# Contenido

2. Álgebra lineal

# Contenido: Tema 02

# Contenido: Tema 02

# Determinantes y sistemas de ecuaciones lineales

## Fundamentos

Consideremos un sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 &= 0, \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 &= 0, \\ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 &= 0, \end{aligned}$$

[1] $x_i = 0, \; \forall \; i = 1, 2, 3.$

# Determinantes y sistemas de ecuaciones lineales

## Fundamentos

Consideremos un sistema de ecuaciones lineales,

$$
\begin{aligned}
a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 &= 0, \\
b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 &= 0, \\
c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 &= 0,
\end{aligned}
$$

lo anterior lo podemos expresar también de la siguiente manera,

$$
\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0.
$$

[1] $x_i = 0, \ \forall \ i = 1, 2, 3.$

Consideremos un sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 &= 0, \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 &= 0, \\ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 &= 0, \end{aligned}$$

lo anterior lo podemos expresar también de la siguiente manera,

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0.$$

Para que el problema tenga solución, aparte de la solución trivial[1], el **determinante** formado por los coeficientes $a_i$, $b_i$ y $c_i$ debe ser **cero**,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

[1] $x_i = 0, \forall\ i = 1, 2, 3.$

# Determinantes y sistemas de ecuaciones lineales

## Propiedades de los determinantes

- **El intercambio** de dos filas o columnas sólo cambia el **signo** del valor del determinante,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

## Propiedades de los determinantes

- **El intercambio** de dos filas o columnas sólo cambia el **signo** del valor del determinante,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

- La propiedad anterior involucra lo siguiente: Cualquier determinante con dos columnas/filas **iguales**, tendrá valor **cero**.

## Propiedades de los determinantes

- **El intercambio** de dos filas o columnas sólo cambia el **signo** del valor del determinante,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} .$$

- La propiedad anterior involucra lo siguiente: Cualquier determinante con dos columnas/filas **iguales**, tendrá valor **cero**.
- La **mult.** de todos los elementos de una sola columna o fila por una cte. $k$ **modifica** el valor del determinante por $k$,

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_{12} & ka_{11} & ka_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} .$$

- **El intercambio** de dos filas o columnas sólo cambia el **signo** del valor del determinante,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

- La propiedad anterior involucra lo siguiente: Cualquier determinante con dos columnas/filas **iguales**, tendrá valor **cero**.
- La **mult.** de todos los elementos de una sola columna o fila por una cte. $k$ **modifica** el valor del determinante por $k$,

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_{12} & ka_{11} & ka_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

- Las propiedades anteriores indican también: Si dos columnas/filas son **proporcionales** $\Rightarrow$ el determinante es **cero**.

- Si los elementos de una columna (o fila) representan **sumas de dos cantidades**, el determinante puede ser descompuesto en una **suma** de determinantes,

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_2 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

- Si los elementos de una columna (o fila) representan **sumas de dos cantidades**, el determinante puede ser descompuesto en una **suma** de determinantes,

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_2 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

- Lo anterior involucra también: El valor de un determinante **no cambia** si un múltiplo de una columna/fila es **añadido** a otra columna/fila.

- Si los elementos de una columna (o fila) representan **sumas de dos cantidades**, el determinante puede ser descompuesto en una **suma** de determinantes,

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_2 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

- Lo anterior involucra también: El valor de un determinante **no cambia** si un múltiplo de una columna/fila es **añadido** a otra columna/fila.
- Finalmente, si cada elemento de una columna/fila es **cero**, entonces el determinante también tiene valor **cero**.

# Determinantes y sistemas de ecuaciones lineales

## Cálculo de un determinante

### Expansión en menores

El **menor** correspondiente al elemento $a_{ij}$, se denota $M_{ij}$ o $M_{ij}(a)$, y representa un determinante de orden $n-1$ que es resultado de eliminar la fila $i$ y la columna $j$ del determinante original, acompañádolo de los **cofactores**, definidos como $(-1)^{i+j}$.

### Expansión en menores

El **menor** correspondiente al elemento $a_{ij}$, se denota $M_{ij}$ o $M_{ij}(a)$, y representa un determinante de orden $n-1$ que es resultado de eliminar la fila $i$ y la columna $j$ del determinante original, acompañádolo de los **cofactores**, definidos como $(-1)^{i+j}$.

Por tanto, una **expansión en menores**, usando por ejemplo la fila $i$, queda como,

$$D_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} M_{ij}.$$

### Expansión en menores

El **menor** correspondiente al elemento $a_{ij}$, se denota $M_{ij}$ o $M_{ij}(a)$, y representa un determinante de orden $n-1$ que es resultado de eliminar la fila $i$ y la columna $j$ del determinante original, acompañádolo de los **cofactores**, definidos como $(-1)^{i+j}$.

Por tanto, una **expansión en menores**, usando por ejemplo la fila $i$, queda como,

$$D_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Un punto a considerar es seleccionar la fila/columna con **mayor** número de ceros en ella, de tal manera que varios de los elementos de la expansión se anulen.

### Método directo mediante expansión

Este método consiste en repetir las primeras $n-1$ filas o columnas al final del determinante para luego realizar el producto del determinante de manera directa.

### Método directo mediante expansión

Este método consiste en repetir las primeras $n-1$ filas o columnas al final del determinante para luego realizar el producto del determinante de manera directa.

Ejemplificando,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

# Determinantes y sistemas de ecuaciones lineales

## Cálculo de un determinante

### Método directo mediante expansión

Este método consiste en repetir las primeras $n-1$ filas o columnas al final del determinante para luego realizar el producto del determinante de manera directa.

Ejemplificando,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix},$$

## Método directo mediante expansión

Este método consiste en repetir las primeras $n-1$ filas o columnas al final del determinante para luego realizar el producto del determinante de manera directa.

Ejemplificando,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix},$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

## Método directo mediante expansión

Este método consiste en repetir las primeras $n-1$ filas o columnas al final del determinante para luego realizar el producto del determinante de manera directa.

Ejemplificando,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix},$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Es importante recordar que es posible aplicar este método sólo para determinantes de dimensión tres como **máximo**.

# Determinantes y sistemas de ecuaciones lineales

## Sistemas de ecuaciones lineales

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones **no−homogéneas**[2],

$$
\begin{aligned}
a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 &= h_1, \\
b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 &= h_2, \\
c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 &= h_3,
\end{aligned}
$$

[2] es decir, que las ecuaciones son iguales a un valor $\neq 0$.

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones **no−homogéneas**[2],

$$\begin{aligned} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 &= h_1, \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 &= h_2, \\ c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 &= h_3, \end{aligned}$$

para resolverlo, primero definimos $D$ como el **determinante** del sistema,

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

[2] es decir, que las ecuaciones son iguales a un valor $\neq 0$.

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones **no−homogéneas**[2],

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 &= h_1, \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 &= h_2, \\ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 &= h_3, \end{aligned}$$

para resolverlo, primero definimos $D$ como el **determinante** del sistema,

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

donde luego realizamos el producto $x_1D$,

$$x_1D = \begin{vmatrix} x_1a_1 & a_2 & a_3 \\ x_1b_1 & b_2 & b_3 \\ x_1c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

[2] es decir, que las ecuaciones son iguales a un valor $\neq 0$.

Acto seguido sumamos a la primera columna el producto de la **segunda columna** por $x_2$[3],

$$x_1 D = \begin{vmatrix} x_1 a_1 + x_2 a_2 & a_2 & a_3 \\ x_1 b_1 + x_2 b_2 & b_2 & b_3 \\ x_1 c_1 + x_2 c_2 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

[3] lo cual, como ya habíamos visto, deja **invariante** al determinante.

Acto seguido sumamos a la primera columna el producto de la **segunda columna** por $x_2$[3],

$$x_1 D = \begin{vmatrix} x_1a_1 + x_2a_2 & a_2 & a_3 \\ x_1b_1 + x_2b_2 & b_2 & b_3 \\ x_1c_1 + x_2c_2 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

y hacemos lo mismo pero con el producto de $x_3$ con la **tercera columna**,

$$x_1 D = \begin{vmatrix} x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 & a_2 & a_3 \\ x_1b_1 + x_2b_2 + x_3b_3 & b_2 & b_3 \\ x_1c_1 + x_2c_2 + x_3c_3 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

[3]lo cual, como ya habíamos visto, deja **invariante** al determinante.

Acto seguido sumamos a la primera columna el producto de la **segunda columna** por $x_2$[3],

$$x_1 D = \begin{vmatrix} x_1 a_1 + x_2 a_2 & a_2 & a_3 \\ x_1 b_1 + x_2 b_2 & b_2 & b_3 \\ x_1 c_1 + x_2 c_2 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

y hacemos lo mismo pero con el producto de $x_3$ con la **tercera columna**,

$$x_1 D = \begin{vmatrix} x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 & a_2 & a_3 \\ x_1 b_1 + x_2 b_2 + x_3 b_3 & b_2 & b_3 \\ x_1 c_1 + x_2 c_2 + x_3 c_3 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h_1 & a_2 & a_3 \\ h_2 & b_2 & b_3 \\ h_3 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

debido a la definición del sistema de ecuaciones mismo.

[3] lo cual, como ya habíamos visto, deja **invariante** al determinante.

