MÉTODOS MATEMÁTICOS

PROPEDÉUTICO FÍSICA

Curso Propedéutico - Verano 2019

Omar De la Peña-Seaman

Instituto de Física (IFUAP)

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP)

Curso Métodos Matemáticos

Información General

Período de clases (14 sem.)

22 Abril – 26 Julio 2019

Horario

Lunes, Martes y Jueves: 09–11 hrs.

Criterios de evaluación

- Tareas de cada tema: **40%**
- Exámenes: **60%**
  - Examen 1: temas 01 $\rightarrow$ 02
  - Examen 2: temas 03 $\rightarrow$ 04
  - Examen 3: temas 05 $\rightarrow$ 06

Bibliografía

1. G.B. Arfken, H.J. Weber, & F.E. Harris, *Mathematical Methods for Physicists*, 7th edition, Academic Press, Elsevier 2013.
2. T.L. Chow, *Mathematical Methods for Physicists: A concise introduction*, 1st edition, Cambridge University Press 2003.
3. J.W. Brown & R.V. Churchill, *Complex Variable and Applications*, 7th edition, McGrawHill Publishing Company, 2004.

Curso Métodos Matemáticos

Información General

Contenido del curso

1.	Análisis vectorial	(2 sem.)
2.	Álgebra lineal	(2 sem.)
3.	Series infinitas	(2 sem.)
4.	Ecuaciones diferenciales	(3 sem.)
5.	Variable compleja	(2 sem.)
6.	Funciones especiales	(3 sem.)

Fuente de consulta e información

Las sesiones de clase, las tareas y exámenes estarán disponibles *on-line* al término de cada tema en la siguiente dirección:

`http://www.ifuap.buap.mx/~oseaman/mathematical_methods_2019.html`

Contenido

Contenido: Tema 01

Contenido: Tema 01

La adición de vectores es **conmutativa**,

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A},$$

así como **asociativa**,

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}).$$

Un vector arbitrario $\mathbf{A}$ puede ser expresado como

$$\mathbf{A} = A_1\hat{\mathbf{e}}_1 + A_2\hat{\mathbf{e}}_2 + \ldots + A_i\hat{\mathbf{e}}_i + \ldots$$

en donde $\hat{\mathbf{e}}_i$ es el vector unitario en la dirección x_i.

Por tanto, la adición de vectores puede ser vista por **componentes**,

$$\mathbf{G} = \mathbf{A} - 2\mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad G_i = A_i - 2B_i,$$

y la **magnitud** de un vector como

$$|\mathbf{A}| = \left(A_1^2 + A_2^2 + \ldots\right)^{1/2}.$$

El **producto punto** es,

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + \ldots$$

lo cual nos arroja,

$$|\mathbf{A}|^2 = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}, \quad \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\mathrm{Cos}\theta,$$

donde θ es el $\angle$ entre $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$.

Revisión de propiedades básicas

Propiedades de vectores

Vectores **ortogonales**:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0.$$

De igual manera, para vectores unitarios de un sistema coordenado,

$$\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = \delta_{ij}.$$

La **proyección** de $\mathbf{A}$ en la dir. $\hat{\mathbf{e}}_i$ es:

$$A_i \hat{\mathbf{e}}_i, \quad \forall \quad A_i = \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{A}.$$

$\mathbf{A}$ se puede representar como,

$$\mathbf{A} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix},$$

donde el elemento A_i esta asociado con el vector base unitario $\hat{\mathbf{e}}_i$.

Las prop. **aditivas** y **multiplicativas** por un escalar también aplican en esta representación,

$$\mathbf{G} = \mathbf{A} - 2\mathbf{B},$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix},$$

$$= \begin{pmatrix} A_1 - 2B_1 \\ A_2 - 2B_2 \\ A_3 - 2B3 \end{pmatrix},$$

$$\therefore \quad \mathbf{g} = \mathbf{a} - 2\mathbf{b}.$$

La traspuesta de un vector columna es un **vector fila**,

$$\mathbf{a}^T = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{pmatrix}.$$

