; y'' = m^2 e^{mx},$$

y sustituyéndola en la ED, obtenemos:

$$am^2 e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0 \;\; \rightarrow \;\; \left(am^2 + bm + c\right) e^{mx} = 0$$

debido a que $e^{mx} \neq 0 \;\; \forall \;\; x$, entonces $y = e^{mx}$ será **solución** de la ec. diferencial cuando m sea **raíz** de la ec. cuadrática obtenida:

$$am^2 + bm + c = 0.$$

La ecuación polinomial obtenida de la ec. diferencial, se le conoce como **ecuación auxiliar**,

$$ay'' + by' + cy = 0 \;\; \forall \;\; y = e^{mx} \quad \rightarrow \quad am^2 + bm + c = 0,$$

la cual resolviendo nos arroja las siguientes expresiones para m:

$$m_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \;\; \& \;\; m_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

por tanto, habrá tres formas de la solución general que corresponden a los tres casos siguientes:

- m_1 y m_2 son **reales y distintas** $\Rightarrow \sqrt{b^2 - 4ac} > 0$,
- m_1 y m_2 son **reales e iguales** $\Rightarrow \sqrt{b^2 - 4ac} = 0$,
- m_1 y m_2 son **complejos conjugados** $\Rightarrow \sqrt{b^2 - 4ac} < 0$.

En el caso de que la **ecuación auxiliar** tenga dos raices reales y distintas, se tendrán por tanto **dos** soluciones linealmente independientes,

$$y_1 = e^{m_1 x} \;\;\&\;\; y_2 = e^{m_2 x},$$

formando un **conjunto fundamental**,

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}.$$

Ejemplo

$$2y'' - 5y' - 3y = 0 \quad \rightarrow \quad 2m^2 - 5m - 3 = 0 \;\; \forall \;\; y = e^{mx},$$

resolviendo la ecuación auxiliar obtenida:

$$\begin{aligned} & (2m)^2 - 5(2m) - 6 = 0 \quad \rightarrow \quad (2m-6)(2m+1) = 0 \\ \therefore \quad & (m-3)(2m+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = e^{3x}, \;\; y_2 = e^{-x/2}, \\ & y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x/2} \quad \Leftarrow \quad \textbf{solución general}. \end{aligned}$$

En el caso de que la ecuación auxiliar arroje soluciones reales y **repetidas**, $m_1 = m_2$, entonces solo se puede obtener **una** solución,

$$y_1 = e^{m_1 x} \;\; \forall \;\; am^2 + bm + c = 0 \;\; \& \;\; m_1 = -\frac{b}{2a},$$ [7]

en donde la segunda solución puede ser obtenida mediante el método de **reducción de orden** $(y = u(x)y_1(x))$ para la ec. diferencial,

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y'' + \frac{b}{a}y' + \frac{c}{a}y = 0 \text{ [8]} \;\; \forall \;\; y = ue^{m_1 x},$$

por tanto, calculando las derivadas de la propuesta,

$$y' = u'e^{m_1 x} + m_1 ue^{m_1 x} \;\; \& \;\; y'' = u''e^{m_1 x} + 2m_1 u'e^{m_1 x} + m_1^2 ue^{m_1 x},$$

[7] recordando que para raices idénticas se tiene $\sqrt{b^2 - 4ac} = 0$.

[8] recordando que tratamos con una ED de coeficientes constantes.

sutituyendo en la ec. diferencial lo obtenido anteriormente,

$$
\begin{aligned}
&y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0,\\
&\left[u'' + 2m_1u' + m_1^2u\right] e^{m_1x} + \left[u' + m_1u\right] e^{m_1x} P(x) + ue^{m_1x}Q(x) = 0,\\
&u'' + [2m_1 + P(x)]u' + [m_1^2 + P(x)m_1 + Q(x)]u = 0 \;\; \forall \;\; e^{m_1x} \neq 0,\\
&u'' + (2m_1 + P(x))u' = 0,
\end{aligned}
$$

recordemos que,

$$P(x) = \frac{b}{a} \;\; \& \; m_1 = -\frac{b}{2a} \quad \Rightarrow 2m_1 + P(x) = 0,$$

por tanto, tenemos la siguiente ED:

$$u'' = 0 \quad \Rightarrow \quad u' = C \;\; \forall \;\; C = \text{cte.} \quad \Rightarrow \quad u = x$$ [9]

pero: $y = ue^{m_1x} \quad \Rightarrow \quad y_2 = xe^{m_1x}$,

$\therefore \quad y = c_1e^{m_1x} + c_2xe^{m_1x} \quad \Leftarrow$ **solución general**.

[9] la constante C puede tomar cualquier valor $\therefore C = 1$.

