Contenido

Contenido: Tema 05

Contenido: Tema 05

Transformada de Laplace y transformada inversa

Definiciones

La **transformada integral** de una función $f(t)$, definida para $t \leq 0$:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-ts} f(t) dt = F(s),$$

representa la **transformada de Laplace** de $f(t)$, siempre y cuando la integral **converja**,

$$\int_0^\infty K(s,t) f(t) dt = \lim_{b \to \infty} \int_0^b K(s,t) f(t) dt,$$

en donde $K(s,t)$ representa el **kernel** de la transformada. [1]

La transformada cumple con las propiedades de **linealidad**,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} &= \alpha \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta \mathcal{L}\{g(t)\}, \\ &= \alpha F(s) + \beta G(s). \end{aligned}$$

[1] siendo el kernel para la transformada de Laplace e^{-ts}.

Transformada de Laplace y transformada inversa

Transformaciones de funciones básicas, ejemplos

Algunas transformaciones de funciones básicas son,

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}\ \forall\ n \in \mathbb{Z}^+, \qquad \mathcal{L}\{e^{\alpha t}\} = \frac{1}{s-\alpha},$$

$$\mathcal{L}\{\mathrm{Sen}kt\} = \frac{k}{s^2+k^2}, \qquad \mathcal{L}\{\mathrm{Senh}kt\} = \frac{k}{s^2-k^2},$$

$$\mathcal{L}\{\mathrm{Cos}kt\} = \frac{s}{s^2+k^2}, \qquad \mathcal{L}\{\mathrm{Cosh}kt\} = \frac{s}{s^2-k^2}.$$

Ejemplo: hallar la transf. de Laplace de $f(t) = t$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \mathcal{L}\{t\} &= \int_0^\infty e^{-ts} t dt = \frac{1}{s^2}\int_0^\infty e^{-ts}(-ts)d(-ts), \\
&= \frac{1}{s^2}\left[(-ts)e^{-ts} - e^{-ts}\right]_0^\infty, ^2 \\
&= \frac{1}{s^2}\ \ \forall\ \ s > 0.
\end{aligned}$$

[2]resolviendo por integración por partes.

Transformada de Laplace y transformada inversa

Transformaciones de funciones básicas, ejemplos

Ejemplo: hallar la transf. de Laplace de $f(t) = e^{-3t}$.

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \mathcal{L}\{t\} &= \int_0^\infty e^{-ts} e^{-3t} dt = \int_0^\infty e^{-(s+3)t} dt, \\
&= -\frac{1}{s+3} \int_0^\infty e^{-(s+3)t} d[-t(s+3)] = -\frac{1}{s+3} \left[e^{-(s+3)t} \right]_0^\infty, \\
&= \frac{1}{s+3}, \ \ \forall \ \ s+3 > 0 \ \ \rightarrow \ \ \forall \ \ s > -3.
\end{aligned}
$$

Ejemplo: hallar la transf. de Laplace de $f(t) = \text{Sen}2t$.

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \mathcal{L}\{t\} &= \int_0^\infty e^{-ts} \text{Sen}2t dt, \\
&= \left[-\frac{1}{s} e^{-ts} \text{Sen}2t + \frac{2}{s} \int e^{-ts} \text{Cos}2t dt \right]_0^\infty, \\
&= \left[-\frac{1}{s} e^{-ts} \text{Sen}2t - \frac{2}{s^2} e^{-ts} \text{Cos}2t - \frac{4}{s^2} \int e^{-ts} \text{Sen}2t dt \right]_0^\infty,
\end{aligned}
$$

Transformada de Laplace y transformada inversa

Transformaciones de funciones básicas, ejemplos

del resultado anterior observamos:

$$\int_0^{\infty} e^{-ts}\text{Sen}2t dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-ts}\text{Sen}2t - \frac{2}{s^2}e^{-ts}\text{Cos}2t - \frac{4}{s^2}\int e^{-ts}\text{Sen}2t dt\right]_0^{\infty},$$

$$\therefore \quad \frac{s^2+4}{s^2}\int_0^{\infty} e^{-ts}\text{Sen}2t dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-ts}\text{Sen}2t - \frac{2}{s^2}e^{-ts}\text{Cos}2t\right]_0^{\infty} = \frac{2}{s^2},$$

por tanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\text{Sen}2t\} &= \int_0^{\infty} e^{-ts}\text{Sen}2t dt, \\ \Rightarrow \quad \mathcal{L}\{\text{Sen}2t\} &= \frac{2}{s^2+4} \quad \forall \quad s > 0. \end{aligned}$$

Si $F(s)$ representa la transformada de Laplace de una función $f(t)$,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s),$$

entonces la **transformada inversa de Laplace** de $F(s)$ viene dada como,

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}.$$

Algunas transformadas inversas son,

$$t^n = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{n+1}}\right\} \;\forall\; n \in \mathbb{Z}^+, \qquad e^{\alpha t} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-\alpha}\right\},$$

$$\text{Sen}kt = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^2+k^2}\right\}, \qquad \text{Senh}kt = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^2-k^2}\right\},$$

$$\text{Cos}kt = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+k^2}\right\}, \qquad \text{Cosh}kt = \mathcal{L}\left\{\frac{s}{s^2-k^2}\right\}.$$