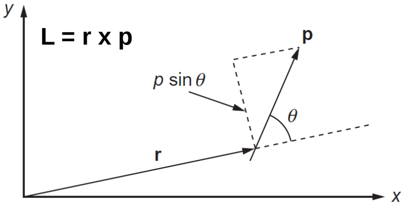
Usando la definición anterior, es posible expresar el producto punto como:

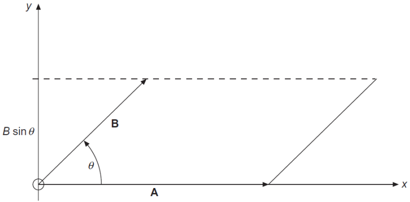
$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{a}^T\mathbf{b}, & \\ &= \begin{pmatrix} A_1 \ A_2 \ A_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}, \\ &= A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3, \end{aligned}$$

recordando que el producto punto es conmutativo,

$$\mathbf{a}^T\mathbf{b} = \mathbf{b}^T\mathbf{a}.$$

Producto cruz





La construcción para calcular $\mathbf{L}$ es el **producto cruz**,

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = (AB\mathrm{Sin}\theta)\,\hat{\mathrm{e}}_C,$$

en donde $\hat{\mathrm{e}}_C$ es la dirección $\perp$ al plano formado por $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$.

Analizando el módulo de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, se observa que tiene como magnitud el área del paralelogramo formado por $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$.

Revisión de propiedades básicas

Productos vectoriales: producto cruz

Algunas propiedades del producto cruz son la **anticonmutación**,

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = -\mathbf{B}\times\mathbf{A},$$

la **distributiva**,

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C}) &= \mathbf{A}\times\mathbf{B}+\mathbf{A}\times\mathbf{C},\\ k\,(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) &= (k\mathbf{A})\times\mathbf{B}.\end{aligned}$$

Cuando se aplica el producto a vectores unitarios, se tiene:

$$\hat{\mathbf{e}}_i\times\hat{\mathbf{e}}_j = \sum_k \epsilon_{ijk}\hat{\mathbf{e}}_k,$$

donde ϵ_{ijk} es el símbolo de Levi-Civita y está definido como:

$$\begin{aligned}\epsilon_{ijk} &= +1,\ ijk \ \rightarrow\ \text{par},\\ &= -1,\ ijk \ \rightarrow\ \text{impar},\\ &= \ \ 0,\ ijk \ \rightarrow\ \text{repetidos}.\end{aligned}$$

Por tanto, expandiendo el producto cruz en componentes,

$$\begin{aligned}\mathbf{C} &= \mathbf{A}\times\mathbf{B},\\ &= (A_x\hat{\mathbf{e}}_x + A_y\hat{\mathbf{e}}_y + A_z\hat{\mathbf{e}}_z)\times\\ &(B_x\hat{\mathbf{e}}_x + B_y\hat{\mathbf{e}}_y + B_z\hat{\mathbf{e}}_z),\\ &= (A_xB_y - A_yB_x)\hat{\mathbf{e}}_z + \ldots\\ &\ldots - (A_xB_z - A_zB_y)\hat{\mathbf{e}}_y + \ldots\\ &\ldots + (A_yB_z - A_zB_y)\hat{\mathbf{e}}_x.\end{aligned}$$

Con el análisis anterior tenemos,

$$C_x = A_yB_z - A_zB_y, \quad C_y = A_zB_x - A_xB_z, \quad C_z = A_xB_y - A_yB_x,$$

lo cual se puede expresar de manera compacta como:

$$C_i = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} A_j B_k.$$

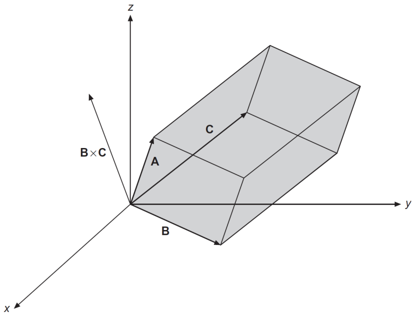
Finalmente, el producto cruz también se puede calcular mediante el determinante expresado de la siguiente manera:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_x & \hat{\mathbf{e}}_y & \hat{\mathbf{e}}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}.$$

Triple producto escalar

Se define de la siguiente manera,

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix},$$



cumpliendo con las sig. relaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C} &= \mathbf{B}\cdot\mathbf{C}\times\mathbf{A}, \\ &= \mathbf{C}\cdot\mathbf{A}\times\mathbf{B}, \\ &= -\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}\times\mathbf{B}, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Además, este producto puede ser considerado geométricamente como el **volumen** de un paralelepípedo, definido por los vectores $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$.