Ejemplo

$$y'' - 10y' + 25y = 0 \quad \rightarrow \quad m^2 - 10m + 25 = 0 \;\; \forall \;\; y = e^{mx},$$

resolviendo la ecuación auxiliar obtenida,

$$m^2 - 10m + 25 = 0 \quad \rightarrow \quad (m-5)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad m_1 = 5,$$

por tanto, obtenemos solamente **una solución** de la ec. auxiliar,

$$y_1 = e^{5x},$$

siendo la **segunda** solución deducida por el método de reducción de orden,

$$y_2 = xe^{m_1 x} \quad \Rightarrow \quad y_2 = xe^{5x},$$

obteniendo así la solución general del problema,

$$y = c_1 e^{5x} + c_2 x e^{5x}.$$

Ecs. lineales homogéneas con coeficientes constantes

Caso III: raíces complejas conjugadas

Para el caso cuando se obtienen de la **ecuación auxiliar** raíces **complejas conjugadas**, tenemos:

$$m_1 = \alpha + i\beta \ \ \& \ \ m_2 = \alpha - i\beta,$$

por tanto, las posibles soluciones para la ED serían,

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{m_1 x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}e^{i\beta x}, \\ y_2 &= e^{m_2 x} = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}e^{-i\beta x}. \end{aligned}$$

Sin embargo, como necesitamos que las soluciones sean funciones definidas en una región del campo de los **reales**, reformulemos las expresiones para y_1 y y_2 usando la **fórmula de Euler**

$$e^{i\theta} = \mathrm{Cos}\theta + i\mathrm{Sen}\theta,$$

por tanto,

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{\alpha x}e^{i\beta x} = e^{\alpha x}\left[\mathrm{Cos}\beta x + i\mathrm{Sen}\beta x\right], \\ y_2 &= e^{\alpha x}e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}\left[\mathrm{Cos}\beta x - i\mathrm{Sen}\beta x\right], \end{aligned}$$

Ecs. lineales homogéneas con coeficientes constantes

Caso III: raíces complejas conjugadas

utilizando las exp. anteriores para describir a la **solución general**,

$$\begin{aligned}
y &= A_1 y_1 + A_2 y_2, \\
&= A_1 e^{\alpha x}\left[\mathsf{Cos}\beta x + i\mathsf{Sen}\beta x\right] + A_2 e^{\alpha x}\left[\mathsf{Cos}\beta x - i\mathsf{Sen}\beta x\right], \\
&= e^{\alpha x}\left[(A_1 + A_2)\mathsf{Cos}\beta x + i(A_1 - A_2)\mathsf{Sen}\beta x\right], \\
\Rightarrow y &= e^{\alpha x}\left[c_1\mathsf{Cos}\beta x + c_2\mathsf{Sen}\beta x\right] = c_1 e^{\alpha x}\mathsf{Cos}\beta x + c_2 e^{\alpha x}\mathsf{Sen}\beta x,
\end{aligned}$$

en donde se han realizado las siguientes sustituciones:

$$c_1 = A_1 + A_2 \;\;\&\;\; c_2 = i(A_1 - A_2),$$

por tanto, tenemos:

$$y_1 = e^{\alpha x}\mathsf{Cos}\beta x \;\;\&\;\; y_2 = e^{\alpha x}\mathsf{Sen}\beta x,$$

las cuales representan un conjunto de funciones **reales**, linealmente independientes, que forman un **conjunto fundamental**.

Ejemplo

$$y'' + 4y' + 7y = 0 \quad \rightarrow \quad m^2 + 4m + 7 = 0 \;\; \forall \;\; y = e^{mx}$$

resolviendo la ecuación auxiliar obtenida,

$$m^2 + 4m + 7 = 0 \quad \rightarrow \quad m_1 = -2 + i\sqrt{3} \;\; \& \;\; m_2 = -2 - i\sqrt{3},$$

$\therefore$ tenemos **dos soluciones** complejas conjugadas de la ec. auxiliar,

$$y_1 = e^{m_1 x} = e^{-2x} e^{i\sqrt{3}x} \;\; \& \;\; y_2 = e^{m_2 x} = e^{-2x} e^{-i\sqrt{3}x},$$

construyendo la solución general,

$$\begin{aligned} y &= A_1 y_1 + A_2 y_2 = e^{-2x}\left[A_1 e^{i\sqrt{3}x} + A_2 e^{-i\sqrt{3}x}\right], \\ &= e^{-2x}\left[A_1 \text{Cos}\sqrt{3}x + iA_1 \text{Sen}\sqrt{3}x + A_2 \text{Cos}\sqrt{3}x - iA_2 \text{Sen}\sqrt{3}x\right], \\ y &= e^{-2x}\left[c_1 \text{Cos}\sqrt{3}x + c_2 \text{Sen}\sqrt{3}x\right] = c_1 e^{-2x} \text{Cos}\sqrt{3}x + c_2 e^{-2x} \text{Sen}\sqrt{3}x, \end{aligned}$$

en donde el **set completo** vendrá dado como,

$$y_1 = e^{-2x} \text{Cos}\sqrt{3}x \;\; \& \;\; y_2 = e^{-2x} \text{Sen}\sqrt{3}x.$$