Si $D \neq 0$, entonces hemos resuelto el sistema para $x_1$,

$$x_1 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} h_1 & a_2 & a_3 \\ h_2 & b_2 & b_3 \\ h_3 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Si $D \neq 0$, entonces hemos resuelto el sistema para $x_1$,

$$x_1 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} h_1 & a_2 & a_3 \\ h_2 & b_2 & b_3 \\ h_3 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Si desarrollamos de manera análoga para $x_2 D$ y $x_3 D$, obtenemos las siguientes soluciones al sistema,

$$x_2 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & h_1 & a_3 \\ b_1 & h_2 & b_3 \\ c_1 & h_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad x_3 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & h_1 \\ b_1 & b_2 & h_2 \\ c_1 & c_2 & h_3 \end{vmatrix}.$$

Si $D \neq 0$, entonces hemos resuelto el sistema para $x_1$,

$$x_1 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} h_1 & a_2 & a_3 \\ h_2 & b_2 & b_3 \\ h_3 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Si desarrollamos de manera análoga para $x_2D$ y $x_3D$, obtenemos las siguientes soluciones al sistema,

$$x_2 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & h_1 & a_3 \\ b_1 & h_2 & b_3 \\ c_1 & h_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad x_3 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & h_1 \\ b_1 & b_2 & h_2 \\ c_1 & c_2 & h_3 \end{vmatrix}.$$

Se observa que el resultado muestra un simple reemplazo de la $i$-ésima columna de $D$ por los coeficientes del lado derecho del sistema de ecuaciones, esquema conocido como **regla de Cramer**.

Para inferir la naturaleza de un sistema de $n$ ecuaciones con $n$ variables podemos hacer uso del **determinante de coeficientes**,

# Determinantes y sistemas de ecuaciones lineales

## Sistemas de ecuaciones linealmente dependientes e independientes

Para inferir la naturaleza de un sistema de $n$ ecuaciones con $n$ variables podemos hacer uso del **determinante de coeficientes**,

### Sistemas independientes

Si el determinante es **diferente** de cero, entonces el sistema es *linealmente independiente*.

# Determinantes y sistemas de ecuaciones lineales

## Sistemas de ecuaciones linealmente dependientes e independientes

Para inferir la naturaleza de un sistema de $n$ ecuaciones con $n$ variables podemos hacer uso del **determinante de coeficientes**,

### Sistemas independientes

Si el determinante es **diferente** de cero, entonces el sistema es *linealmente independiente*.

Esto involucra que la solución es determinada de manera **unívoca**, es decir, es única.

Para inferir la naturaleza de un sistema de $n$ ecuaciones con $n$ variables podemos hacer uso del **determinante de coeficientes**,

**Sistemas independientes**

Si el determinante es **diferente** de cero, entonces el sistema es *linealmente independiente*.

Esto involucra que la solución es determinada de manera **unívoca**, es decir, es única.

En estos sistemas se pueden presentar tanto casos **homogéneos** como **no-homogéneos** (solución por la regla de Cramer, por ejemplo).

# Determinantes y sistemas de ecuaciones lineales

## Sistemas de ecuaciones linealmente dependientes e independientes

Para inferir la naturaleza de un sistema de $n$ ecuaciones con $n$ variables podemos hacer uso del **determinante de coeficientes**,

### Sistemas independientes

Si el determinante es **diferente** de cero, entonces el sistema es *linealmente independiente*.

Esto involucra que la solución es determinada de manera **unívoca**, es decir, es única.

En estos sistemas se pueden presentar tanto casos **homogéneos** como **no-homogéneos** (solución por la regla de Cramer, por ejemplo).

### Sistemas dependientes

Si el determinante es **igual** a cero, entonces el sistema es *linealmente dependiente*.

Para inferir la naturaleza de un sistema de $n$ ecuaciones con $n$ variables podemos hacer uso del **determinante de coeficientes**,

### Sistemas independientes

Si el determinante es **diferente** de cero, entonces el sistema es *linealmente independiente*.

Esto involucra que la solución es determinada de manera **unívoca**, es decir, es única.

En estos sistemas se pueden presentar tanto casos **homogéneos** como **no-homogéneos** (solución por la regla de Cramer, por ejemplo).

### Sistemas dependientes

Si el determinante es **igual** a cero, entonces el sistema es *linealmente dependiente*.

Por tanto, se tiene que las soluciones **no son únicas**, si no que forman un set parametrizado de soluciones al sistema de ecuaciones.

Para inferir la naturaleza de un sistema de $n$ ecuaciones con $n$ variables podemos hacer uso del **determinante de coeficientes**,

### Sistemas independientes

Si el determinante es **diferente** de cero, entonces el sistema es *linealmente independiente*.

Esto involucra que la solución es determinada de manera **unívoca**, es decir, es única.

En estos sistemas se pueden presentar tanto casos **homogéneos** como **no-homogéneos** (solución por la regla de Cramer, por ejemplo).

### Sistemas dependientes

Si el determinante es **igual** a cero, entonces el sistema es *linealmente dependiente*.

Por tanto, se tiene que las soluciones **no son únicas**, si no que forman un set parametrizado de soluciones al sistema de ecuaciones.

Se pueden tener tanto sistemas **homogéneos** como **no-homogéneos**.

## Sistemas de ecuaciones: método solución de Gauss-Jordan

En este método se construye la **matriz extendida** de coeficientes del sistema,

[4] matriz con los elementos por arriba o por debajo de la diagonal iguales a cero

En este método se construye la **matriz extendida** de coeficientes del sistema,

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 &= h_1, \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 &= h_2, \\ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 &= h_3, \end{aligned}$$

[4] matriz con los elementos por arriba o por debajo de la diagonal iguales a cero

# Determinantes y sistemas de ecuaciones lineales

## Sistemas de ecuaciones: método solución de Gauss-Jordan

En este método se construye la **matriz extendida** de coeficientes del sistema,

$$
\begin{aligned}
a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 &= h_1, \\
b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 &= h_2, \\
c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 &= h_3,
\end{aligned}
\qquad \Longrightarrow \qquad
\left[\begin{array}{ccc|c}
a_1 & a_2 & a_3 & h_1 \\
b_1 & b_2 & b_3 & h_2 \\
c_1 & c_2 & c_3 & h_3
\end{array}\right]
$$

[4] matriz con los elementos por arriba o por debajo de la diagonal iguales a cer

En este método se construye la **matriz extendida** de coeficientes del sistema,

$$
\begin{aligned}
a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 &= h_1, \\
b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 &= h_2, \\
c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 &= h_3,
\end{aligned}
\qquad \Longrightarrow \qquad
\left[\begin{array}{ccc|c}
a_1 & a_2 & a_3 & h_1 \\
b_1 & b_2 & b_3 & h_2 \\
c_1 & c_2 & c_3 & h_3
\end{array}\right]
$$

A esta matriz se le realizan las **operaciones elementales de filas** con el fin de obtener a una matriz triangular[4] y así poder llegar a una solución del sistema de manera mas simple.

[4] matriz con los elementos por arriba o por debajo de la diagonal iguales a cero

En este método se construye la **matriz extendida** de coeficientes del sistema,

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 &= h_1, \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 &= h_2, \\ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 &= h_3, \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} a_1 & a_2 & a_3 & h_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & h_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 & h_3 \end{array}\right]$$

A esta matriz se le realizan las **operaciones elementales de filas** con el fin de obtener a una matriz triangular[4] y así poder llegar a una solución del sistema de manera mas simple.

Tales operaciones son:

- intercambio de dos filas,

[4]matriz con los elementos por arriba o por debajo de la diagonal iguales a cero

# Determinantes y sistemas de ecuaciones lineales

## Sistemas de ecuaciones: método solución de Gauss-Jordan

En este método se construye la **matriz extendida** de coeficientes del sistema,

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 &= h_1, \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 &= h_2, \\ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 &= h_3, \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} a_1 & a_2 & a_3 & h_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & h_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 & h_3 \end{array}\right]$$

A esta matriz se le realizan las **operaciones elementales de filas** con el fin de obtener a una matriz triangular[4] y así poder llegar a una solución del sistema de manera mas simple.
Tales operaciones son:

- intercambio de dos filas,
- multiplicar o dividir una fila por una cte. $\neq 0$,

[4] matriz con los elementos por arriba o por debajo de la diagonal iguales a cero

En este método se construye la **matriz extendida** de coeficientes del sistema,

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 &= h_1, \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 &= h_2, \\ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 &= h_3, \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} a_1 & a_2 & a_3 & h_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & h_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 & h_3 \end{array}\right]$$

A esta matriz se le realizan las **operaciones elementales de filas** con el fin de obtener a una matriz triangular[4] y así poder llegar a una solución del sistema de manera mas simple.

Tales operaciones son:

- intercambio de dos filas,
- multiplicar o dividir una fila por una cte. $\neq 0$,
- añadir/sustraer un múltiplo de una fila a otra.

[4] matriz con los elementos por arriba o por debajo de la diagonal iguales a cero

# Contenido: Tema 02

## Definición de una matriz

Conjunto de números o funciones ordenados en un arreglo bidimensional de $m$ filas y $n$ columnas,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

en donde la dimensión de la matriz es $m \times n$.

## Definición de una matriz

Conjunto de números o funciones ordenados en un arreglo bidimensional de $m$ filas y $n$ columnas,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

en donde la dimensión de la matriz es $m \times n$.

Para definir o referenciarse a un elemento de matriz se utiliza la nomenclatura $a_{ij}$ y corresponde al elemento de la fila $i$ y columna $j$.