Triple producto vectorial

Este producto viene expresado como:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}),$$

el cual puede ser calculado usando la formulación de **Levi-Civita**,

$$\mathbf{X} = \mathbf{Y} \times \mathbf{Z} = \sum_i \hat{\mathbf{e}}_i \sum_{jk} \epsilon_{ijk} Y_j Z_k,$$

por lo tanto aplicando lo anterior:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= \sum_i \hat{\mathbf{e}}_i \sum_{jk} \epsilon_{ijk} A_j (\mathbf{B} \times \mathbf{C})_k, \\ &= \sum_i \hat{\mathbf{e}}_i \sum_{jk} \epsilon_{ijk} A_j \left(\sum_{pq} \epsilon_{kpq} B_p C_q \right), \\ &= \sum_{ij} \sum_{pq} \hat{\mathbf{e}}_i A_j B_p C_q \sum_k \epsilon_{ijk} \epsilon_{kpq}. \end{aligned}$$

Revisión de propiedades básicas

Productos vectoriales: triple producto vectorial

En el resultado anterior, el término de la sumatoria sobre k se reduce a lo siguiente:

$$\sum_k \epsilon_{ijk}\epsilon_{kpq} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp},$$

por tanto la expresión del triple producto vectorial queda como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= \sum_{ij}\sum_{pq} \hat{\mathbf{e}}_i A_j B_p C_q \sum_k \epsilon_{ijk}\epsilon_{kpq}, \\
&= \sum_{ij} \hat{\mathbf{e}}_i A_j (B_i C_j - B_j C_i), \\
&= \sum_i \hat{\mathbf{e}}_i \left(B_i \sum_j A_j C_j - C_i \sum_j A_j B_j \right), \\
\therefore \quad \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}).
\end{aligned}$$

Contenido: Tema 01

Operadores vectoriales diferenciales

Gradiente ∇

Si tenemos una cantidad escalar φ que depende de su posición en el espacio,

$$\varphi = \varphi(\mathbf{r}) \;\; \forall \;\; \mathbf{r} = x_1\hat{\mathbf{e}}_1 + x_2\hat{\mathbf{e}}_2 + x_3\hat{\mathbf{e}}_3,$$

el **gradiente** de φ viene dado como,

$$\nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)\hat{\mathbf{e}}_1 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)\hat{\mathbf{e}}_2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)\hat{\mathbf{e}}_3,$$

en donde: $d\mathbf{r} = dx_1\hat{\mathbf{e}}_1 + dx_2\hat{\mathbf{e}}_2 + dx_3\hat{\mathbf{e}}_3,$

$$\therefore \quad d\varphi = (\nabla\varphi)\cdot d\mathbf{r},$$

siendo que $\nabla\varphi$ caracteriza el cambio de φ con respecto a la posición.

Por tanto, de manera general, el operador diferencial ∇ es

$$\nabla = \hat{\mathbf{e}}_x\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{e}}_y\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{e}}_z\frac{\partial}{\partial z},$$

el cual aplica a un **campo escalar**.

Operadores vectoriales diferenciales

Divergencia $\nabla\cdot$

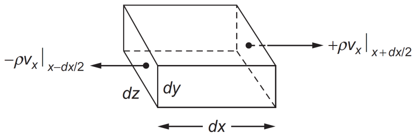
La **divergencia** de un vector $\mathbf{A}$ esta definida como,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Para interpretar el significado de $\nabla\cdot$, supongamos que tenemos un fluido en un t dado con,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{r}) &\rightarrow \text{campo de velocidad,} \\ \rho(\mathbf{r}) &\rightarrow \text{densidad,} \\ \therefore\ \rho(\mathbf{r})\mathbf{v}(\mathbf{r}) &\rightarrow \text{flujo.} \end{aligned}$$