Contenido: Tema 03

Recordemos que para resolver una ecuación diferencial lineal **no-homogénea**

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = g(x),$$

debemos:

- encontrar la **función complementaria** y_c, mediante la solución de la ec. homogénea asociada,

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

- econtrar alguna **solución particular** y_p de la ec. no-homogénea original,

de esta manera se obtendrá la **solución general** de la ecuación diferencial no-homogénea,

$$y = y_c + y_p.$$

Coeficientes indeterminados

Método de coeficientes indeterminados

El método de **coeficientes indeterminados** se utiliza para hallar la **solución particular** y_p, y se puede aplicar bajo las sig. condiciones:

- la ecuación diferencial posee **coeficientes constantes**,
- la función $g(x)$ y **todas** sus derivadas pueden ser descritas en términos del mismo set **finito** de funciones linealmente independientes

$$\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}\,.$$

En tal caso, la solución particular se expresa como una combinación lineal de dicho set,

$$y_p(x) = A_1 y_1(x) + A_2 y_2(x) + \ldots + A_n y_n(x),$$

en donde $A_1, A_2, \ldots, A_n$ denotan **constantes** arbitrarias que deben ser determinadas, evaluando y_p en la ED no-homogénea.

Coeficientes indeterminados

Set linealmente independiente: Caso I

Caso I: $g(x) = p_n(x)$

Cuando tenemos un polinomio de grado n en la variable independiente x para $g(x)$, se asume la siguiente forma para la solución particular,

$$y_p = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \ldots + A_1 x + A_0.$$

Ejemplo

$$y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6,$$

como primer paso resolvemos la ecuación homogénea asociada,

$$y'' + 4y' - 2y = 0 \quad \rightarrow \quad m^2 + 4m - 2 = 0 \;\; \forall \;\; y = e^{mx},$$
$$\therefore \quad m_1 = -2 - \sqrt{6} \;\; \& \;\; m_2 = -2 + \sqrt{6},$$

por tanto, la **función complementaria** será,

$$y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x}.$$

Coeficientes indeterminados

Set linealmente independiente: Caso I

El siguiente paso será **asumir** la forma para la **solución particular**,

$$g(x) = 2x^2 - 3x + 6 \quad \Rightarrow \quad y_p = A_2x^2 + A_1x + A_0,$$

calculando las derivadas de la propuesta de y_p:

$$y_p{}' = 2A_2x + A_1 \;\;\&\;\; y_p{}'' = 2A_2,$$

sustituyendo en la ED no-homogénea original,

$$\begin{aligned}
& y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6, \\
\Rightarrow \quad & (2A_2) + 4\,(2A_2x + A_1) - 2\left(A_2x^2 + A_1x + A_0\right) = 2x^2 - 3x + 6, \\
\therefore \quad & -2A_2x^2 + (8A_2 - 2A_1)\,x + 2A_2 + 4A_1 - 2A_0 = 2x^2 - 3x + 6,
\end{aligned}$$

comparando coeficientes de términos con potencias iguales a ambos lados de la igualdad, tenemos:

$$\begin{aligned}
-2A_2 &= 2, \\
8A_2 - 2A_1 &= -3, \\
2A_2 + 4A_1 - 2A_0 &= 6,
\end{aligned}$$

resolviendo el sistema de ecuaciones para los coeficientes $A_i \quad \forall \quad i = 0, 1, 2$,

$$\begin{aligned} -2A_2 = 2 \quad &\rightarrow \quad A_2 = -1, \\ 8A_2 - 2A_1 = -3 \quad &\rightarrow \quad A_1 = -5/2, \\ 2A_2 + 4A_1 - 2A_0 = 6 \quad &\rightarrow \quad A_0 = -9, \end{aligned}$$

por tanto, la solución particular será,

$$y_p = A_2 x^2 + A_1 x + A_0 \quad \Rightarrow \quad y_p = -x^2 - \frac{5}{2}x - 9,$$

siendo que la **solución general** de la ecuación dada es,

$$y = y_c + y_p = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x} - x^2 - \frac{5}{2}x - 9.$$

