Contenido

4. Modelos lineales oscilatorios

Contenido: Tema 04

Contenido: Tema 04

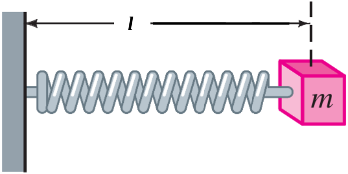
Oscilaciones

Movimiento libre: ley de Hooke

Consideremos un resorte, el cual genera una fuerza de **restitución**, descrita por la **ley de Hooke**,

$$F = -kx \quad \forall \quad k = \textbf{cte. del resorte}, \quad x = \textbf{desplazamiento}.$$

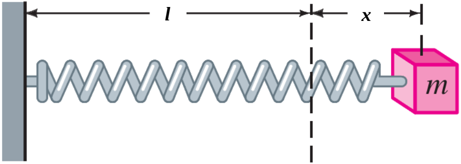
Equilibrio



$$F = -kx = 0,$$

debido a que el resorte se encuentra **sin estirar**.

Movimiento



Por la 2^a **ley de Newton**,

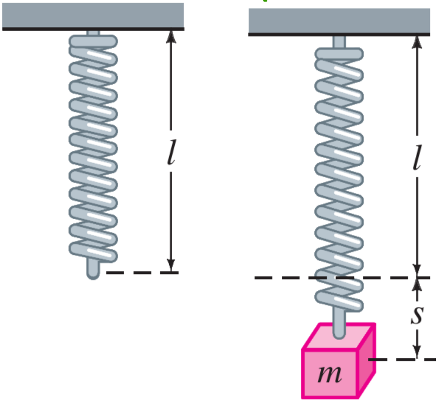
$$F = ma = m\dot{x} = m\ddot{x},$$

$$\Rightarrow \quad m\ddot{x} = -kx,$$

$$\therefore \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

en donde $\omega = \sqrt{k/m}$.

Sin estirar **Equilibrio**



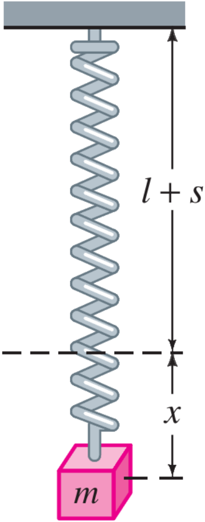
Sin estirar

$$\begin{aligned} & F = -kx, \\ & \Rightarrow F = 0. \end{aligned}$$

Equilibrio

$$\begin{aligned} F &= -ks + mg, \\ \text{pero:} \quad F &= m\ddot{x} = 0, \\ \therefore \quad 0 &= -ks + mg, \\ \Rightarrow \quad ks &= mg. \end{aligned}$$

Movimiento



$$
\begin{aligned}
F &= -ks + mg - kx, \\
\therefore \quad m\ddot{x} &= -ks + mg - kx, \\
\text{pero:} \quad ks &= mg, \\
\Rightarrow \quad m\ddot{x} &= -kx,
\end{aligned}
$$

obteniendo así, la **ecuación de movimiento**,

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \;\; \forall \;\; \omega = \sqrt{k/m},$$

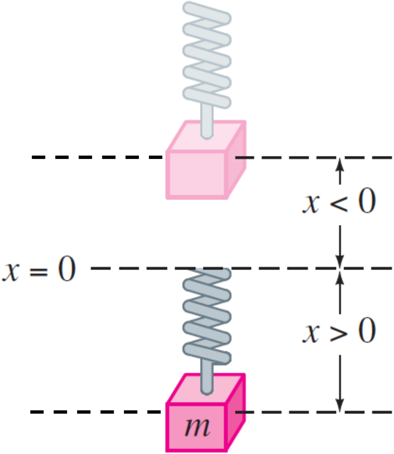
de donde se obtienen las siguientes propiedades,

$$\textbf{Periodo} \quad \rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega},$$