Ahora, calculamos **la razón de cambio** neto de $\rho(\mathbf{r})$ en un $dV = dxdydz$, centrado en $\mathbf{r}$, con lo que a primer orden en $d\mathbf{r}$ y dt tenemos



con los siguientes flujos de salida definidos como:

$$\begin{aligned} x - \frac{dx}{2} &\rightarrow -\left.(\rho v_x)\right|_{x-dx/2,y,z}\, dydz, \\ x + \frac{dx}{2} &\rightarrow +\left.(\rho v_x)\right|_{x+dx/2,y,z}\, dydz. \end{aligned}$$

Operadores vectoriales diferenciales

Divergencia $\nabla\cdot$

Combinando ambos resultados tenemos,

$$\left(-\left.(\rho v_x)\right|_{x-dx/2} + \left.(\rho v_x)\right|_{x+dx/2}\right) dydz = \left(\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}\right) dxdydz.$$

Finalmente, incluyendo la contribución de las otras caras del dV,

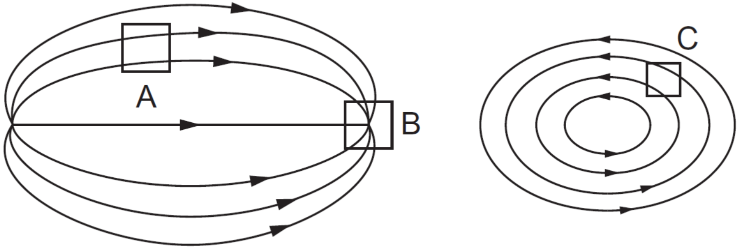
$$\begin{aligned}\text{flujo neto de salida} &= \left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z)\right] dxdydz,\\ &= \nabla\cdot(\rho\mathbf{v})dxdydz,\end{aligned}$$

por tanto la **divergencia** del vector $\rho\mathbf{v}$ representa el flujo neto de salida por unidad de volumen, por unidad de tiempo.

Para el caso en el que el flujo no se crea ni destruye, entonces llegamos a la **ecuación de continuidad**,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0.$$

Cuando una cantidad vectorial tiene **divergencia cero** en una región del espacio, se interpreta como **conservación de flujo** en esa región.



$$\nabla\cdot\mathbf{V}|_A = 0, \qquad \nabla\cdot\mathbf{V}|_B < 0, \qquad \nabla\cdot\mathbf{V}|_C = 0.$$

En general, si $\nabla\cdot\mathbf{V} = 0$ en todo el espacio, a tal campo se le conoce como **solenoidal**.

Operadores vectoriales diferenciales

Rotacional $\nabla\times$

El **rotacional** aplica a un campo vectorial $\mathbf{V}$, y viene dado como:

$$\nabla\times\mathbf{V}=\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{e}}_x & \hat{\mathbf{e}}_y & \hat{\mathbf{e}}_z\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ V_x & V_y & V_z\end{vmatrix},$$

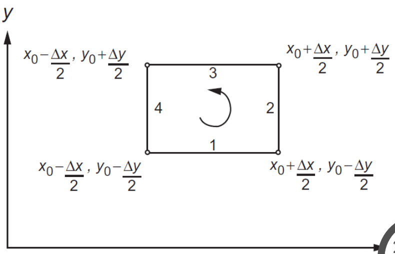
$$=\hat{\mathbf{e}}_x\left(\frac{\partial}{\partial y}V_z-\frac{\partial}{\partial z}V_y\right)+\hat{\mathbf{e}}_y\left(\frac{\partial}{\partial z}V_x-\frac{\partial}{\partial x}V_z\right)+\dots$$

$$\dots+\hat{\mathbf{e}}_z\left(\frac{\partial}{\partial x}V_y-\frac{\partial}{\partial y}V_x\right).$$

Para entender el significado de $\nabla\times$, calculemos:

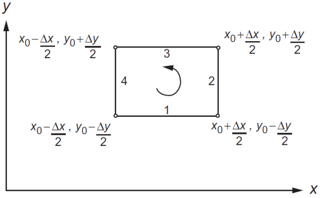
$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s},$$

para un campo vectorial $\mathbf{B}$ en una trayectoria cerrada pequeña.