# Matrices y propiedades fundamentales

## Propiedades básicas

Para dos matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ se cumplen las siguientes propiedades,

# Matrices y propiedades fundamentales

## Propiedades básicas

Para dos matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ se cumplen las siguientes propiedades,

**Igualdad**

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \quad \Longleftrightarrow \quad a_{ij} = b_{ij}.$$

# Matrices y propiedades fundamentales

## Propiedades básicas

Para dos matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ se cumplen las siguientes propiedades,

### Igualdad

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \quad \Longleftrightarrow \quad a_{ij} = b_{ij}.$$

### Adición/Sustracción

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = \mathbf{C} \quad \Longleftrightarrow \quad a_{ij} \pm b_{ij} = c_{ij},$$

Para dos matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ se cumplen las siguientes propiedades,

**Igualdad**

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \quad \Longleftrightarrow \quad a_{ij} = b_{ij}.$$

**Adición/Sustracción**

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = \mathbf{C} \quad \Longleftrightarrow \quad a_{ij} \pm b_{ij} = c_{ij},$$

en donde se cumple que la adición es tanto **conmutativa**,

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

Para dos matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ se cumplen las siguientes propiedades,

**Igualdad**

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \quad \Longleftrightarrow \quad a_{ij} = b_{ij}.$$

**Adición/Sustracción**

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = \mathbf{C} \quad \Longleftrightarrow \quad a_{ij} \pm b_{ij} = c_{ij},$$

en donde se cumple que la adición es tanto **conmutativa**,

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

como **asociativa**,

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}).$$

## Propiedades básicas

Para dos matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ se cumplen las siguientes propiedades,

### Igualdad

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \quad \Longleftrightarrow \quad a_{ij} = b_{ij}.$$

### Adición/Sustracción

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = \mathbf{C} \quad \Longleftrightarrow \quad a_{ij} \pm b_{ij} = c_{ij},$$

en donde se cumple que la adición es tanto **conmutativa**,

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

como **asociativa**,

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}).$$

### Multiplicación por un escalar

$$\mathbf{B} = \alpha\mathbf{A} \quad \Longleftrightarrow \quad b_{ij} = \alpha a_{ij},$$

en donde $\alpha$ es un escalar.

## Propiedades básicas

Para dos matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ se cumplen las siguientes propiedades,

**Igualdad**

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \iff a_{ij} = b_{ij}.$$

**Adición/Sustracción**

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = \mathbf{C} \iff a_{ij} \pm b_{ij} = c_{ij},$$

en donde se cumple que la adición es tanto **conmutativa**,

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

como **asociativa**,

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}).$$

**Multiplicación por un escalar**

$$\mathbf{B} = \alpha\mathbf{A} \iff b_{ij} = \alpha a_{ij},$$

en donde $\alpha$ es un escalar.

Esta operación es **conmutativa**,

$$\alpha\mathbf{A} = \mathbf{A}\alpha.$$

Para dos matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ se cumplen las siguientes propiedades,

### Igualdad

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \iff a_{ij} = b_{ij}.$$

### Adición/Sustracción

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = \mathbf{C} \iff a_{ij} \pm b_{ij} = c_{ij},$$

en donde se cumple que la adición es tanto **conmutativa**,

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

como **asociativa**,

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}).$$

### Multiplicación por un escalar

$$\mathbf{B} = \alpha \mathbf{A} \iff b_{ij} = \alpha a_{ij},$$

en donde $\alpha$ es un escalar.

Esta operación es **conmutativa**,

$$\alpha \mathbf{A} = \mathbf{A} \alpha.$$

El **determinante** del resultado de esta operación será,

$$|\alpha \mathbf{A}| = \alpha^n |\mathbf{A}|$$

en donde $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada de dimensión $n \times n$.

## Multiplicación de matrices

$$\mathbf{AB} = \mathbf{C} \iff c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj},$$

### Multiplicación de matrices

$$\mathbf{AB} = \mathbf{C} \iff c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj},$$

también llamado **productor interno**, requiere que $\mathbf{A}$ tenga el mismo número de columnas que $\mathbf{B}$ de filas.

### Multiplicación de matrices

$$\mathbf{AB} = \mathbf{C} \iff c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj},$$

también llamado **producto interno**, requiere que $\mathbf{A}$ tenga el mismo número de columnas que $\mathbf{B}$ de filas.

Esta operación es, por lo general, **no−conmutativa**,

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}.$$

### Multiplicación de matrices

$$\mathbf{AB} = \mathbf{C} \iff c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj},$$

también llamado **producto interno**, requiere que $\mathbf{A}$ tenga el mismo número de columnas que $\mathbf{B}$ de filas.

Esta operación es, por lo general, **no−conmutativa**,

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}.$$

Con lo cual es posible definir el **conmutador** de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$,

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{AB} - \mathbf{BA}.$$

### Multiplicación de matrices

$$\mathbf{AB} = \mathbf{C} \iff c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj},$$

también llamado **productor interno**, requiere que $\mathbf{A}$ tenga el mismo número de columnas que $\mathbf{B}$ de filas.

Esta operación es, por lo general, **no−conmutativa**,

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}.$$

Con lo cual es posible definir el **conmutador** de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$,

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{AB} - \mathbf{BA}.$$

La multiplicación de matrices es **asociativa**,

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}).$$

## Multiplicación de matrices

$$\mathbf{AB} = \mathbf{C} \iff c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj},$$

también llamado **producto interno**, requiere que $\mathbf{A}$ tenga el mismo número de columnas que $\mathbf{B}$ de filas.

Esta operación es, por lo general, **no−conmutativa**,

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}.$$

Con lo cual es posible definir el **conmutador** de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$,

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{AB} - \mathbf{BA}.$$

La multiplicación de matrices es **asociativa**,

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}).$$

## Matriz unidad

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

tal que $\mathbf{1A} = \mathbf{A1} = \mathbf{A}$ en donde $\mathbf{1}$ es una matriz **cuadrada**.

# Matrices y propiedades fundamentales

## Propiedades básicas

### Matrices diagonales

$$\mathbf{A} \to \text{diagonal} \iff a_{ij} = \delta_{ij} a_{ij},$$

## Matrices diagonales

$\mathbf{A} \rightarrow$ diagonal $\iff a_{ij} = \delta_{ij} a_{ij},$

## Inversa de una matriz

Si $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{1} \;\Rightarrow\; \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1},$

donde $\mathbf{A}^{-1}$ es la **inversa** de la matriz cuadrada $\mathbf{A}$,

### Matrices diagonales

$$\mathbf{A} \rightarrow \text{diagonal} \iff a_{ij} = \delta_{ij} a_{ij},$$

### Inversa de una matriz

Si $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{1} \;\Rightarrow\; \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$,

donde $\mathbf{A}^{-1}$ es la **inversa** de la matriz cuadrada $\mathbf{A}$,

$$\Rightarrow \; \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{1}.$$

## Matrices diagonales

$$\mathbf{A} \to \text{diagonal} \iff a_{ij} = \delta_{ij} a_{ij},$$

## Inversa de una matriz

Si $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{1} \;\Rightarrow\; \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$,

donde $\mathbf{A}^{-1}$ es la **inversa** de la matriz cuadrada $\mathbf{A}$,

$$\Rightarrow\; \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{1}.$$

Si una matriz **no** posee inversa, se dice que es una matriz **singular**.

### Matrices diagonales

$$\mathbf{A} \rightarrow \text{diagonal} \iff a_{ij} = \delta_{ij} a_{ij},$$

### Inversa de una matriz

Si $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{1} \;\Rightarrow\; \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$,

donde $\mathbf{A}^{-1}$ es la **inversa** de la matriz cuadrada $\mathbf{A}$,

$$\Rightarrow \; \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{1}.$$

Si una matriz **no** posee inversa, se dice que es una matriz **singular**.

La matriz inversa puede ser calculada de la siguiente manera,

$$(\mathbf{A}^{-1})_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{|\mathbf{A}|} M_{ji},$$

lo cual nos indica que si $|\mathbf{A}| = 0$ $\Rightarrow$ $\mathbf{A}$ **no tiene** inversa.

### Matrices diagonales

$\mathbf{A} \rightarrow$ diagonal $\iff a_{ij} = \delta_{ij} a_{ij},$

### Inversa de una matriz

Si $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{1} \;\Rightarrow\; \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$,

donde $\mathbf{A}^{-1}$ es la **inversa** de la matriz cuadrada $\mathbf{A}$,

$$\Rightarrow \; \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{1}.$$

Si una matriz **no** posee inversa, se dice que es una matriz **singular**.

La matriz inversa puede ser calculada de la siguiente manera,

$$(\mathbf{A}^{-1})_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{|\mathbf{A}|} M_{ji},$$

lo cual nos indica que si $|\mathbf{A}| = 0$ $\Rightarrow \mathbf{A}$ **no tiene** inversa.

Otro método para el cálculo de $\mathbf{A}^{-1}$ es el de **Gauss-Jordan**.

### Matrices diagonales

$\mathbf{A} \to$ diagonal $\iff a_{ij} = \delta_{ij} a_{ij}$,

### Inversa de una matriz

Si $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{1} \;\Rightarrow\; \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$,

donde $\mathbf{A}^{-1}$ es la **inversa** de la matriz cuadrada $\mathbf{A}$,

$$\Rightarrow \;\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{1}.$$

Si una matriz **no** posee inversa, se dice que es una matriz **singular**.

La matriz inversa puede ser calculada de la siguiente manera,

$$(\mathbf{A}^{-1})_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{|\mathbf{A}|} M_{ji},$$

lo cual nos indica que si $|\mathbf{A}| = 0$ $\Rightarrow \mathbf{A}$ **no tiene** inversa.

Otro método para el cálculo de $\mathbf{A}^{-1}$ es el de **Gauss-Jordan**.