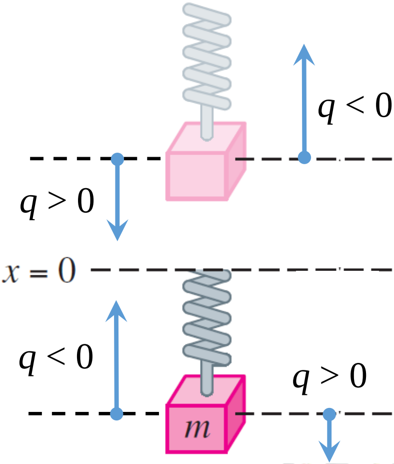
$$\textbf{Frecuencia} \quad \rightarrow \quad \nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Movimiento libre: convención de signos

Posición



Velocidad y Fuerzas



Resolviendo la **ecuación de movimiento** obtenida anteriormente,

$$
\begin{aligned}
& \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \rightarrow \quad m^2 + \omega^2 = 0 \;\; \forall \;\; x = e^{mt}, \\
\Rightarrow \quad & m_1 = i\omega \;\; \& \;\; m_2 = -i\omega, \\
\therefore \quad & x_1 = e^{i\omega t} \;\; \& \;\; x_2 = e^{-i\omega t},
\end{aligned}
$$

por tanto, la solución será,

$$x(t) = A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t},$$

la cual puede ser transformada por medio de la fórmula de Euler, [1]

$$
\begin{aligned}
x(t) &= A_1\left(\text{Cos}\omega t + i\text{Sen}\omega t\right) + A_2\left(\text{Cos}\omega t - i\text{Sen}\omega t\right), \\
x(t) &= \left(A_1 + A_2\right)\text{Cos}\omega t + i\left(A_1 - A_2\right)\text{Sen}\omega t, \\
x(t) &= B_1\text{Cos}\omega t + B_2\text{Sen}\omega t.
\end{aligned}
$$

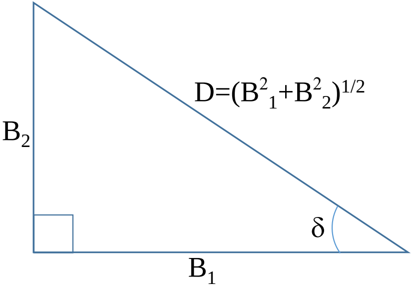
[1] $e^{i\theta} = \text{Cos}\theta + i\text{Sen}\theta$.

Para obtener otra expresión equivalente de la solución, consideremos:

$$x(t) = B_1 \text{Cos}\omega t + B_2 \text{Sen}\omega t,$$

redefiniendo,

$$\begin{aligned} \text{Sen}\delta &= \frac{B_2}{\left(B_1^2 + B_2^2\right)^{1/2}} = \frac{B_2}{D}, \\ \text{Cos}\delta &= \frac{B_1}{\left(B_1^2 + B_2^2\right)^{1/2}} = \frac{B_1}{D}, \end{aligned}$$



sustituyendo,

$$\begin{aligned} x(t) &= D\text{Cos}\delta\text{Cos}\omega t + D\text{Sen}\delta\text{Sen}\omega t, \\ x(t) &= D\text{Cos}\left(\omega t - \delta\right), \end{aligned}$$

en donde D es la **amplitud** máxima y δ es la **fase** del movimiento.

Oscilaciones

Movimiento libre: ejemplo

Consideremos una masa que pesa 20 lb y al unirla a un resorte éste se elonga 6 in. La masa se libera al inicio desde un punto que se encuentra a 8 in por debajo de la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de 9 ft/s. Hallar la ec. de movimiento.

La ec. diferencial de movimiento es,

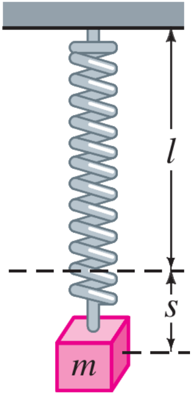
$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \;\;\forall\;\; \omega = \sqrt{k/m},$$

por tanto necesitamos obtener la **cte. del resorte** mediante la 2^a ley de Newton,