Operadores vectoriales diferenciales

Rotacional $\nabla\times$



Calculando las integrales por segmentos (centradas en (x_0, y_0)),

$$\text{Seg. } 1 = \int_{x_0-\Delta x/2}^{x_0+\Delta x/2} B_x(x, y_0 - \Delta y/2)dx \approx B_x(x_0, y_0 - \Delta y/2)\Delta x,$$

$$\text{Seg. } 2 = \int_{y_0-\Delta y/2}^{y_0+\Delta y/2} B_y(x_0 + \Delta x/2, y)dy \approx B_y(x_0 + \Delta x/2, y_0)\Delta y,$$

$$\text{Seg. } 3 = \int_{x_0+\Delta x/2}^{x_0-\Delta x/2} B_x(x, y_0 + \Delta y/2)dx \approx -B_x(x_0, y_0 + \Delta y/2)\Delta x,$$

$$\text{Seg. } 4 = \int_{y_0+\Delta y/2}^{y_0-\Delta y/2} B_y(x_0 - \Delta x/2, y)dy \approx -B_y(x_0 - \Delta x/2, y_0)\Delta y.$$

Combinando los segmentos 1 y 3, y 2 y 4, tenemos:

$$\begin{aligned}
\text{Segs. } 1+3 &= \left(B_x(x_0, y_0 - \Delta y/2) - B_x(x_0, y_0 + \Delta y/2)\right)\Delta x, \\
&\approx -\frac{\partial B_x}{\partial y}\Delta y \Delta x, \\
\text{Segs. } 2+4 &= \left(B_y(x_0 + \Delta x/2, y_0) - B_y(x_0 - \Delta x/2, y_0)\right)\Delta y, \\
&\approx +\frac{\partial B_y}{\partial x}\Delta x \Delta y.
\end{aligned}$$

Por tanto, combinando los resultados anteriores llegamos a lo siguiente:

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} \approx \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\Delta x \Delta y \approx \left[\nabla\times\mathbf{B}\right]_z \Delta x \Delta y.$$

Lo anterior nos indica que una $\oint \mathbf{B} \neq 0$ corresponde a una componente **normal** del plano de la trayectoria $\neq 0$ de $\nabla\times\mathbf{B}$.

En el caso de $\oint \mathbf{B} = 0$ en todo el espacio $\Rightarrow$ se dice que el campo es **irrotacional** $\therefore\ \nabla\times\mathbf{B} = 0$.

Operadores vectoriales diferenciales

Aplicaciones sucesivas de diferentes operadores

Los operadores analizados hasta ahora también pueden ser aplicados en combinación entre ellos, obteniendo los siguientes resultados:

(a) $\nabla\cdot\nabla\varphi$ (b) $\nabla\times\nabla\varphi$ (c) $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{V})$
(d) $\nabla(\nabla\cdot\mathbf{V})$ (e) $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{V})$

$\nabla\cdot\nabla\varphi$, Laplaciano

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot\nabla\varphi &= \left(\hat{\mathbf{e}}_x\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\mathbf{e}}_y\frac{\partial}{\partial y}+\hat{\mathbf{e}}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\hat{\mathbf{e}}_x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\hat{\mathbf{e}}_y\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\hat{\mathbf{e}}_z\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right),\\
&= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2},\\
&= \nabla^2\varphi.
\end{aligned}
$$

Aplicaciones sucesivas de diferentes operadores

$\nabla \times \nabla\varphi$

$$\nabla \times \nabla\varphi = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_x & \hat{\mathbf{e}}_y & \hat{\mathbf{e}}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \partial\varphi/\partial x & \partial\varphi/\partial y & \partial\varphi/\partial z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_x & \hat{\mathbf{e}}_y & \hat{\mathbf{e}}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \end{vmatrix} \varphi = 0.$$

El resultado anterior indica que cualquier **gradiente** tendrá un **rotacional** nulo, por tanto $\nabla\varphi$ será **irrotacional**.

$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{V})$

Lo podemos expresar como un triple producto escalar,

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) = \begin{vmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial x & \partial/\partial x \\ \partial/\partial x & \partial/\partial x & \partial/\partial x \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = 0.$$

Debido a que la **divergencia** de un **rotacional** siempre será cero $\Rightarrow$ $\nabla \times \mathbf{V}$ será un campo **solenoidal**.