Caso II: $g(x) = ke^{\alpha x}$

en donde k y α son ambas constantes conocidas, entonces asumimos como solución,

$$y_p = Ae^{\alpha x}.$$

Ejemplo

$$y'' - 2y' - 3y = 6e^{2x},$$

como primer paso resolvemos la ecuación homogénea asociada,

$$y'' - 2y' - 3y = 0 \quad \rightarrow \quad m^2 - 2m - 3 = 0 \;\; \forall \;\; y = e^{mx},$$
$$(m-3)(m+1) = 0 \quad \therefore \quad m_1 = 3 \;\; \& \;\; m_2 = -1,$$

por tanto, la **función complementaria** será,

$$y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}.$$

Coeficientes indeterminados

Set linealmente independiente: Caso II

El siguiente paso será **asumir** la forma para la **solución particular**,

$$g(x) = 6e^{2x} \quad \Rightarrow \quad y_p = ke^{2x},$$

calculando las derivadas de la propuesta de y_p:

$$y_p{}' = 2ke^{2x} \;\; \& \;\; y_p{}'' = 4ke^{2x},$$

sustituyendo en la ED no-homogénea original,

$$\begin{aligned} & y'' - 2y' - 3y = 6e^{2x}, \\ \Rightarrow \quad & \left(4ke^{2x}\right) - 2\left(2ke^{2x}\right) - 3\left(ke^{2x}\right) = 6e^{2x}, \\ \therefore \quad & -3ke^{2x} = 6e^{2x}, \end{aligned}$$

comparando el coeficiente a ambos lados de la igualdad,

$$-3k = 6 \quad \Rightarrow \quad k = -2 \quad \therefore \quad y_p = -2e^{2x},$$

por tanto, la **solución general** de la ED dada es,

$$y = y_c + y_p = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} - 2e^{2x}.$$

Caso III: $g(x) = k_1\text{Cos}\beta x + k_2\text{Sen}\beta x$

en donde k_1, k_2 y β son constantes conocidas, se asume la siguiente forma para la solución particular,

$$y_p = A\text{Cos}\beta x + B\text{Sen}\beta x.$$

Ejemplo

$$y'' - 2y' + y = 2\text{Sen}3x,$$

como primer paso resolvemos la ecuación homogénea asociada,

$$y'' - 2y' + y = 0 \quad \to \quad m^2 - 2m + 1 = 0 \;\; \forall \;\; y = e^{mx},$$
$$(m-1)^2 = 0 \quad \therefore \quad m_1 = m_2 = 1,$$

por tanto, la **función complementaria** será,

$$y_c = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1e^x + c_2xe^x.$$

Coeficientes indeterminados

Set linealmente independiente: Caso III

El siguiente paso será **asumir** la forma para la **solución particular**,

$$g(x) = 2\text{Sen}3x \quad \Rightarrow \quad y_p = A\text{Cos}3x + B\text{Sen}3x,$$

calculando las derivadas de la propuesta de y_p:

$$y_p{}' = -3A\text{Sen}3x + 3B\text{Cos}3x \;\;\&\;\; y_p{}'' = -9A\text{Cos}3x - 9B\text{Sen}3x,$$

sustituyendo en la ED no-homogénea original,

$$\begin{aligned}
& y'' - 2y' + y = 2\text{Sen}3x, \\
\Rightarrow \quad & (-9A\text{Cos}3x - 9B\text{Sen}3x) - 2\,(-3A\text{Sen}3x + 3B\text{Cos}3x) + \ldots \\
& \ldots + (A\text{Cos}3x + B\text{Sen}3x) = 2\text{Sen}3x, \\
\therefore \quad & (-8A - 6B)\text{Cos}3x + (6A - 8B)\text{Sen}3x = 2\text{Sen}3x,
\end{aligned}$$

comparando coeficientes de las funciones trigonométricas iguales a ambos lados de la igualdad, tenemos:

$$\begin{aligned}
-8A - 6B &= 0, \\
6A - 8B &= 2,
\end{aligned}$$

Coeficientes indeterminados

Set linealmente independiente: Caso III

resolviendo el sistema de ecuaciones para los coeficientes A y B,

$$-8A - 6B = 0 \quad \rightarrow \quad -48A - 36B = 0,$$
$$6A - 8B = 2 \quad \rightarrow \quad +48A - 64B = 16,$$

sumando ambas ecuaciones, se obtiene:

$$-100B = 16 \quad \rightarrow \quad B = -\frac{4}{25}$$
$$\Rightarrow \quad -8A - 6B = 0 \quad \rightarrow \quad 8A = (-6)\left(-\frac{4}{25}\right) \quad \rightarrow \quad A = \frac{3}{25}.$$

por tanto, la solución particular será,

$$y_p = A\text{Cos}3x + B\text{Sen}3x \quad \Rightarrow \quad y_p = \frac{3}{25}\text{Cos}3x - \frac{4}{25}\text{Sen}3x,$$

siendo que la **solución general** de la ecuación dada es,

$$y = y_c + y_p = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{3}{25}\text{Cos}3x - \frac{4}{25}\text{Sen}3x.$$