En el caso de sistemas de ecuaciones lineales habiamos definido,

$$\mathbf{Mx} = \mathbf{h} \;\Rightarrow\; \mathbf{x} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{h}.$$

## Derivadas de determinantes

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{A}| &= (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}, \\
\Rightarrow \; \frac{\partial |\mathbf{A}|}{\partial a_{ij}} &= (-1)^{i+j} M_{ij},
\end{aligned}
$$

## Derivadas de determinantes

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{A}| &= (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}, \\
\Rightarrow \; \frac{\partial |\mathbf{A}|}{\partial a_{ij}} &= (-1)^{i+j} M_{ij},
\end{aligned}
$$

pero ya vimos,

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{A}^{-1})_{ji} &= \frac{(-1)^{j+i} M_{ij}}{|\mathbf{A}|}, \\
\Rightarrow \; (\mathbf{A}^{-1})_{ji} |\mathbf{A}| &= (-1)^{j+i} M_{ij},
\end{aligned}
$$

## Derivadas de determinantes

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{A}| &= (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}, \\
\Rightarrow \; \frac{\partial |\mathbf{A}|}{\partial a_{ij}} &= (-1)^{i+j} M_{ij},
\end{aligned}
$$

pero ya vimos,

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{A}^{-1})_{ji} &= \frac{(-1)^{j+i} M_{ij}}{|\mathbf{A}|}, \\
\Rightarrow \; (\mathbf{A}^{-1})_{ji} |\mathbf{A}| &= (-1)^{j+i} M_{ij},
\end{aligned}
$$

igualando resultados,

$$
\frac{\partial |\mathbf{A}|}{\partial a_{ij}} = (\mathbf{A}^{-1})_{ji} |\mathbf{A}|.
$$

### Derivadas de determinantes

$$|\mathbf{A}| = (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij},$$
$$\Rightarrow \ \frac{\partial|\mathbf{A}|}{\partial a_{ij}} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

pero ya vimos,

$$(\mathbf{A}^{-1})_{ji} = \frac{(-1)^{j+i} M_{ij}}{|\mathbf{A}|},$$
$$\Rightarrow \ (\mathbf{A}^{-1})_{ji}|\mathbf{A}| = (-1)^{j+i} M_{ij},$$

igualando resultados,

$$\frac{\partial|\mathbf{A}|}{\partial a_{ij}} = (\mathbf{A}^{-1})_{ji}|\mathbf{A}|.$$

Si $\mathbf{A}$ posee elementos que dependen de una variable $x \Rightarrow$ podemos calcular lo siguiente,

$$\frac{d|\mathbf{A}|}{dx} = \sum_{ij} \frac{\partial|\mathbf{A}|}{\partial a_{ij}} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x},$$

### Derivadas de determinantes

$$|\mathbf{A}| = (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij},$$
$$\Rightarrow \; \frac{\partial |\mathbf{A}|}{\partial a_{ij}} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

pero ya vimos,

$$(\mathbf{A}^{-1})_{ji} = \frac{(-1)^{j+i} M_{ij}}{|\mathbf{A}|},$$
$$\Rightarrow \; (\mathbf{A}^{-1})_{ji} |\mathbf{A}| = (-1)^{j+i} M_{ij},$$

igualando resultados,

$$\frac{\partial |\mathbf{A}|}{\partial a_{ij}} = (\mathbf{A}^{-1})_{ji} |\mathbf{A}|.$$

Si $\mathbf{A}$ posee elementos que dependen de una variable $x \Rightarrow$ podemos calcular lo siguiente,

$$\frac{d|\mathbf{A}|}{dx} = \sum_{ij} \frac{\partial |\mathbf{A}|}{\partial a_{ij}} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x},$$
$$\frac{d|\mathbf{A}|}{dx} = |\mathbf{A}| \sum_{ij} (\mathbf{A}^{-1})_{ji} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x}.$$

## Derivadas de determinantes

$$|\mathbf{A}| = (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij},$$

$$\Rightarrow \frac{\partial |\mathbf{A}|}{\partial a_{ij}} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

pero ya vimos,

$$(\mathbf{A}^{-1})_{ji} = \frac{(-1)^{j+i} M_{ij}}{|\mathbf{A}|},$$

$$\Rightarrow (\mathbf{A}^{-1})_{ji} |\mathbf{A}| = (-1)^{j+i} M_{ij},$$

igualando resultados,

$$\frac{\partial |\mathbf{A}|}{\partial a_{ij}} = (\mathbf{A}^{-1})_{ji} |\mathbf{A}|.$$

Si $\mathbf{A}$ posee elementos que dependen de una variable $x \Rightarrow$ podemos calcular lo siguiente,

$$\frac{d|\mathbf{A}|}{dx} = \sum_{ij} \frac{\partial |\mathbf{A}|}{\partial a_{ij}} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x},$$

$$\frac{d|\mathbf{A}|}{dx} = |\mathbf{A}| \sum_{ij} (\mathbf{A}^{-1})_{ji} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x}.$$

## Producto de determinantes

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$$

### Derivadas de determinantes

$$|\mathbf{A}| = (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij},$$
$$\Rightarrow \; \frac{\partial |\mathbf{A}|}{\partial a_{ij}} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

pero ya vimos,

$$(\mathbf{A}^{-1})_{ji} = \frac{(-1)^{j+i} M_{ij}}{|\mathbf{A}|},$$
$$\Rightarrow \; (\mathbf{A}^{-1})_{ji} |\mathbf{A}| = (-1)^{j+i} M_{ij},$$

igualando resultados,

$$\frac{\partial |\mathbf{A}|}{\partial a_{ij}} = (\mathbf{A}^{-1})_{ji} |\mathbf{A}|.$$

Si $\mathbf{A}$ posee elementos que dependen de una variable $x \Rightarrow$ podemos calcular lo siguiente,

$$\frac{d|\mathbf{A}|}{dx} = \sum_{ij} \frac{\partial |\mathbf{A}|}{\partial a_{ij}} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x},$$
$$\frac{d|\mathbf{A}|}{dx} = |\mathbf{A}| \sum_{ij} (\mathbf{A}^{-1})_{ji} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x}.$$

### Producto de determinantes

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$$

aplicando a $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}^{-1}$ tenemos,

$$|\mathbf{A}^{-1}||\mathbf{A}| = |\mathbf{1}| \Rightarrow |\mathbf{A}^{-1}| = \frac{1}{|\mathbf{A}|}.$$

## Transpuesta

Si $(\mathbf{A})_{ij} = a_{ij} \;\Rightarrow\; (\tilde{\mathbf{A}})_{ij} = a_{ji}.$

# Matrices y propiedades fundamentales

## Propiedades básicas

### Transpuesta

Si $(\mathbf{A})_{ij} = a_{ij} \;\Rightarrow\; (\tilde{\mathbf{A}})_{ij} = a_{ji}.$

Si se tiene que

$$\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{A}},$$

entonces la matriz es **simétrica**.

### Transpuesta

$$\text{Si } (\mathbf{A})_{ij} = a_{ij} \;\Rightarrow\; (\tilde{\mathbf{A}})_{ij} = a_{ji}.$$

Si se tiene que

$$\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{A}},$$

entonces la matriz es **simétrica**.

### Adjunta

$$\text{Si } (\mathbf{A})_{ij} = a_{ij} \;\Rightarrow\; (\mathbf{A}^{\dagger})_{ij} = a_{ji}^{*},$$

en donde los elementos $a_{ij}$ son números **complejos**.

### Transpuesta

$$\text{Si } (\mathbf{A})_{ij} = a_{ij} \;\Rightarrow\; (\tilde{\mathbf{A}})_{ij} = a_{ji}.$$

Si se tiene que

$$\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{A}},$$

entonces la matriz es **simétrica**.

### Adjunta

$$\text{Si } (\mathbf{A})_{ij} = a_{ij} \;\Rightarrow\; (\mathbf{A}^{\dagger})_{ij} = a^{*}_{ji},$$

en donde los elementos $a_{ij}$ son números **complejos**.

### Traza

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii},$$

en donde $\mathbf{A}$ es una matriz **cuadrada** de $n \times n$.

### Transpuesta

$$\text{Si } (\mathbf{A})_{ij} = a_{ij} \;\Rightarrow\; (\tilde{\mathbf{A}})_{ij} = a_{ji}.$$

Si se tiene que

$$\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{A}},$$

entonces la matriz es **simétrica**.

### Adjunta

$$\text{Si } (\mathbf{A})_{ij} = a_{ij} \;\Rightarrow\; (\mathbf{A}^{\dagger})_{ij} = a^{*}_{ji},$$

en donde los elementos $a_{ij}$ son números **complejos**.

### Traza

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii},$$

en donde $\mathbf{A}$ es una matriz **cuadrada** de $n \times n$.

Algunas propiedades de Tr son,

$$\mathrm{Tr}(\alpha\mathbf{A}) = \alpha\mathrm{Tr}(\mathbf{A}),$$

## Transpuesta

$$\text{Si } (\mathbf{A})_{ij} = a_{ij} \;\Rightarrow\; (\tilde{\mathbf{A}})_{ij} = a_{ji}.$$

Si se tiene que

$$\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{A}},$$

entonces la matriz es **simétrica**.

## Adjunta

$$\text{Si } (\mathbf{A})_{ij} = a_{ij} \;\Rightarrow\; (\mathbf{A}^{\dagger})_{ij} = a_{ji}^{*},$$

en donde los elementos $a_{ij}$ son números **complejos**.

## Traza

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii},$$

en donde $\mathbf{A}$ es una matriz **cuadrada** de $n \times n$.

Algunas propiedades de Tr son,

$$\mathrm{Tr}(\alpha\mathbf{A}) = \alpha\mathrm{Tr}(\mathbf{A}),$$
$$\mathrm{Tr}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathrm{Tr}(\mathbf{A}) + \mathrm{Tr}(\mathbf{B}),$$

### Transpuesta

$$\text{Si } (\mathbf{A})_{ij} = a_{ij} \;\Rightarrow\; (\tilde{\mathbf{A}})_{ij} = a_{ji}.$$

Si se tiene que

$$\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{A}},$$

entonces la matriz es **simétrica**.