Operadores vectoriales diferenciales

Aplicaciones sucesivas de diferentes operadores

$\nabla \cdot \nabla \mathbf{V}$, Laplaciano vectorial

Las últimas expresiones enlistadas satisfacen la sig. ecuación,

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) - \nabla \cdot \nabla \mathbf{V},$$
$$\Rightarrow \ \nabla \cdot \nabla \mathbf{V} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}).$$

El término $\nabla \cdot \nabla \mathbf{V}$ tambén se expresa como $\nabla^2 \mathbf{V}$, y se le conoce como **laplaciano vectorial**.

En coordenadas cartesiandas $\nabla^2 \mathbf{V}$ viene dado como,

$$\nabla^2 \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \nabla^2 V_x \\ \nabla^2 V_y \\ \nabla^2 V_z \end{pmatrix}.$$

Coordenadas cilíndricas

$$\nabla f = \hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \hat{\mathbf{e}}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \hat{\mathbf{e}}_z \frac{\partial f}{\partial z},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r V_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} V_\theta + \frac{\partial}{\partial z} V_z,$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Coordenadas esféricas

$$\nabla f = \hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \hat{\mathbf{e}}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \hat{\mathbf{e}}_\varphi \frac{1}{r\mathsf{Sen}\varphi}\frac{\partial f}{\partial \varphi},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 V_r) + \frac{1}{r\mathsf{Sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(V_\theta \mathsf{Sen}\theta\right) + \frac{1}{r\mathsf{Sen}\theta}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi},$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\mathsf{Sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\mathsf{Sen}\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\mathsf{Sen}^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}.$$

Contenido: Tema 01

Integración vectorial

Integrales de línea

Una **integral de línea** es realizada sobre una trayectoria C que puede ser **abierta** ($\int_C$) o **cerrada** ($\oint_C$),

$$\int_C \varphi d\mathbf{r}, \quad \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}, \quad \int_C \mathbf{V}\times d\mathbf{r}.$$

Para resolver una integral del línea se sustituye la expresión de $d\mathbf{r}$ en el sistema coordenado adecuado:

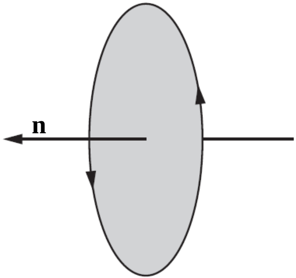
$$\int_C \varphi d\mathbf{r} = \hat{\mathbf{e}}_x \int_C \varphi(x,y,z)dx + \hat{\mathbf{e}}_y \int_C \varphi(x,y,z)dy + \hat{\mathbf{e}}_z \int_C \varphi(x,y,z)dz,$$

de igual manera para el caso de una $\int_C$ de producto vectorial:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C F_x(x,y,z)dx + \int_C F_y(x,y,z)dy + \int_C F_z(x,y,z)dz.$$

En cualquier caso se debe conocer la relación entre las variables (x, y y z) para resolver cualquiera de las intregrales, es decir, es necesario conocer la **trayectoria** C.

Las **integrales de superficie** involucran un elemento de área $d\boldsymbol{\sigma}$ **normal** a la superficie de integración,



$$\int_S \varphi d\boldsymbol{\sigma}, \quad \int_S \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{\sigma}, \quad \int_S \mathbf{V}\times d\boldsymbol{\sigma},$$

donde,

$$d\boldsymbol{\sigma} = \hat{\boldsymbol{n}} dA$$

siendo $\hat{\boldsymbol{n}}$ un vector unitario normal a la superficie.

Finalmente, El sentido positivo de $\hat{\boldsymbol{n}}$ dependerá de la superficie:

- **Cerrada**: dirección saliente de la superficie.
- **Abierta**: siguiendo la convención de la mano derecha para el perímetro de la superficie.

La **integral de volumen** es la mas simple en el sentido de que involucra un diferencial **escalar**, y no vectorial como en los casos anteriores,

$$d\tau = d^3 r \text{ or } d^3 x$$

y viene dada de la siguiente manera,

$$\int \mathbf{V} d\tau = \hat{\mathbf{e}}_x \int V_x d\tau + \hat{\mathbf{e}}_y \int V_y d\tau + \hat{\mathbf{e}}_z \int V_z d\tau,$$

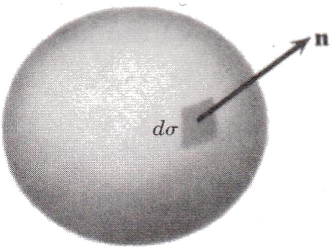
en donde la intregal se reduce a una suma de integrales **escalares**.

