Métodos Matemáticos

Parcial 01: Análisis Vectorial, Álgebra Lineal

Dr. Omar De la Peña Seaman

22 Mayo 2019

Nombre del Estudiante: ____

Problema 1 *Relaciones vectoriales* **(20 pts.)**

Derivar las siguientes relaciones,

$$
\begin{aligned}
&\text{(a)} \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot (\varphi \mathbf{A}) = \varphi(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}) + \boldsymbol{\nabla}\varphi \cdot \mathbf{A} \\
&\text{(b)} \quad \boldsymbol{\nabla} \times (\varphi \mathbf{A}) = \varphi(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) + \boldsymbol{\nabla}\varphi \times \mathbf{A} \\
&\text{(c)} \quad \int_V \varphi(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}) d\tau = \oint_S \varphi \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} - \int_V \mathbf{A} \cdot (\boldsymbol{\nabla}\varphi) d\tau
\end{aligned}
$$

en donde $\varphi = \varphi(x, y, z)$ representa un campo escalar, y $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$ un campo vectorial.

. . . .

Problema 2 *Problema piramidal* **(25 pts.)**

Calcular la siguiente integral,

$$\int_S (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{V}) \cdot d\boldsymbol{\sigma},$$

sobre la superficie formada por las cuatro caras inclinadas de una pirámide cuya base es un cuadrado en el plano (x, y) con esquinas en los puntos $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 0)$, $(2, 2)$, y cuyo vértice superior está en $(1, 1, 2)$.
El campo $\mathbf{V}$ viene dado como,

$$\mathbf{V} = (x^2 z - 2)\mathbf{i} + (x + y - z)\mathbf{j} - xyz\mathbf{k}.$$

. . . .

Problema 3 *Matriz inversa* **(15 pts.)**

Hallar para que valores de x la matriz $\mathbf{B}$ *no* es invertible,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -x & x-1 & x+1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2-x & x+3 & x+7 \end{bmatrix}.$$

. . . .

Problema 4 *Invariancias* **(15 pts.)**

Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices similares (relacionadas por una transformación de similaridad),

$$\mathbf{B} = \mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^{-1},$$

demostrar lo siguiente:

(a) $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ tienen los mismos eigenvalores.

(b) La traza es invariante ante tal transformación.

(c) El determinante es invariante ante tal transformación.

. . . .

Problema 5 *Problema de eigenvalores* **(25 pts.)**

Considera la siguiente matriz,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & i & 1 \\ -i & 4 & -i \\ 1 & i & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Encuentra los eigenvalores de $\mathbf{M}$.

(b) Halla los eigenvectores normalizados para cada eigenvalor.

(c) Encuentra la matriz de transformación de similaridad $\mathbf{U}$ y calcula la $\mathbf{U}\mathbf{M}\mathbf{U}^{-1}$.

. . . .