Coeficientes indeterminados

Set linealmente independiente: generalización

En las ED donde $g(x)$ sea un **producto** de términos considerados en los casos I a III, se propone como la solución particular el **producto** de las soluciones propuestas correspondientes,

$$\begin{aligned} & g(x) = e^{\alpha x} p_n(x), \\ \rightarrow\quad & y_p = e^{\alpha x}(A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \ldots + A_1 x + A_0), \\ & g(x) = e^{\alpha x} p_n(x)\text{Sen}\beta x, \\ \rightarrow\quad & y_p = e^{\alpha x}\text{Sen}\beta x(A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \ldots + A_1 x + A_0) + \ldots \\ & \ldots + e^{\alpha x}\text{Cos}\beta x(B_n x^n + B_{n-1}x^{n-1} + \ldots + B_1 x + B_0). \end{aligned}$$

Para el caso en que $g(x)$ sea una **suma** de términos considerados, entonces la sol. particular será la **suma** de las soluciones propuestas,

$$\begin{aligned} & g(x) = k_1 e^{\alpha x} + p_n(x) + k_2\text{Sen}\beta x, \\ \rightarrow\quad & y_p = Ce^{\alpha x} + A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \ldots + A_1 x + A_0 + \ldots \\ & \ldots + B_1\text{Sen}\beta x + B_2\text{Cos}\beta x. \end{aligned}$$

Consideremos la siguiente ecuación diferencial,

$$y'' + 4y = x\text{Cos}x$$

resolviendo en primera instancia la ecuación homogénea asociada,

$$\begin{aligned} & y'' + 4y = 0 \quad \rightarrow \quad m^2 + 4 = 0 \;\; \forall \;\; y = e^{mx}, \\ \therefore \quad & m_1 = 2i \;\; \& \;\; m_2 = -2i, \end{aligned}$$

por tanto, la **función complementaria** será,

$$\begin{aligned} y_c &= c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{2ix} + c_2 e^{-2ix}, \\ &= c_1 \left(\text{Cos}2x + i\text{Sen}2x\right) + c_2 \left(\text{Cos}2x - i\text{Sen}2x\right), \\ &= (c_1 + c_2)\text{Cos}2x + i(c_1 - c_2)\text{Sen}2x, \\ &= A_1 \text{Cos}2x + A_2 \text{Sen}2x.^{10} \end{aligned}$$

[10] en donde hemos realizado la sig. sustitución: $A_1 = c_1 + c_2$, & $A_2 = i(c_1 - c_2)$

Coeficientes indeterminados

Set linealmente independiente: generalización, ejemplos

Se procede ahora a construir la propuesta de **solución particular** en función de la forma de $g(x)$,

$$g(x) = x\text{Cos}x \quad \leftarrow \quad \text{prod. de } \textbf{polinomio} \text{ por func. } \textbf{Coseno},$$

$$\Rightarrow \quad y_p = (B_1 x + B_0)\text{Cos}x + (C_1 x + C_0)\text{Sen}x,$$

calculando las derivadas de y_p,

$$\begin{aligned} {y'}_p &= B_1\text{Cos}x - (B_1 x + B_0)\text{Sen}x + C_1\text{Sen}x + (C_1 x + C_0)\text{Cos}x, \\ {y''}_p &= -B_1\text{Sen}x - B_1\text{Sen}x - (B_1 x + B_0)\text{Cos}x + \ldots \\ &\quad \ldots + C_1\text{Cos}x + C_1\text{Cos}x - (C_1 x + C_0)\text{Sen}x, \\ &= -2B_1\text{Sen}x - (B_1 x + B_0)\text{Cos}x + 2C_1\text{Cos}x - (C_1 x + C_0)\text{Sen}x. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ED no-homogénea,

$$\begin{aligned} & y'' + 4y = x\text{Cos}x, \\ \therefore \quad & [-2B_1\text{Sen}x - (B_1 x + B_0)\text{Cos}x + 2C_1\text{Cos}x - (C_1 x + C_0)\text{Sen}x] + \ldots \\ & \ldots + 4\,[(B_1 x + B_0)\text{Cos}x + (C_1 x + C_0)\text{Sen}x] = x\text{Cos}x, \end{aligned}$$