### Adjunta

$$\text{Si } (\mathbf{A})_{ij} = a_{ij} \;\Rightarrow\; (\mathbf{A}^{\dagger})_{ij} = a_{ji}^{*},$$

en donde los elementos $a_{ij}$ son números **complejos**.

### Traza

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii},$$

en donde $\mathbf{A}$ es una matriz **cuadrada** de $n \times n$.

Algunas propiedades de Tr son,

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(\alpha\mathbf{A}) &= \alpha\mathrm{Tr}(\mathbf{A}), \\ \mathrm{Tr}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) &= \mathrm{Tr}(\mathbf{A}) + \mathrm{Tr}(\mathbf{B}), \\ \mathrm{Tr}(\mathbf{AB}) &= \mathrm{Tr}(\mathbf{BA}), \end{aligned}$$

### Transpuesta

$$\text{Si } (\mathbf{A})_{ij} = a_{ij} \;\Rightarrow\; (\tilde{\mathbf{A}})_{ij} = a_{ji}.$$

Si se tiene que

$$\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{A}},$$

entonces la matriz es **simétrica**.

### Adjunta

$$\text{Si } (\mathbf{A})_{ij} = a_{ij} \;\Rightarrow\; (\mathbf{A}^{\dagger})_{ij} = a^{*}_{ji},$$

en donde los elementos $a_{ij}$ son números **complejos**.

### Traza

$$\text{Tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii},$$

en donde $\mathbf{A}$ es una matriz **cuadrada** de $n \times n$.

Algunas propiedades de Tr son,

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\alpha\mathbf{A}) &= \alpha\text{Tr}(\mathbf{A}), \\ \text{Tr}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) &= \text{Tr}(\mathbf{A}) + \text{Tr}(\mathbf{B}), \\ \text{Tr}(\mathbf{AB}) &= \text{Tr}(\mathbf{BA}), \\ \Rightarrow\; \text{Tr}([\mathbf{A},\mathbf{B}]) &= 0, \end{aligned}$$

### Transpuesta

$$\text{Si } (\mathbf{A})_{ij} = a_{ij} \;\Rightarrow\; (\tilde{\mathbf{A}})_{ij} = a_{ji}.$$

Si se tiene que

$$\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{A}},$$

entonces la matriz es **simétrica**.

### Adjunta

$$\text{Si } (\mathbf{A})_{ij} = a_{ij} \;\Rightarrow\; (\mathbf{A}^{\dagger})_{ij} = a_{ji}^{*},$$

en donde los elementos $a_{ij}$ son números **complejos**.

### Traza

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii},$$

en donde $\mathbf{A}$ es una matriz **cuadrada** de $n \times n$.

Algunas propiedades de Tr son,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(\alpha\mathbf{A}) &= \alpha\mathrm{Tr}(\mathbf{A}),\\
\mathrm{Tr}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) &= \mathrm{Tr}(\mathbf{A}) + \mathrm{Tr}(\mathbf{B}),\\
\mathrm{Tr}(\mathbf{AB}) &= \mathrm{Tr}(\mathbf{BA}),\\
\Rightarrow\; \mathrm{Tr}([\mathbf{A},\mathbf{B}]) &= 0,
\end{aligned}$$

aún cuando $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

## Op. en productos de matrices

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| = |\mathbf{BA}|,$$

## Op. en productos de matrices

$$\begin{aligned} |\mathbf{AB}| &= |\mathbf{A}||\mathbf{B}| = |\mathbf{BA}|, \\ \mathsf{Tr}(\mathbf{AB}) &= \mathsf{Tr}(\mathbf{BA}), \end{aligned}$$

## Op. en productos de matrices

$$\begin{aligned}
|\mathbf{AB}| &= |\mathbf{A}||\mathbf{B}| = |\mathbf{BA}|, \\
\mathsf{Tr}(\mathbf{AB}) &= \mathsf{Tr}(\mathbf{BA}), \\
\widetilde{\mathbf{AB}} &= \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{A}},
\end{aligned}$$

## Op. en productos de matrices

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{AB}| &= |\mathbf{A}||\mathbf{B}| = |\mathbf{BA}|,\\
\mathsf{Tr}(\mathbf{AB}) &= \mathsf{Tr}(\mathbf{BA}),\\
\widetilde{\mathbf{AB}} &= \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{A}},\\
(\mathbf{AB})^\dagger &= \mathbf{B}^\dagger\mathbf{A}^\dagger,
\end{aligned}
$$

## Op. en productos de matrices

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{AB}| &= |\mathbf{A}||\mathbf{B}| = |\mathbf{BA}|, \\
\mathsf{Tr}(\mathbf{AB}) &= \mathsf{Tr}(\mathbf{BA}), \\
\widetilde{\mathbf{AB}} &= \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{A}}, \\
(\mathbf{AB})^{\dagger} &= \mathbf{B}^{\dagger}\mathbf{A}^{\dagger}, \\
(\mathbf{AB})^{-1} &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}.
\end{aligned}
$$

## Op. en productos de matrices

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{AB}| &= |\mathbf{A}||\mathbf{B}| = |\mathbf{BA}|, \\
\mathsf{Tr}(\mathbf{AB}) &= \mathsf{Tr}(\mathbf{BA}), \\
\widetilde{\mathbf{AB}} &= \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{A}}, \\
(\mathbf{AB})^\dagger &= \mathbf{B}^\dagger\mathbf{A}^\dagger, \\
(\mathbf{AB})^{-1} &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}.
\end{aligned}
$$

## Matrices ortogonales

$$\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{S}^{-1} \;\Rightarrow\; \mathbf{S}\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{1},$$

en donde $\mathbf{S}$ es una matriz **real**, y cumple tambíen con:

## Op. en productos de matrices

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{AB}| &= |\mathbf{A}||\mathbf{B}| = |\mathbf{BA}|,\\
\mathsf{Tr}(\mathbf{AB}) &= \mathsf{Tr}(\mathbf{BA}),\\
\widetilde{\mathbf{AB}} &= \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{A}},\\
(\mathbf{AB})^\dagger &= \mathbf{B}^\dagger\mathbf{A}^\dagger,\\
(\mathbf{AB})^{-1} &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}.
\end{aligned}
$$

## Matrices ortogonales

$$\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{S}^{-1} \;\Rightarrow\; \mathbf{S}\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{1},$$

en donde $\mathbf{S}$ es una matriz **real**, y cumple tambíen con:

$$|\mathbf{S}| = \pm 1.$$

## Op. en productos de matrices

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{AB}| &= |\mathbf{A}||\mathbf{B}| = |\mathbf{BA}|, \\
\mathrm{Tr}(\mathbf{AB}) &= \mathrm{Tr}(\mathbf{BA}), \\
\widetilde{\mathbf{AB}} &= \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{A}}, \\
(\mathbf{AB})^{\dagger} &= \mathbf{B}^{\dagger}\mathbf{A}^{\dagger}, \\
(\mathbf{AB})^{-1} &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}.
\end{aligned}
$$

## Matrices ortogonales

$$\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{S}^{-1} \;\Rightarrow\; \mathbf{S}\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{1},$$

en donde $\mathbf{S}$ es una matriz **real**, y cumple tambíen con:

$$|\mathbf{S}| = \pm 1.$$

## Matrices unitarias

$$\mathbf{U}^{\dagger} = \mathbf{U}^{-1} \;\Rightarrow\; \mathbf{U}\mathbf{U}^{\dagger} = \mathbf{U}^{\dagger}\mathbf{U} = \mathbf{1}.$$

# Matrices y propiedades fundamentales

## Propiedades básicas

### Op. en productos de matrices

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{AB}| &= |\mathbf{A}||\mathbf{B}| = |\mathbf{BA}|,\\
\mathsf{Tr}(\mathbf{AB}) &= \mathsf{Tr}(\mathbf{BA}),\\
\widetilde{\mathbf{AB}} &= \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{A}},\\
(\mathbf{AB})^\dagger &= \mathbf{B}^\dagger\mathbf{A}^\dagger,\\
(\mathbf{AB})^{-1} &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}.
\end{aligned}
$$

### Matrices ortogonales

$$\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{S}^{-1} \ \Rightarrow \ \mathbf{S}\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{1},$$

en donde $\mathbf{S}$ es una matriz **real**, y cumple tambíen con:

$$|\mathbf{S}| = \pm 1.$$

### Matrices unitarias

$$\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{U}^{-1} \ \Rightarrow \ \mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{U}^\dagger\mathbf{U} = \mathbf{1}.$$

Si la matriz **unitaria** también es **real** $\Rightarrow$ la matriz será **ortogonal**, además cumple con,

# Matrices y propiedades fundamentales

## Propiedades básicas

### Op. en productos de matrices

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{AB}| &= |\mathbf{A}||\mathbf{B}| = |\mathbf{BA}|,\\
\mathrm{Tr}(\mathbf{AB}) &= \mathrm{Tr}(\mathbf{BA}),\\
\widetilde{\mathbf{AB}} &= \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{A}},\\
(\mathbf{AB})^{\dagger} &= \mathbf{B}^{\dagger}\mathbf{A}^{\dagger},\\
(\mathbf{AB})^{-1} &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}.
\end{aligned}
$$