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_r + W, \\ \therefore \quad 0 &= -ks + W \quad \Rightarrow \quad k = W/s, \end{aligned}$$

sustituyendo los datos del problema,

$$W = 20 \text{ lb}, \quad s = (6) \times (1/12 \text{ ft}) = 1/2 \text{ ft}.$$



por tanto, tenemos:

$$k = W/s = \frac{20 \text{ lb}}{1/2 \text{ ft}} = 40 \text{ lb/ft}.$$

calculando ahora el valor de la masa,

$$m = W/g = \frac{20 \text{ lb}}{32 \text{ ft/s}^2} = 5/8 \text{ slug},$$

obteniendo así ω,

$$\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{\frac{40 \text{ lb/ft}}{5/8 \text{ lb s}^2/\text{ft}}} = 8 \text{ s}^{-1},$$

y finalmente la ec. diferencial de movimiento,

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} + 64x = 0.$$

Oscilaciones

Movimiento libre: ejemplo

Resolviendo la ED obtenida anteriormente,

$$\ddot{x} + 64x = 0 \;\; \rightarrow \;\; m^2 + 64 = 0 \;\; \forall \;\; x = e^{mt},$$
$$\therefore \;\; m_1 = 8i \;\; \& \;\; m_2 = -8i \;\; \Rightarrow \;\; x_1 = e^{8it} \;\; \& \;\; x_2 = e^{-8it},$$

contruyendo la solución general,

$$\begin{aligned} x(t) &= a_1 x_1 + a_2 x_2 = a_1 e^{8it} + a_2 e^{-8it}, \\ &= a_1 \left(\mathsf{Cos} 8t + i \mathsf{Sen} 8t \right) + a_2 \left(\mathsf{Cos} 8t - i \mathsf{Sen} 8t \right), \\ &= (a_1 + a_2) \mathsf{Cos} 8t + i(a_1 - a_2) \mathsf{Sen} 8t, \\ &= b_1 \mathsf{Cos} 8t + b_2 \mathsf{Sen} 8t, \end{aligned}$$

en donde $b_1 = (a_1 + a_2)$ y $b_2 = i(a_1 - a_2)$.

Oscilaciones

Movimiento libre: ejemplo

Ahora determinemos las constantes b_1 y b_2 mediante el uso de las **condiciones iniciales**,

$$x(0) = 8 \text{ in} = 2/3 \text{ ft} \;\;\&\;\; \dot{x}(0) = -9 \text{ ft/s},$$

$$\therefore \quad x(t) = b_1 \text{Cos}8t + b_2 \text{Sen}8t,$$

$$\dot{x}(t) = -8b_1 \text{Sen}8t + 8b_2 \text{Cos}8t,$$

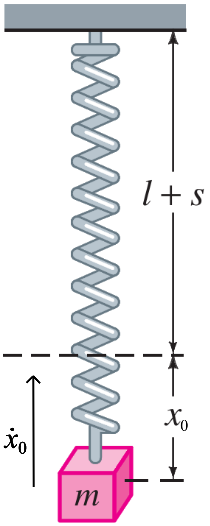
sustituyendo las condiciones iniciales,

$$x(0) = b_1 \text{Cos}(8\cdot 0) + b_2 \text{Sen}(8\cdot 0) \;\Rightarrow\; 2/3 = b_1,$$

$$\dot{x}(0) = -8b_1 \text{Sen}(8\cdot 0) + 8b_2 \text{Cos}(8\cdot 0) \;\Rightarrow\; -9 = 8b_2,$$

obteniendo finalmente la **ec. de movimiento**,

$$x(t) = \frac{2}{3}\text{Cos}8t - \frac{9}{8}\text{Sen}8t.$$



Si deseamos conocer la **máxima amplitud** del movimiento, entonces consideremos la sol. **compacta**,

$$x(t) = D\text{Cos}(\omega t - \delta) \;\; \& \;\; \dot{x}(t) = -D\omega\text{Sen}(\omega t - \delta),$$

susituyendo las condiciones iniciales: $x(0) = 2/3$ ft, $\dot{x}(0) = -9$ ft/s,

$$\begin{aligned} x(0) &= D\text{Cos}(8 \cdot 0 - \delta) \;\; \Rightarrow \;\; 2/3 = D\text{Cos}\delta, \\ \dot{x}(0) &= -8D\text{Sen}(8 \cdot 0 - \delta) \;\; \Rightarrow \;\; -9/8 = D\text{Sen}\delta. \end{aligned}$$

obteniendo el valor de la **amplitud** D,

$$D^2 = (2/3)^2 + (-9/8)^2 \;\; \Rightarrow \;\; D = \sqrt{985}/24 \approx 1.3077,$$