agrupando términos comunes en la expresión anterior,

$$[-2B_1\text{Sen}x - (B_1x + B_0)\text{Cos}x + 2C_1\text{Cos}x - (C_1x + C_0)\text{Sen}x] + \ldots$$
$$\ldots + 4\left[(B_1x + B_0)\text{Cos}x + (C_1x + C_0)\text{Sen}x\right] = x\text{Cos}x,$$
$$\Rightarrow \quad [-2B_1 + 3C_0]\,\text{Sen}x + [3B_0 + 2C_1]\,\text{Cos}x + \ldots$$
$$\ldots + [3C_1]\,x\text{Sen}x + [3B_1]\,x\text{Cos}x = x\text{Cos}x,$$

y comparando en ambos lados de la ecuación,

$$-2B_1 + 3C_0 = 0, \quad 3B_0 + 2C_1 = 0, \quad 3C_1 = 0, \quad 3B_1 = 1,$$

resolviendo el sistema de ecuaciones, obtenemos para las ctes,

$$B_1 = 1/3, \quad C_1 = 0, \quad B_0 = 0, \quad C_0 = 2/9,$$

obteniendo como solución particular, y solución general lo siguiente:

$$y_p = (1/3)x\text{Cos}x + (2/9)\text{Sen}x,$$
$$\therefore \quad y = y_c + y_p = A_1\text{Cos}2x + A_2\text{Sen}2x + x(1/3)\text{Cos}x + (2/9)\text{Sen}x.$$

Coeficientes indeterminados

Set linealmente independiente: generalización, ejemplos

Consideremos la siguiente ecuación diferencial,

$$y'' - 8y' + 25y = 5x^3e^{-x} - 7e^{-x}$$

resolviendo en primera instancia la ecuación homogénea asociada,

$$y'' - 8y + 25 = 0 \quad \rightarrow \quad m^2 - 8y + 25 = 0 \;\; \forall \;\; y = e^{mx},$$
$$\therefore \quad m_1 = 4 + 3i \;\; \& \;\; m_2 = 4 - 3i,$$

por tanto, la **función complementaria** será,

$$\begin{aligned} y_c &= c_1y_1 + c_2y_2 = c_1e^{4x}e^{3ix} + c_2e^{4x}e^{-3ix}, \\ &= c_1e^{4x}\left(\text{Cos}3x + i\text{Sen}3x\right) + c_2e^{4x}\left(\text{Cos}2x - i\text{Sen}3x\right), \\ &= (c_1 + c_2)e^{4x}\text{Cos}3x + i(c_1 - c_2)e^{4x}\text{Sen}3x, \\ &= A_1e^{4x}\text{Cos}3x + A_2e^{4x}\text{Sen}3x.^{11} \end{aligned}$$

---

[11] en donde hemos realizado la sig. sustitución: $A_1 = c_1 + c_2$, & $A_2 = i(c_1 - c_2)$

Se procede ahora a construir la propuesta de **solución particular** en función de la forma de $g(x)$,

$$\begin{aligned} g(x) &= 5x^3e^{-x} - 7e^{-x} = (5x^3-7)e^{-x} \quad \leftarrow \quad \textbf{polinomio} \times \textbf{exp.}, \\ \Rightarrow \quad y_p &= (B_3x^3 + B_2x^2 + B_1x + B_0)e^{-x}, \end{aligned}$$

calculando las derivadas de y_p,

$$\begin{aligned} y'_p &= \left[-B_3x^3 + (3B_3 - B_2)x^2 + (2B_2 - B_1)x + (B_1 - B_0)\right] e^{-x}, \\ y''_p &= \Big[B_3x^3 + (-9B_3 + B_2)x^2 + (6B_3 - 4B_2 + B_1)x + \ldots \\ &\quad \ldots + (2B_2 - 2B_1 + B_0)\Big] e^{-x}, . \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ED no-homogénea,

$$\begin{aligned} & y'' - 8y' + 25y = 5x^3e^{-x} - 7e^{-x}, \\ \therefore \quad & \Big[34B_3x^3 + (-33B_3 + 34B_2)x^2 + (6B_3 - 20B_2 + 34B_1)x + \ldots \\ & \ldots + (2B_2 - 10B_1 + 34B_0)\Big] = (5x^3 - 7)e^{-x}, \end{aligned}$$