### Matrices ortogonales

$$\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{S}^{-1} \;\Rightarrow\; \mathbf{S}\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{1},$$

en donde $\mathbf{S}$ es una matriz **real**, y cumple tambíen con:

$$|\mathbf{S}| = \pm 1.$$

### Matrices unitarias

$$\mathbf{U}^{\dagger} = \mathbf{U}^{-1} \;\Rightarrow\; \mathbf{U}\mathbf{U}^{\dagger} = \mathbf{U}^{\dagger}\mathbf{U} = \mathbf{1}.$$

Si la matriz **unitaria** también es **real** $\Rightarrow$ la matriz será **ortogonal**, además cumple con,

$$|\mathbf{U}||\mathbf{U}^{\dagger}| = |\mathbf{U}|^2 = 1.$$

### Op. en productos de matrices

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| = |\mathbf{BA}|,$$
$$\mathsf{Tr}(\mathbf{AB}) = \mathsf{Tr}(\mathbf{BA}),$$
$$\widetilde{\mathbf{AB}} = \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{A}},$$
$$(\mathbf{AB})^\dagger = \mathbf{B}^\dagger\mathbf{A}^\dagger,$$
$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}.$$

### Matrices ortogonales

$$\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{S}^{-1} \;\Rightarrow\; \mathbf{S}\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{1},$$

en donde $\mathbf{S}$ es una matriz **real**, y cumple tambíen con:

$$|\mathbf{S}| = \pm 1.$$

### Matrices unitarias

$$\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{U}^{-1} \;\Rightarrow\; \mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{U}^\dagger\mathbf{U} = \mathbf{1}.$$

Si la matriz **unitaria** también es **real** $\Rightarrow$ la matriz será **ortogonal**, además cumple con,

$$|\mathbf{U}||\mathbf{U}^\dagger| = |\mathbf{U}|^2 = 1.$$

### Matrices hermíticas

$$\mathbf{H}^\dagger = \mathbf{H} \Rightarrow h_{ji}^* = h_{ij}.$$

### Op. en productos de matrices

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{AB}| &= |\mathbf{A}||\mathbf{B}| = |\mathbf{BA}|,\\
\mathrm{Tr}(\mathbf{AB}) &= \mathrm{Tr}(\mathbf{BA}),\\
\widetilde{\mathbf{AB}} &= \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{A}},\\
(\mathbf{AB})^\dagger &= \mathbf{B}^\dagger\mathbf{A}^\dagger,\\
(\mathbf{AB})^{-1} &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}.
\end{aligned}
$$

### Matrices ortogonales

$$\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{S}^{-1} \;\Rightarrow\; \mathbf{S}\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{1},$$

en donde $\mathbf{S}$ es una matriz **real**, y cumple tambíen con:

$$|\mathbf{S}| = \pm 1.$$

### Matrices unitarias

$$\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{U}^{-1} \;\Rightarrow\; \mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{U}^\dagger\mathbf{U} = \mathbf{1}.$$

Si la matriz **unitaria** también es **real** $\Rightarrow$ la matriz será **ortogonal**, además cumple con,

$$|\mathbf{U}||\mathbf{U}^\dagger| = |\mathbf{U}|^2 = 1.$$

### Matrices hermíticas

$$\mathbf{H}^\dagger = \mathbf{H} \Rightarrow h_{ji}^* = h_{ij}.$$

Lo anterior indica que los elementos de la diagonal principal serán **reales**.

## Producto directo

Si tenemos,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\rightarrow \ \text{dim.}\{m \times n\}, \\ \mathbf{B} &\rightarrow \ \text{dim.}\{m' \times n'\}, \end{aligned}$$

## Producto directo

Si tenemos,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \rightarrow &\ \text{dim.}\{m \times n\}, \\ \mathbf{B} \rightarrow &\ \text{dim.}\{m' \times n'\}, \\ \Rightarrow \mathsf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \rightarrow &\ \text{dim.}\{mm' \times nn'\}, \end{aligned}$$

## Producto directo

Si tenemos,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\rightarrow \text{ dim.}\{m \times n\}, \\ \mathbf{B} &\rightarrow \text{ dim.}\{m' \times n'\}, \\ \Rightarrow \mathsf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} &\rightarrow \text{ dim.}\{mm' \times nn'\}, \end{aligned}$$

en donde,

$$\begin{aligned} C_{\alpha\beta} &= A_{ij} B_{kl}, \\ \alpha &= m'(i-1) + k, \\ \beta &= n'(j-1) + l. \end{aligned}$$

# Matrices y propiedades fundamentales

## Propiedades básicas: producto directo

### Producto directo

Si tenemos,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\rightarrow \text{ dim.}\{m \times n\}, \\ \mathbf{B} &\rightarrow \text{ dim.}\{m' \times n'\}, \\ \Rightarrow \mathsf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} &\rightarrow \text{ dim.}\{mm' \times nn'\}, \end{aligned}$$

en donde,

$$\begin{aligned} C_{\alpha\beta} &= A_{ij} B_{kl}, \\ \alpha &= m'(i-1) + k, \\ \beta &= n'(j-1) + l. \end{aligned}$$

Además, si:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \;\; \& \;\; \mathbf{C}' = \mathbf{A}' \otimes \mathbf{B}',$$

y los productos **internos** $\mathbf{AA}'$ $\mathbf{BB}'$ están definidos $\Rightarrow$

$$\mathbf{CC}' = (\mathbf{AA}') \otimes (\mathbf{BB}').$$

# Matrices y propiedades fundamentales

## Propiedades básicas: producto directo

### Producto directo

Si tenemos,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\rightarrow \text{ dim.}\{m \times n\}, \\ \mathbf{B} &\rightarrow \text{ dim.}\{m' \times n'\}, \\ \Rightarrow \mathrm{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} &\rightarrow \text{ dim.}\{mm' \times nn'\}, \end{aligned}$$

en donde,

$$\begin{aligned} C_{\alpha\beta} &= A_{ij} B_{kl}, \\ \alpha &= m'(i-1) + k, \\ \beta &= n'(j-1) + l. \end{aligned}$$

Además, si:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \;\;\&\;\; \mathbf{C}' = \mathbf{A}' \otimes \mathbf{B}',$$

y los productos **internos** $\mathbf{AA}'$ $\mathbf{BB}'$ están definidos $\Rightarrow$

$$\mathbf{CC}' = (\mathbf{AA}') \otimes (\mathbf{BB}').$$

Finalmente, si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son de mismas dimensiones se cumple que,

$$\begin{aligned} \mathbf{C} \otimes (\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \mathbf{C} \otimes \mathbf{A} + \mathbf{C} \otimes \mathbf{B}, \\ (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} &= \mathbf{A} \otimes \mathbf{C} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{C}. \end{aligned}$$

## Ejemplos producto directo

(1) Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices $2 \times 2$, calculamos el producto directo $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$,

## Ejemplos producto directo

(1) Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices $2 \times 2$, calculamos el producto directo $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$,

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$$

## Ejemplos producto directo

(1) Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices $2 \times 2$, calculamos el producto directo $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$,

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

## Ejemplos producto directo

(1) Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices $2 \times 2$, calculamos el producto directo $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$,

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix}.$$

## Ejemplos producto directo

(1) Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices $2 \times 2$, calculamos el producto directo $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$,

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix}.$$

(2) Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son vectores−columna de dos elementos, entonces:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \qquad\qquad .$$

## Ejemplos producto directo

(1) Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices $2\times 2$, calculamos el producto directo $\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}$,

$$\mathbf{A}\otimes\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix}.$$

(2) Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son vectores−columna de dos elementos, entonces:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1\mathbf{y} \\ x_2\mathbf{y} \end{bmatrix} \qquad .$$

## Ejemplos producto directo

(1) Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices $2 \times 2$, calculamos el producto directo $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$,

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix}.$$

(2) Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son vectores−columna de dos elementos, entonces:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1\mathbf{y} \\ x_2\mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1y_1 \\ x_1y_2 \\ x_2y_1 \\ x_2y_2 \end{bmatrix}.$$

# Matrices y propiedades fundamentales

## Propiedades básicas: fuciones de matrices

Si tenemos $\mathbf{A}$ **cuadrada** de dimensión $n \times n$, entonces las funciones:

$$\exp(\mathbf{A}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\mathbf{A}^j,$$

$$\mathrm{Sen}(\mathbf{A}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!}\mathbf{A}^{2j+1},$$

$$\mathrm{Cos}(\mathbf{A}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!}\mathbf{A}^{2j},$$

estarán también definidas como matrices de $n \times n$.

# Matrices y propiedades fundamentales

## Propiedades básicas: fuciones de matrices

Si tenemos $\mathbf{A}$ **cuadrada** de dimensión $n \times n$, entonces las funciones:

$$\exp(\mathbf{A}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\mathbf{A}^j,$$

$$\mathrm{Sen}(\mathbf{A}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!}\mathbf{A}^{2j+1},$$

$$\mathrm{Cos}(\mathbf{A}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!}\mathbf{A}^{2j},$$

estarán también definidas como matrices de $n \times n$.

Un ejemplo de aplicación sería la **identidad de Euler**,

$$\exp(i\sigma_k\theta) = \mathbf{1}\mathrm{Cos}\theta + i\sigma_k\mathrm{Sen}\theta$$

Si tenemos $\mathbf{A}$ **cuadrada** de dimensión $n \times n$, entonces las funciones:

$$\text{exp}(\mathbf{A}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\mathbf{A}^j,$$

$$\text{Sen}(\mathbf{A}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!}\mathbf{A}^{2j+1},$$

$$\text{Cos}(\mathbf{A}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!}\mathbf{A}^{2j},$$

estarán también definidas como matrices de $n \times n$.