y también la **fase** δ,

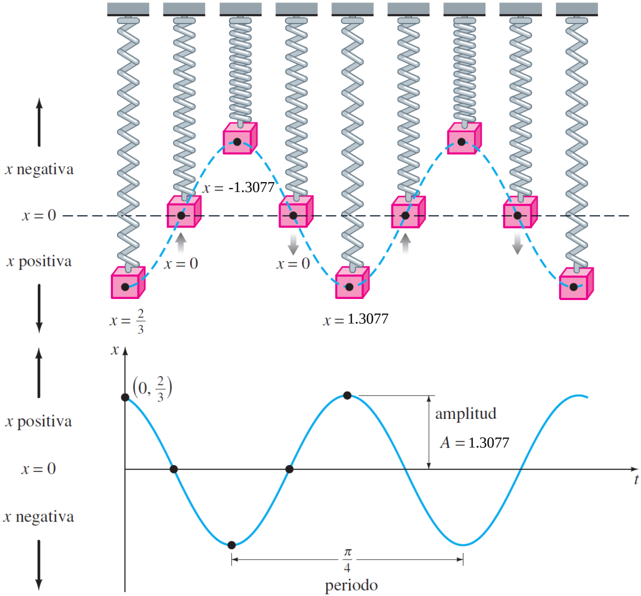
$$\text{Tan}\delta = \frac{2/3}{-9/8} = -\frac{16}{27} \;\; \Rightarrow \;\; \delta = -30.65^o = -0.535\text{rad}.$$

finalmente, tenemos la **ecuación de movimiento**,

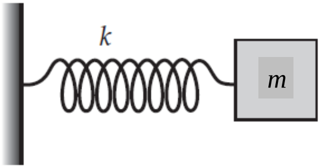
$$x(t) = 1.3077\ \text{Cos}(8t + 0.535).$$

Oscilaciones

Movimiento libre: ejemplo



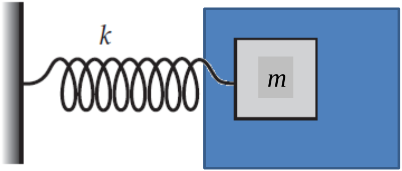
Movimiento libre



$$\begin{aligned} -kx &= F, \\ \Rightarrow \quad -kx &= m\ddot{x}, \\ \therefore \quad \ddot{x} + \omega^2 x &= 0, \end{aligned}$$

donde: $\omega = \sqrt{k/m}$.

Movimiento amortiguado



$$\begin{aligned} -kx - b\dot{x} &= F \quad \forall \quad b > 0, \\ \Rightarrow \quad -kx - b\dot{x} &= m\ddot{x}, \\ \therefore \quad \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2 x &= 0, \end{aligned}$$

donde: $\beta = b/2m$, $\omega = \sqrt{k/m}$ y $F_a = -b\dot{x}$ se le conoce como **fuerza de amortiguamiento**.

Resolviendo la ecuación diferencial obtenida anteriormente,

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \rightarrow \quad m^2 + 2\beta m + \omega^2 = 0 \;\; \forall \;\; x = e^{mt},$$

$$\Rightarrow \quad m = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega^2},$$

$$\therefore \quad m_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega^2} \;\; \& \;\; m_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega^2},$$

en donde la naturaleza de las soluciones x_1 y x_2 dependerá del comportamiento del **radical**,

$$\beta^2 - \omega^2 < 0, \quad \beta^2 - \omega^2 = 0, \quad \beta^2 - \omega^2 > 0.$$

Caso I: $\beta^2 - \omega^2 < 0$

en este caso el radical tendra una naturaleza **imaginaria**, por lo que las soluciones serán,