Coeficientes indeterminados

Set linealmente independiente: generalización, ejemplos

y comparando en ambos lados de la ecuación los coeficientes de términos con la misma potencia,

$$x^3 : \; 34B_3 = 5, \quad x^2 : \; -3B_3 + 34B_2 = 0,$$
$$x : 6B_3 - 20B_2 + 34B_1 = 0, \quad \text{indep.} : \; 2B_2 - 10B_1 + 34B_0 = -7,$$

al resolver el sistema de ecs. anterior para las constantes $A_i \;\; \forall \;\; i = 0 \;\to\; 3$, se obteniene la **solución particular**,

$$y_p = (B_3x^3 + B_2x^2 + B_1x + B_0)e^{-x},$$

teniendo finalmente la **solución general** del problema,

$$\begin{aligned} y &= y_c + y_p \\ &= A_1e^{4x}\text{Cos}3x + A_2e^{4x}\text{Sen}3x + (B_3x^3 + B_2x^2 + B_1x + B_0)e^{-x}. \end{aligned}$$

Coeficientes indeterminados

Set linealmente independiente: degeneración de soluciones

Consideremos la siguiente ED no-homogénea,

$$y'' - 2y' + y = e^x,$$

como primer paso resolvemos la ecuación homogénea asociada,

$$y'' - 2y' + y = 0 \quad \rightarrow \quad m^2 - 2m + 1 = 0 \;\; \forall \;\; y = e^{mx},$$
$$(m-1)^2 = 0 \quad \therefore \quad m_1 = m_2 = 1,$$

por tanto, la **función complementaria** será,

$$y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^x + c_2 x e^x.$$

Proponiendo ahora una forma para la **solución particular**,

$$\begin{aligned} g(x) &= e^x \quad \leftarrow \quad \textbf{func. exponencial}, \\ \Rightarrow \; y_p &= A e^x, \end{aligned}$$

Coeficientes indeterminados

Set linealmente independiente: degeneración de soluciones

el siguiente paso sería calcular las derivadas de la propuesta y_p,

$$y_p = Ae^x \quad \Rightarrow \quad {y_p}' = {y_p}'' = Ae^x,$$

sustituyendo en la ED no-homogénea,

$$\begin{aligned} & y'' - 2y' + y = e^x, \\ \therefore \quad & Ae^x - 2Ae^x + Ae^x = e^x \quad \Rightarrow \quad 0 = e^x!!! \end{aligned}$$

El aparente problema en esta ED proviene de la forma de la función **complementaria** y la propuesta de solución **particular**,

$$y_c = c_1 e^x + c_2 x e^x \quad \& \quad y_p = Ae^x,$$

ya que se observa una **degeneración** entre ambas funciones, la cual debe ser **removida** de la manera estándar:

$$y_p = Ae^x \text{ ✗ } \quad y_p = Axe^x \text{ ✗ } \quad y_p = Ax^2e^x \text{ ✓}$$

Coeficientes indeterminados

Set linealmente independiente: degeneración de soluciones

Utilizando la nueva propuesta para la solución **particular**,

$$y_p = Ax^2e^x \;\rightarrow\; {y_p}' = 2Axe^x + Ax^2e^x \;\rightarrow\; {y_p}'' = 2Ae^x + 4Axe^x + Ax^2e^x,$$

sustituyendo en la ED no-homogénea,

$$\begin{aligned} & y'' - 2y' + y = e^x, \\ \therefore \quad & \left[2Ae^x + 4Axe^x + Ax^2e^x\right] - 2\left[2Axe^x + Ax^2e^x\right] + Ax^2e^x = e^x \end{aligned}$$

agrupando términos de misma potencia y comparando ambos lados de la igualdad tenemos,

$$2Ae^x = e^x \quad \Rightarrow \quad A = 1/2,$$

por tanto, tenemos para la solución **particular** y la **solución general**:

$$\begin{aligned} y_p &= (1/2)x^2e^x, \\ \therefore \quad y &= y_c + y_p = c_1e^x + c_2xe^x + (1/2)x^2e^x. \end{aligned}$$

Contenido: Tema 03

Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

Eliminación sistemática

Un sistema de ecuaciones diferenciales debe cumplir con las siguientes características:

- formarse por **dos** o **más** ED con coeficentes **constantes**,
- contener derivadas de **dos** o **más** variables **dependientes** respecto a **una** sola variable **independiente**.

Para resolver un sistema de ED con tales características, se utiliza el método de **eliminación sistemática**, el cual se ejemplifica resolviendo el sig. sistema,

$$\frac{dx}{dt} = 3y \quad \& \quad \frac{dy}{dt} = 2x,$$

expresando ahora el sistema en operadores diferenciales $D^n = d/dx^n$,

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad & Dx = 3y \quad \& \quad Dy = 2x, \\ \therefore \qquad & Dx - 3y = 0 \quad \& \quad 2x - Dy = 0, \end{aligned}$$

por tanto, para resolver el sistema anterior aplicamos lo siguiente:

$$\begin{array}{lclcl} Dx - 3y = 0 & \rightarrow & 2)\, Dx - 3y = 0, & \rightarrow & 2Dx - 6y = 0, \\ 2x - Dy = 0 & \rightarrow & -D)\, 2x - Dy = 0, & \rightarrow & -2Dx + D^2y = 0, \end{array}$$

sumando las ecs. anteriores se eliminan los términos Dx, resultando:

$$D^2y - 6y = 0,$$

la cual representa una ED sólo en una variable, resolviendo:

$$y_1 = e^{\sqrt{6}t}, \quad y_2 = e^{-\sqrt{6}t},$$ [12]

por tanto, la solución para $y(t)$ será,

$$y(t) = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1e^{\sqrt{6}t} + c_2e^{-\sqrt{6}t}.$$