Un ejemplo de aplicación sería la **identidad de Euler**,

$$\text{exp}(i\sigma_k\theta) = \mathbf{1}\text{Cos}\theta + i\sigma_k\text{Sen}\theta$$

en donde $\theta$, $k = 1, 2, 3 \in \mathbb{R}$ y $\sigma_k$ son las **matrices de Pauli**,

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

# Matrices y propiedades fundamentales

## Propiedades básicas: fuciones de matrices

Otra aplicación sería la relación de matrices **hermíticas** y **unitarias**,

$$\mathbf{U} = \exp(i\mathbf{H})$$

donde $\mathbf{U}$ será **unitaria** $\iff$ $\mathbf{H}$ es **hermítica**.

Otra aplicación sería la relación de matrices **hermíticas** y **unitarias**,

$$\mathbf{U} = \exp(i\mathbf{H})$$

donde $\mathbf{U}$ será **unitaria** $\iff$ $\mathbf{H}$ es **hermítica**.

Otro resultado es que cualquier matriz hermítica $\mathbf{H}$ satisface la **fórmula de la traza**,

$$|\exp(\mathbf{H})| = \exp[\mathrm{Tr}(\mathbf{H})].$$

# Matrices y propiedades fundamentales

## Propiedades básicas: fuciones de matrices

Otra aplicación sería la relación de matrices **hermíticas** y **unitarias**,

$$\mathbf{U} = \exp(i\mathbf{H})$$

donde $\mathbf{U}$ será **unitaria** $\iff$ $\mathbf{H}$ es **hermítica**.

Otro resultado es que cualquier matriz hermítica $\mathbf{H}$ satisface la **fórmula de la traza**,

$$|\exp(\mathbf{H})| = \exp[\mathrm{Tr}(\mathbf{H})].$$

Finalmente, la fórmula de **Baker-Hausdorff**,

$$\exp(-\mathbf{T})\mathbf{A}\exp(\mathbf{T}) = \mathbf{A}+[\mathbf{A},\mathbf{T}]+\frac{1}{2!}\left[[\mathbf{A},\mathbf{T}],\mathbf{T}\right]+\frac{1}{3!}\left[[[\mathbf{A},\mathbf{T}],\mathbf{T}],\mathbf{T}\right]+\dots$$

# Contenido: Tema 02

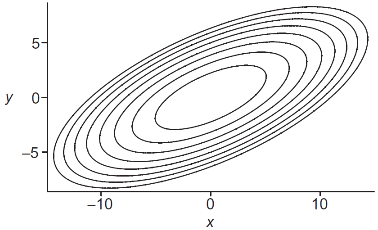
# Problemas de eigenvalores

## Ejemplo preliminar

Consideremos una partícula que se mueve sin fricción en un campo bidimensional del tipo,

$$V(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2,$$

en donde los parámetros $a$, $b$, y $c$ describen al campo $V$ y cuyo mínimo se encuentra en $x = y = 0$.



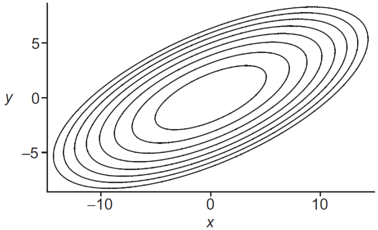
# Problemas de eigenvalores

## Ejemplo preliminar

Consideremos una partícula que se mueve sin fricción en un campo bidimensional del tipo,

$$V(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2,$$

en donde los parámetros $a$, $b$, y $c$ describen al campo $V$ y cuyo mínimo se encuentra en $x = y = 0$.




Calculando las componentes de la fuerza en un punto dado,

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -2ax - by, \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -bx - 2cy.$$

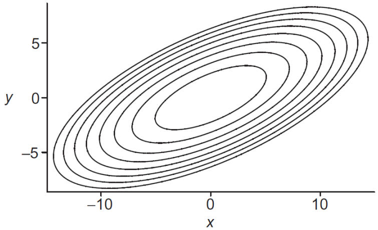
# Problemas de eigenvalores

## Ejemplo preliminar

Consideremos una partícula que se mueve sin fricción en un campo bidimensional del tipo,

$$V(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2,$$

en donde los parámetros $a$, $b$, y $c$ describen al campo $V$ y cuyo mínimo se encuentra en $x = y = 0$.




Calculando las componentes de la fuerza en un punto dado,

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -2ax - by, \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -bx - 2cy.$$

Para encontrar las dir. de la fuerza que se orientan hacia el origen del potencial ($x = y = 0$), describamos el problema matricialmente:

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2a & -b \\ -b & -2c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

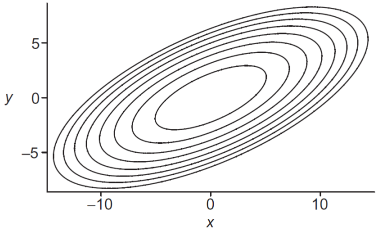
# Problemas de eigenvalores

## Ejemplo preliminar

Consideremos una partícula que se mueve sin fricción en un campo bidimensional del tipo,

$$V(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2,$$

en donde los parámetros $a$, $b$, y $c$ describen al campo $V$ y cuyo mínimo se encuentra en $x = y = 0$.




Calculando las componentes de la fuerza en un punto dado,

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -2ax - by, \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -bx - 2cy.$$

Para encontrar las dir. de la fuerza que se orientan hacia el origen del potencial ($x = y = 0$), describamos el problema matricialmente:

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2a & -b \\ -b & -2c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F} = \mathbf{Hr}$$

# Problemas de eigenvalores

## Definición de ecuación secular

La condición de orientación al origen del campo de fuerzas equivale a decir,

$$\frac{F_x}{F_y} = \frac{x}{y},$$

# Problemas de eigenvalores

## Definición de ecuación secular

La condición de orientación al origen del campo de fuerzas equivale a decir,

$$\frac{F_x}{F_y} = \frac{x}{y},$$

lo cual a su vez indica que,

$$\mathbf{F} \propto \mathbf{r} \;\Rightarrow\; \mathbf{F} = \lambda \mathbf{r}$$

en donde $\lambda$ es una constante de proporcionalidad.

# Problemas de eigenvalores

## Definición de ecuación secular

La condición de orientación al origen del campo de fuerzas equivale a decir,

$$\frac{F_x}{F_y} = \frac{x}{y},$$

lo cual a su vez indica que,

$$\mathbf{F} \propto \mathbf{r} \;\Rightarrow\; \mathbf{F} = \lambda\mathbf{r}$$

en donde $\lambda$ es una constante de proporcionalidad.

Relacionando con el res. previo,

$$\mathbf{F} = \mathbf{H}\mathbf{r} \;\Rightarrow\; \mathbf{H}\mathbf{r} = \lambda\mathbf{r},$$

$$\therefore\; (\mathbf{H} - \lambda\mathbf{1})\mathbf{r} = 0.$$

# Problemas de eigenvalores

## Definición de ecuación secular

La condición de orientación al origen del campo de fuerzas equivale a decir,

$$\frac{F_x}{F_y} = \frac{x}{y},$$

lo cual a su vez indica que,

$$\mathbf{F} \propto \mathbf{r} \;\Rightarrow\; \mathbf{F} = \lambda\mathbf{r}$$

en donde $\lambda$ es una constante de proporcionalidad.

Relacionando con el res. previo,

$$\mathbf{F} = \mathbf{H}\mathbf{r} \;\Rightarrow\; \mathbf{H}\mathbf{r} = \lambda\mathbf{r},$$

$$\therefore\; (\mathbf{H} - \lambda\mathbf{1})\mathbf{r} = 0.$$

Lo anterior se puede visualizar como un sistema de **ecuaciones lineales** homogéneas, en donde $\lambda$ y $\mathbf{r}$ deben de ser determinados.

# Problemas de eigenvalores

## Definición de ecuación secular

La condición de orientación al origen del campo de fuerzas equivale a decir,

$$\frac{F_x}{F_y} = \frac{x}{y},$$

lo cual a su vez indica que,

$$\mathbf{F} \propto \mathbf{r} \;\Rightarrow\; \mathbf{F} = \lambda \mathbf{r}$$

en donde $\lambda$ es una constante de proporcionalidad.

Relacionando con el res. previo,

$$\mathbf{F} = \mathbf{H}\mathbf{r} \;\Rightarrow\; \mathbf{H}\mathbf{r} = \lambda \mathbf{r},$$
$$\therefore\; (\mathbf{H} - \lambda \mathbf{1})\mathbf{r} = 0.$$

Lo anterior se puede visualizar como un sistema de **ecuaciones lineales** homogéneas, en donde $\lambda$ y $\mathbf{r}$ deben de ser determinados.

Para que el sistema tenga solucón (aparte de la trivial $\mathbf{r} = \mathbf{0}$) se debe cumplir, por tanto,

$$|\mathbf{H} - \lambda \mathbf{1}| = 0$$

lo cual se conoce como **ecuación secular**.

Regresando al ejemplo inicial,

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -2a & -b \\ -b & -2c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & -6 \end{bmatrix},$$

especificando $a = 1$, $b = -\sqrt{5}$, y $c = 3$.

# Problemas de eigenvalores

## Ejemplo preliminar: obtención de eigenvalores

Regresando al ejemplo inicial,

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -2a & -b \\ -b & -2c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & -6 \end{bmatrix},$$

especificando $a = 1$, $b = -\sqrt{5}$, y $c = 3$.

Resolviendo por tanto la ecuación secular,

$$|\mathbf{H} - \mathbf{1}\lambda| = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} -2-\lambda & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & -6-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

Regresando al ejemplo inicial,

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -2a & -b \\ -b & -2c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & -6 \end{bmatrix},$$

especificando $a = 1$, $b = -\sqrt{5}$, y $c = 3$.