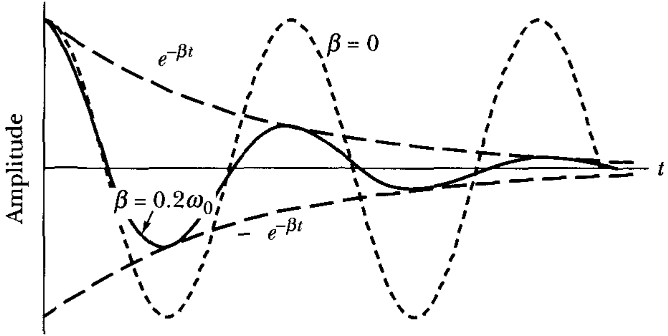
$$m_1 = -\beta + i\gamma \;\; \& \;\; m_2 = -\beta - i\gamma \;\; \forall \;\; \gamma^2 = \omega^2 - \beta^2,$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = e^{-\beta t} e^{i\gamma t} \;\; \& \;\; x_2 = e^{-\beta t} e^{-i\gamma t},$$

por tanto, la **ecuación de movimiento** será,

$$
\begin{aligned}
x(t) &= e^{-\beta t}\left[a_1 e^{i\gamma t} + a_2 e^{-i\gamma t}\right], \\
&= e^{-\beta t}\left[b_1 \text{Cos}\gamma t + b_2 \text{Sen}\gamma t\right],
\end{aligned}
$$

teniendo una función **oscilatoria decadente**, debido al término $e^{-\beta t}$, que resulta en un movimiento **subarmortiguado**.



Caso II: $\beta^2 - \omega^2 = 0$

ahora el radical se anula, por lo que las raices serán **degeneradas**,

$$m_1 = m_2 = -\beta \quad \Rightarrow \quad x_1 = e^{-\beta t} \;\;\&\;\; x_2 = te^{-\beta t},$$
$$\therefore \quad x(t) = a_1 e^{-\beta t} + a_2 e^{-\beta t} t = e^{-\beta t}\left[a_1 + a_2 t\right],$$

obteniendo así una función **decreciente**, lo que se conoce como un sistema con **amortiguamiento crítico**.

Caso III: $\beta^2 - \omega^2 > 0$

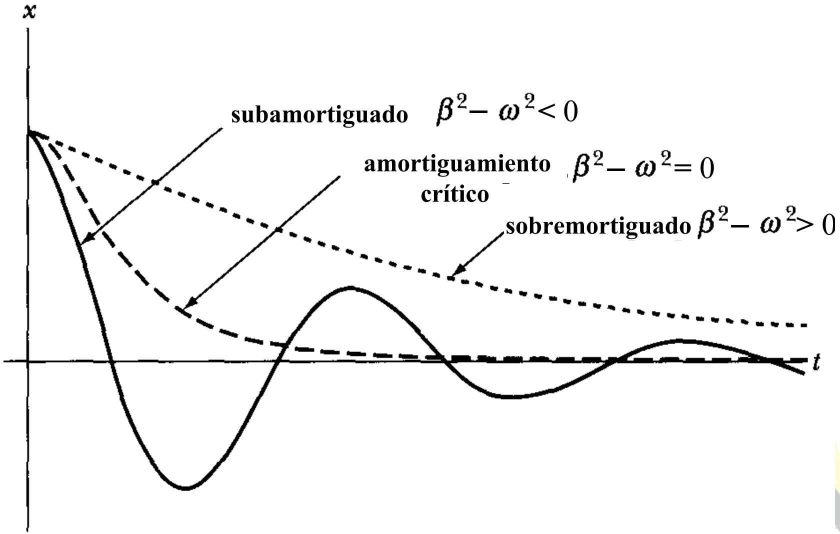
en este caso las raices serán **diferentes**,

$$m_1 = -\beta + \gamma \;\;\&\;\; m_2 = -\beta - \gamma \;\;\forall\;\; \gamma^2 = \beta^2 - \omega^2,$$
$$\Rightarrow \quad x_1 = e^{-\beta t} e^{\gamma t} \;\;\&\;\; x_2 = e^{-\beta t} e^{-\gamma t},$$
$$\therefore \quad x(t) = e^{-\beta t}\left[a_1 e^{\gamma t} + a_2 e^{-\gamma t}\right],$$

teniendo una solución que **decae** totalmente con el tiempo, representando un movimiento **sobreamortiguado**.