Contenido: Tema 01

Teoremas integrales

Teorema de Gauss

Supongamos que tenemos un fluido, en un tiempo t con las siguientes propiedades:



$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{r}) &\Rightarrow \text{ campo de vel.} \\ \rho(\mathbf{r}) &\Rightarrow \text{ densidad,} \\ \therefore \;\; \rho\mathbf{v} = \mathbf{A} &\Rightarrow \text{ flujo.} \end{aligned}$$

Consideremos ahora una superficie **cerrada** que encierra un volumen V dado, siendo $d\boldsymbol{\sigma} = \hat{\mathbf{n}} d\sigma$ un elemento diferencial de superficie por el cual atraviesa el flujo $\mathbf{A}$, con $\hat{\mathbf{n}} \perp$ a dicha superficie,

$$\Rightarrow \quad \oint_{\delta V} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma},$$

representa el flujo total saliente del volumen V a través de la superficie total cerrada δV.

Ahora, recordemos que el flujo de salida (neto) en un volumen V lo habíamos obtenido como una interpretación de la **divergencia**,

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} d\tau,$$

por tanto, llegamos a la siguiente relación:

$$\oint_{\delta V} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} d\tau,$$

a lo cual se le conoce como el **teorema de Gauss**.

Por otro lado, si tenemos dos funciones escalares u y v tal que:

$$\nabla \cdot (u\nabla v) = u\nabla^2 v + (\nabla u) \cdot (\nabla v), \quad \nabla \cdot (v\nabla u) = v\nabla^2 u + (\nabla v) \cdot (\nabla u),$$

las restamos, integramos en V y aplicamos el teorema de Gauss,

$$\int_V (u\nabla^2 v - v\nabla^2 u) d\tau = \int_V [\nabla \cdot (u\nabla v) - \nabla \cdot (v\nabla u)] d\tau = \oint_{\delta V} (u\nabla v - v\nabla u) \cdot d\boldsymbol{\sigma},$$

lo cual se conoce como el **teorema de Green**.

Teoremas integrales

Teorema de Stokes

Consideremos un campo vectorial $\mathbf{B}$, y definimos,

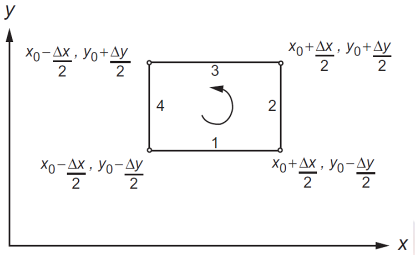
$$\textbf{circulación} = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r},$$

alrededor de una curva plana cerrada.

Ya hemos demostrado que la **circulación** en un área diferencial en el plano xy es:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = |\nabla \times \mathbf{B}|_z dxdy,$$

donde $dxdx = d\sigma$ es el elemento diferencial de área.



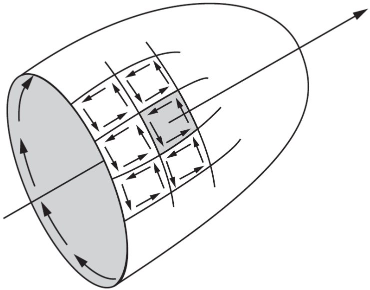
Generalizando el resultado anterior tenemos,

$$\sum_{\text{all sides}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\boldsymbol{\sigma}.$$

Teoremas integrales

Teorema de Stokes

Ahora consideremos una superficie **abierta** y la dividimos en pequeños elementos $d\boldsymbol{\sigma}$:



Sumando sobre todos los $d\sigma$ llegamos al **teorema de Stokes**,

$$\oint_{\delta S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

en donde las integrales de línea de los segmentos internos se cancelan mutuamente y δS representa el perímetro de S.

Si tenemos el caso de una superficie **cerrada** $\Rightarrow$

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0,$$

ya que al no haber perímetro la integral de línea se anula.