Transformada de Laplace y transformada inversa

Transformada inversa, ejemplos

De igual manera, la transformada inversa cumple con las propiedades de **linealidad**,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F(s)+\beta G(s)\} &= \alpha\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}+\beta\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\},\\ &= \alpha f(t)+\beta g(t).\end{aligned}$$

Ejemplo: hallar la transf. inversa de $F(s)=1/s^5$.

$$\begin{aligned}\Rightarrow\quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\} &= \frac{1}{4!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{s^5}\right\},\\ &= \frac{1}{24}t^4,\quad \text{ya que}\quad t^n=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{n+1}}\right\}.\end{aligned}$$

Ejemplo: hallar la transf. inversa de $F(s)=1/(s^2+7)$.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+7}\right\} &= \frac{1}{\sqrt{7}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{7}}{s^2+7}\right\},\\ &= \frac{1}{\sqrt{7}}\text{Sen}\sqrt{7}t,\quad \text{ya que}\quad \text{Sen}kt=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^2+k^2}\right\}.\end{aligned}$$

Ejemplo: hallar la transf. inversa de $F(s) = \frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)}$,

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s-2}+\frac{C}{s+4}\right\}, \\
= \;& \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{s-1}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{B}{s-2}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{C}{s+4}\right\}, \\
= \;& \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-16/5}{s-1}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{25/6}{s-2}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/30}{s+4}\right\},\text{[3]} \\
= \;& -\frac{16}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}+\frac{25}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}+\frac{1}{30}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\}, \\
= \;& -\frac{16}{5}e^{t}+\frac{25}{6}e^{2t}+\frac{1}{30}e^{-4t}, \quad \text{donde:} \quad e^{\alpha t} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-\alpha}\right\}.
\end{aligned}
$$

[3] aplicando fracciones parciales.

Contenido: Tema 05

Transformada de derivadas

Definiciones

Consideremos la aplicación de la transformada de Laplace a **derivadas**,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f'(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt, \\
&= \left[e^{-st} f(t)\right]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt, \text{[4]} \\
&= -f(0) + s\mathcal{L}\{f(t)\}, \\
\Rightarrow \quad \mathcal{L}\{f'(t)\} &= sF(s) - f(0).
\end{aligned}
$$

Analizando ahora el caso de la **segunda derivada**,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f''(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} f''(t)dt, \\
&= \left[e^{-st} f'(t)\right]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt, \\
&= \left[e^{-st} f'(t)\right]_0^\infty + s\left[sF(s) - f(0)\right], \\
\Rightarrow \quad \mathcal{L}\{f''(t)\} &= s^2 F(s) - sf(0) - f'(0).
\end{aligned}
$$

[4] integrando por partes.

Transformada de derivadas

Generalización

Para el caso de la transf. de una **n-ésima derivada**, tenemos que si $f, f', \ldots, f^n$ son contínuas $\forall\ t \geq 0$ y $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, entonces:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - s^{n-3} f''(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0).$$

Con lo anterior, apliquemos la **transf. de Laplace** a una EDO,

$$\begin{aligned}
& a_n \frac{d^n y}{dy^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dy^{n-1}} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = g(t), \\
\forall \quad & y(0) = y_0;\ y'(0) = y_1;\ \ldots\ ; y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}, \\
\Rightarrow \quad & a_n \mathcal{L}\left\{ \frac{d^n y}{dy^n} \right\} + a_{n-1} \mathcal{L}\left\{ \frac{d^{n-1} y}{dy^{n-1}} \right\} + \ldots + a_0 \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{g(t)\}, \\
\therefore \quad & a_n \left[s^n Y(s) - s^{n-1} y_0 - s^{n-2} y_1 - \ldots - y_{n-1} \right] + \ldots \\
\ldots \quad & + a_{n-1} \left[s^{n-1} Y(s) - s^{n-2} y_0 - s^{n-3} y_1 - \ldots - y_{n-2} \right] + \ldots \\
\ldots \quad & + a_0 Y(s) = G(s), \\
\forall \quad & \mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s) \ \ \&\ \ \mathcal{L}\{g(t)\} = G(s),
\end{aligned}$$