Oscilaciones

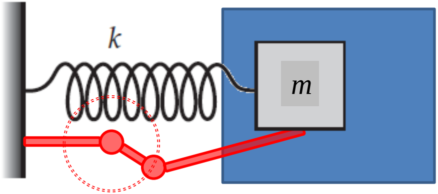
Movimiento amortiguado: comportamiento de las soluciones



Oscilaciones

Movimiento amortiguado y forzado

Consideremos el caso en que tenemos nuestro sistema oscilatorio amortiguado, al cual se le aplica una **fuerza externa** $f(t)$,



por tanto, deacuerdo con la 2^a ley de Newton, la ecuación diferencial vendrá dada como:

$$
\begin{aligned}
& m\ddot{x} = F_r + F_a + f(t) = -kx - b\dot{x} + f(t), \\
\Rightarrow \quad & m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f(t), \\
\therefore \quad & \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2 x = F(t),
\end{aligned}
$$

en donde $\beta = b/2m$, $\omega = \sqrt{k/m}$ y $F(t) = f(t)/m$.

La solución de la ED anterior constará de dos partes,

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t),$$

- **función complementaria $x_c(t)$**: solución de la ec. **homogénea**,

$$\begin{aligned} & \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2 x = 0, \\ \Rightarrow \quad & x_c(t) = e^{-\beta t}\left[a_1 e^{\gamma t} + a_2 e^{-\gamma t}\right] \quad \forall \quad \gamma = \sqrt{\beta^2 - \omega^2},^2 \end{aligned}$$

- **solución particular $x_p(t)$**: solución de la ec. **no-homogénea** tal que reproduzca $F(t)$ en la ED, normalmente una función oscilatoria.

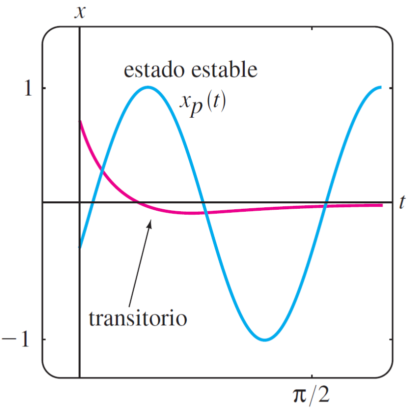
Debido a la naturaleza de las funciones x_c y x_p, tenemos que:

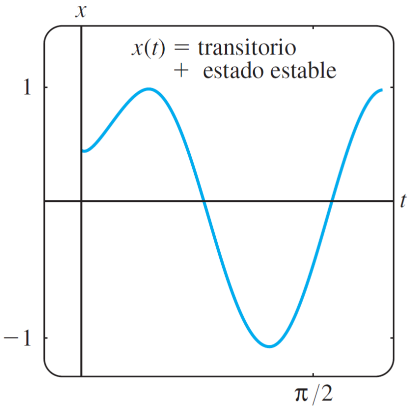
- x_c representa la parte **transitoria** de la solución,
- x_p es al comportamiento **estacionario** del movimiento del sistema.

[2] γ puede ser real, imaginario, o cero.

Oscilaciones

Movimiento amortiguado y forzado





donde:

Sol. transitoria $\rightarrow$ $x_c(t) = e^{-\beta t}\left[a_1 e^{\gamma t} + a_2 e^{-\gamma t}\right] \quad \forall \;\; \gamma = \sqrt{\beta^2 - \omega^2}$,

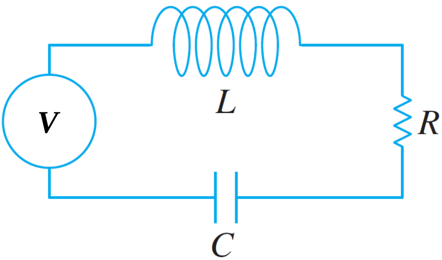
Sol. transitoria $\rightarrow$ $x_p(t) =$ función oscilatoria.

Contenido: Tema 04

Vibraciones eléctricas, circuitos en serie

Circuito LRC

Circuito en serie LRC



- **L**: inductor,
- **R**: resistencia,
- **C**: capacitor,
- **V**: fuente de voltaje,

en el circuito se tiene **corriente** $i(t) = dq/dt$ circulando que depende de la **carga** $q(t)$ eléctrica, y que sufre/induce cambios de voltaje en el mismo, dependiendo del elemento:

$$
\begin{aligned}
L &\rightarrow V_L = L\frac{di}{dt} = L\frac{d^2q}{dt^2}, \\
R &\rightarrow V_R = Ri = R\frac{dq}{dt}, \\
C &\rightarrow V_C = \frac{q}{C}.
\end{aligned}
$$