[12] $y = e^{mt} \Rightarrow m^2 - 6 = 0 \Rightarrow m_1 = \sqrt{6}$, $m_2 = -\sqrt{6}$.

Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

Eliminación sistemática

Para obtener la sol. de $x(t)$, regresamos al sistema original y eliminamos la variable $y(t)$,

$$\begin{array}{lcl} Dx - 3y = 0 & \rightarrow & D)\, Dx - 3y = 0, \quad \rightarrow \quad D^2x - 3Dy = 0, \\ 2x - Dy = 0 & \rightarrow & -3)\, 2x - Dy = 0, \quad \rightarrow \quad -6x + 3Dy = 0, \end{array}$$

sumando las ecs. anteriores ahora se eliminan los términos Dy, resultando:

$$D^2x - 6x = 0,$$

resolviendo:

$$x_1 = e^{\sqrt{6}t}, \quad x_2 = e^{-\sqrt{6}t},$$

por tanto, la solución para $x(t)$ será,

$$x(t) = b_1x_1 + b_2x_2 = b_1e^{\sqrt{6}t} + b_2e^{-\sqrt{6}t}.$$

Por tanto, obtenemos para las dos funciones dependientes $y(t)$ y $x(t)$,

$$
\begin{aligned}
y(t) &= c_1 e^{\sqrt{6}t} + c_2 e^{-\sqrt{6}t}, \\
x(t) &= b_1 e^{\sqrt{6}t} + b_2 e^{-\sqrt{6}t},
\end{aligned}
$$

sin embargo, el sistema sólo permite **dos constantes**, y tenemos cuatro, dos por ecuación, lo que significa que las ctes. están **relacionadas** mediante las ED del sistema,

$$
\frac{dx}{dt} = 3y \quad \& \quad \frac{dy}{dt} = 2x,
$$

usando una de ellas para encontrar la relación,

$$
\begin{aligned}
& \frac{dx}{dt} = 3y \quad \forall \quad y(t) = c_1 e^{\sqrt{6}t} + c_2 e^{-\sqrt{6}t}, \quad x(t) = b_1 e^{\sqrt{6}t} + b_2 e^{-\sqrt{6}t} \\
\Rightarrow \quad & \sqrt{6}\left(b_1 e^{\sqrt{6}t} - b_2 e^{-\sqrt{6}t}\right) - 3\left(c_1 e^{\sqrt{6}t} + c_2 e^{-\sqrt{6}t}\right) = 0, \\
\therefore \quad & \left(\sqrt{6}b_1 - 3c_1\right) e^{\sqrt{6}t} + \left(-\sqrt{6}b_2 - 3c_2\right) e^{-\sqrt{6}t} = 0,
\end{aligned}
$$

para que la ecuación anterior se cumpla, ambas expresiones se tienen que eliminar, una a una,[13]

$$
\begin{aligned}
& \left(\sqrt{6}b_1 - 3c_1\right)e^{\sqrt{6}t} + \left(-\sqrt{6}b_2 - 3c_2\right)e^{-\sqrt{6}t} = 0, \\
\Rightarrow \quad & \sqrt{6}b_1 - 3c_1 = 0 \quad \& \quad -\sqrt{6}b_2 - 3c_2 = 0, \\
\therefore \quad & c_1 = \frac{\sqrt{6}}{3}b_1, \quad \& \quad c_2 = -\frac{\sqrt{6}}{3}b_2,
\end{aligned}
$$

obteniendo así que la solución del sistema es, finalmente,

$$
\begin{aligned}
x(t) &= b_1 e^{\sqrt{6}t} + b_2 e^{-\sqrt{6}t}, \\
y(t) &= c_1 e^{\sqrt{6}t} + c_2 e^{-\sqrt{6}t} = \frac{\sqrt{6}}{3}b_1 e^{\sqrt{6}t} - \frac{\sqrt{6}}{3}b_2 e^{-\sqrt{6}t}.
\end{aligned}
$$

[13] debido a la independiencia lineal de las funciones exponenciales.