Transformada de derivadas

Generalización

agrupando términos de mismas derivadas,

$$
\begin{aligned}
& a_n\left[s^n Y(s) - s^{n-1}y_0 - s^{n-2}y_1 - \ldots - y_{n-1}\right] + \ldots \\
\ldots\quad & +a_{n-1}\left[s^{n-1}Y(s) - s^{n-2}y_0 - s^{n-3}y_1 - \ldots - y_{n-2}\right] + \ldots \\
\ldots\quad & +a_0 Y(s) = G(s), \\
\Rightarrow\quad & Y(s)\left[a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0\right] + \ldots \\
\ldots\quad & -y_0\left[a_n s^{n-1} + a_{n-1}s^{n-2} + \ldots + a_1\right] + \ldots \\
\ldots\quad & -y_1\left[a_n s^{n-2} + a_{n-1}s^{n-3} + \ldots + a_2\right] + \ldots - y_{n-1}\left[a_0\right] = G(s),
\end{aligned}
$$

observamos que la ED original se ha **convertido** en una **ec. algebráica** en donde el objetivo es determinar $Y(s)$, donde:

las **derivadas**: $y_0 = y(0);\ y_1 = y'(0);\ \ldots\ ; y_{n-1} = y^{(n-1)}(0)$,

los **coeficientes**: $a_n;\ a_{n-1};\ \ldots\ ; a_1,\ a_0$,

son **conocidos**.

Transformada de derivadas

Generalización

Por tanto, agrupando se tiene:

$$
\begin{aligned}
& Y(s)P(s) - Q(s) = G(s), \\
\forall \quad & P(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0, \\
& Q(s) = y_0 \left[a_n s^{n-1} + a_{n-1} s^{n-2} + \ldots + a_1 \right] + \ldots \\
\ldots \quad & + y_1 \left[a_n s^{n-2} + a_{n-1} s^{n-3} + \ldots + a_2 \right] + \ldots + y_{n-1} \left[a_n \right],
\end{aligned}
$$

por tanto,

$$Y(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} + \frac{G(s)}{P(s)},$$

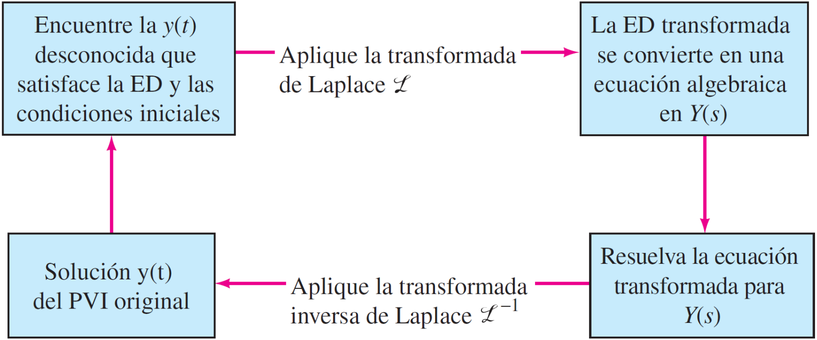
en donde, una vez obtenida $Y(s)$, se aplica la **transf. inversa** para obtener $y(t)$,

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = y(t),$$

resolviendo así la ED original.

Transformada de derivadas

Esquema



Transformada de derivadas

Ejemplo

Resolver la sig. ED con el método de la transformada de Laplace,

$$\frac{dy}{dt} + 3y = 13\text{Sen}2t \;\;\forall\;\; y(0) = 6.$$

Aplicando la **transformada de Laplace** a la ED anterior,

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} + 3\mathcal{L}\left\{y\right\} = 13\mathcal{L}\left\{\text{Sen}2t\right\},$$

ahora, recordando:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} = sY(s) - y(0) = sY(s) - 6,$$

$$\mathcal{L}\left\{y\right\} = Y(s), \quad \mathcal{L}\left\{\text{Sen}2t\right\} = \frac{2}{s^2+4},$$

por tanto,

$$sY(s) - 6 + 3Y(s) = \frac{26}{s^2+4},$$

Transformada de derivadas

Ejemplo

resolviendo la ec. algebraica anterior para $Y(s)$,

$$
\begin{aligned}
sY(s) - 6 + 3Y(s) &= \frac{26}{s^2+4}, \\
\Rightarrow \quad Y(s)\,(s+3) &= 6 + \frac{26}{s^2+4}, \\
\therefore \quad Y(s) &= \frac{6s^2+50}{(s+3)(s^2+4)}.
\end{aligned}
$$

Para poder obtener la sol. de la ED, $y(t)$, aplicamos al resultado anterior la **transformada inversa**,

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6s^2+50}{(s+3)(s^2+4)}\right\}, \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{8}{s+3} + \frac{-2s+6}{s^2+4}\right\},
\end{aligned}
$$

en donde la última ecuación se obtuvo mediante fracciones parciales

Aplicando las propiedades de **linealidad** de la transf. inversa a la expresión anterior,

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{8}{s+3}+\frac{-2s+6}{s^2+4}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{8}{s+3}+\frac{-2s}{s^2+4}+\frac{6}{s^2+4}\right\}, \\
&= 8\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} - 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} + +3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\},
\end{aligned}
$$

recordando de las fórmulas de transf. inversas,

$$
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-\alpha}\right\} = e^{\alpha t},\ \ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+k^2}\right\} = \text{Cos}kt,\ \ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^2+k^2}\right\} = \text{Sen}kt,
$$

entonces tenemos,

$$
y(t) = 8e^{-3t} - 2\text{Cos}kt + 3\text{Sen}kt,
$$

lo cual representa la **solución** a la ED original.