Vibraciones eléctricas, circuitos en serie

2^a ley de Kirchhoff

Para poder conocer el comportamiento de la **carga** eléctrica relacionamos los voltajes del circuito mediante la **2^a ley de Kirchhoff**,

$$\sum_j V_j = V_{ext} \quad \Rightarrow \quad V_L + V_R + V_C = V(t),$$

para nuestro circuito LRC, tenemos:

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = V(t),$$
$$\therefore \quad L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V(t),$$

lo cual representa una ED de segundo orden no-homogénea, que resolviendo nos da el comportamiento de la **carga** en términos del tiempo: $q(t)$.

Vibraciones eléctricas, circuitos en serie

Ecuación del circuito

Resolviendo la ED del circuito LRC,

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V(t),$$

comenzamos con la **homogénea** asociada,

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0 \quad \Rightarrow \quad m^2 + \frac{R}{L}m + \frac{1}{LC} = 0 \;\; \forall \;\; q = e^{mt},$$

resolviendo la ec. auxiliar,

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{2}\left(-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}}\right) \\ &= \frac{-R}{2L} \pm \frac{\sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L}. \end{aligned}$$

El comportamiento de las soluciones dependerá del **radical** $\sqrt{R^2 - 4L/C}$,

$R^2 - 4L/C < 0$

En este caso las $m's$ raices serán **complejas**,

$$m_1 = -\frac{R}{2L} + i\gamma \;\; \& \;\; m_2 = -\frac{R}{2L} - i\gamma \;\; \forall \;\; \gamma = \frac{\sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L}$$

obteniendo como soluciones,

$$\begin{aligned} & q_1 = e^{-(R/2L)t} e^{i\gamma t} \;\; \& \;\; q_2 = e^{-(R/2L)t} e^{-i\gamma t}, \\ \therefore \quad & q_c(t) = e^{-(R/2L)t} \left[a_1 e^{i\gamma t} + a_2 e^{-i\gamma t} \right], \\ \Rightarrow \quad & q_c(t) = e^{-(R/2L)t} \left[b_1 \text{Cos}\gamma t + b_2 \text{Sen}\gamma t \right], \end{aligned}$$

lo cual representa una función **oscilatoria**, que **decrece** en función del tiempo debido a $e^{-(R/2L)t}$, siendo un sistema **subamortiguado**.

Vibraciones eléctricas, circuitos en serie

Ecuación del circuito: amortiguamiento crítico

$R^2 - 4L/C = 0$

En este caso las m raices son **degeneradas**,

$$m_1 = m_2 = -\frac{R}{2L}$$

por tanto, las soluciones serán,

$$\begin{aligned} & q_1 = e^{-(R/2L)t} \quad \& \quad q_2 = e^{-(R/2L)t}t, \text{[3]} \\ \therefore \quad & q_c(t) = a_1 e^{-(R/2L)t} + a_3 e^{-(R/2L)t}t, \\ \Rightarrow \quad & q_c(t) = e^{-(R/2L)t}\left[a_1 + a_2 t\right], \end{aligned}$$

lo cual representa una función **decreciente** en términos del tiempo, que se conoce como **amortiguamiento crítico**.

[3] cuando se tienen raices degeneradas $q_2 = q_1 t$.

Vibraciones eléctricas, circuitos en serie

Ecuación del circuito: sistema sobreamortiguado

$R^2 - 4L/C > 0$

En este caso las $m's$ raices serán **diferentes**,

$$m_1 = -\frac{R}{2L} + \gamma \;\;\&\;\; m_2 = -\frac{R}{2L} - \gamma \;\;\forall\;\; \gamma = \frac{\sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L}$$

obteniendo como soluciones,

$$\begin{aligned} q_1 = e^{-(R/2L)t} e^{\gamma t} \;\;&\;\; q_2 = e^{-(R/2L)t} e^{-\gamma t}, \\ \therefore \;\; q_c(t) = e^{-(R/2L)t} \left[a_1 e^{\gamma t} + a_2 e^{-\gamma t} \right], \end{aligned}$$

por tanto tenemos una función que **decrece** en función del tiempo [4] siendo un sistema **sobreamortiguado**.

[4] a pesar del término creciente $e^{\gamma t}$.