Resolviendo por tanto la ecuación secular,

$$|\mathbf{H} - \mathbf{1}\lambda| = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} -2 - \lambda & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & -6 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

lo cual se reduce a,

$$\lambda^2 + 8\lambda + 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda + 1)(\lambda + 7) = 0,$$

# Problemas de eigenvalores

## Ejemplo preliminar: obtención de eigenvalores

Regresando al ejemplo inicial,

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -2a & -b \\ -b & -2c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & -6 \end{bmatrix},$$

especificando $a = 1$, $b = -\sqrt{5}$, y $c = 3$.

Resolviendo por tanto la ecuación secular,

$$|\mathbf{H} - \mathbf{1}\lambda| = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} -2-\lambda & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & -6-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

lo cual se reduce a,

$$\lambda^2 + 8\lambda + 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda+1)(\lambda+7) = 0,$$

dando como resultado los **eigenvalores** $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = -7$.

# Problemas de eigenvalores

## Ejemplo preliminar: obtención de eigenvectores

Para obtener los **eigenvectores**, regresamos a la ecuación original y sustituimos el **eigenvalor** obtenido para el cual deseamos su eigenvector,

$$(\mathbf{H} - \mathbf{1}\lambda_i)\mathbf{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -2-\lambda_i & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & -6-\lambda_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0.$$

# Problemas de eigenvalores

## Ejemplo preliminar: obtención de eigenvectores

Para obtener los **eigenvectores**, regresamos a la ecuación original y sustituimos el **eigenvalor** obtenido para el cual deseamos su eigenvector,

$$(\mathbf{H} - \mathbf{1}\lambda_i)\mathbf{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -2-\lambda_i & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & -6-\lambda_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0.$$

$\boldsymbol{\lambda_1 = -1}$

$$\begin{bmatrix} -1 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0,$$

# Problemas de eigenvalores

## Ejemplo preliminar: obtención de eigenvectores

Para obtener los **eigenvectores**, regresamos a la ecuación original y sustituimos el **eigenvalor** obtenido para el cual deseamos su eigenvector,

$$(\mathbf{H} - \mathbf{1}\lambda_i)\mathbf{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -2-\lambda_i & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & -6-\lambda_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0.$$

$\boldsymbol{\lambda_1 = -1}$

$$\begin{bmatrix} -1 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0,$$

expandiendo,

$$\begin{aligned} -x + \sqrt{5}y &= 0, \\ \sqrt{5}x - 5y &= 0, \\ \Rightarrow \; x &= \sqrt{5}y. \end{aligned}$$

# Problemas de eigenvalores

## Ejemplo preliminar: obtención de eigenvectores

Para obtener los **eigenvectores**, regresamos a la ecuación original y sustituimos el **eigenvalor** obtenido para el cual deseamos su eigenvector,

$$(\mathbf{H} - \mathbf{1}\lambda_i)\mathbf{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -2-\lambda_i & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & -6-\lambda_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0.$$

$\boldsymbol{\lambda_1 = -1}$

$$\begin{bmatrix} -1 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0,$$

expandiendo,

$$-x + \sqrt{5}y = 0,$$
$$\sqrt{5}x - 5y = 0,$$
$$\Rightarrow \; x = \sqrt{5}y.$$

Por tanto, para obtener la solución proponemos:

$$\text{si} \;\; y = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{5},$$

# Problemas de eigenvalores

## Ejemplo preliminar: obtención de eigenvectores

Para obtener los **eigenvectores**, regresamos a la ecuación original y sustituimos el **eigenvalor** obtenido para el cual deseamos su eigenvector,

$$(\mathbf{H} - \mathbf{1}\lambda_i)\mathbf{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -2-\lambda_i & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & -6-\lambda_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0.$$

$\boldsymbol{\lambda_1 = -1}$

$$\begin{bmatrix} -1 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0,$$

expandiendo,

$$-x + \sqrt{5}y = 0,$$
$$\sqrt{5}x - 5y = 0,$$
$$\Rightarrow \; x = \sqrt{5}y.$$

Por tanto, para obtener la solución proponemos:

$$\text{si} \;\; y = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{5},$$

con lo cual, finalmente normalizando se obtiene:

$$\mathbf{r}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

# Problemas de eigenvalores

## Ejemplo preliminar: obtención de eigenvectores

$\boldsymbol{\lambda_2 = -7}$

$$\begin{bmatrix} 5 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0,$$

$\boldsymbol{\lambda_2 = -7}$

$$\begin{bmatrix} 5 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0,$$

expandiendo,

$$\begin{aligned} 5x + \sqrt{5}y &= 0, \\ \sqrt{5}x + y &= 0, \\ \Rightarrow \; y &= -\sqrt{5}x. \end{aligned}$$

# Problemas de eigenvalores

## Ejemplo preliminar: obtención de eigenvectores

$\boldsymbol{\lambda_2 = -7}$

$$\begin{bmatrix} 5 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0,$$

expandiendo,

$$\begin{aligned} 5x + \sqrt{5}y &= 0, \\ \sqrt{5}x + y &= 0, \\ \Rightarrow \; y &= -\sqrt{5}x. \end{aligned}$$

Por tanto, si $x = 1 \Rightarrow y = -\sqrt{5}$, obteniendo,

$$\mathbf{r}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

# Problemas de eigenvalores

## Ejemplo preliminar: obtención de eigenvectores

$\boldsymbol{\lambda_2 = -7}$

$$\begin{bmatrix} 5 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0,$$

expandiendo,

$$5x + \sqrt{5}y = 0,$$
$$\sqrt{5}x + y = 0,$$
$$\Rightarrow \; y = -\sqrt{5}x.$$

Por tanto, si $x = 1 \Rightarrow y = -\sqrt{5}$, obteniendo,

$$\mathbf{r}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

Resumiendo tenemos,

$$\lambda_1 = -1 \;\Rightarrow\; \mathbf{r}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_2 = -7 \;\Rightarrow\; \mathbf{r}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{5} \end{bmatrix},$$

$\boldsymbol{\lambda_2 = -7}$

$$\begin{bmatrix} 5 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0,$$

expandiendo,

$$5x + \sqrt{5}y = 0,$$
$$\sqrt{5}x + y = 0,$$
$$\Rightarrow \; y = -\sqrt{5}x.$$

Por tanto, si $x = 1 \Rightarrow y = -\sqrt{5}$, obteniendo,

$$\mathbf{r}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

Resumiendo tenemos,

$$\lambda_1 = -1 \;\Rightarrow\; \mathbf{r}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_2 = -7 \;\Rightarrow\; \mathbf{r}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{5} \end{bmatrix},$$

De los resultados observamos lo siguiente,

(1) el num. de eigenvalores es el **mismo** que la dimensión de $\mathbf{H}$,

# Problemas de eigenvalores

## Ejemplo preliminar: obtención de eigenvectores

$\boldsymbol{\lambda_2 = -7}$

$$\begin{bmatrix} 5 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0,$$

expandiendo,

$$5x + \sqrt{5}y = 0,$$
$$\sqrt{5}x + y = 0,$$
$$\Rightarrow \ y = -\sqrt{5}x.$$

Por tanto, si $x = 1 \Rightarrow y = -\sqrt{5}$, obteniendo,

$$\mathbf{r}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

Resumiendo tenemos,

$$\lambda_1 = -1 \ \Rightarrow \ \mathbf{r}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_2 = -7 \ \Rightarrow \ \mathbf{r}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{5} \end{bmatrix},$$

De los resultados observamos lo siguiente,

(1) el num. de eigenvalores es el **mismo** que la dimensión de $\mathbf{H}$,

(2) los eigenvalores obtenidos son **reales**,

# Problemas de eigenvalores

## Ejemplo preliminar: obtención de eigenvectores

$\boldsymbol{\lambda_2 = -7}$

$$\begin{bmatrix} 5 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0,$$

expandiendo,

$$5x + \sqrt{5}y = 0,$$
$$\sqrt{5}x + y = 0,$$
$$\Rightarrow \; y = -\sqrt{5}x.$$

Por tanto, si $x = 1 \Rightarrow y = -\sqrt{5}$, obteniendo,

$$\mathbf{r}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

Resumiendo tenemos,

$$\lambda_1 = -1 \;\Rightarrow\; \mathbf{r}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_2 = -7 \;\Rightarrow\; \mathbf{r}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{5} \end{bmatrix},$$

De los resultados observamos lo siguiente,

(1) el num. de eigenvalores es el **mismo** que la dimensión de $\mathbf{H}$,

(2) los eigenvalores obtenidos son **reales**,

(3) los eigenvectores son **ortogonales**: $\mathbf{r_1} \cdot \mathbf{r_2} = 0$.

# Problemas de eigenvalores

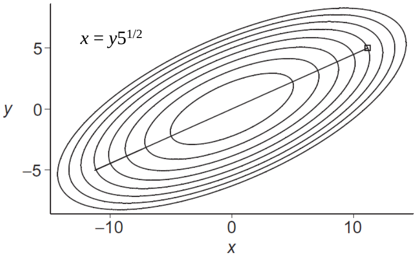
## Ejemplo preliminar: interpretación de eigenvectores

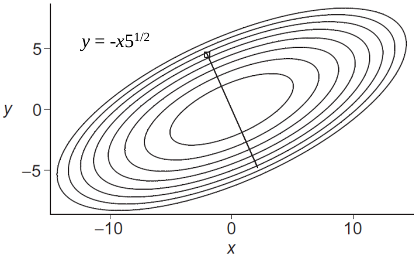
La **ortogonalidad** de los eigenvectores se puede entender físicamente como las direcciones de simetría del problema en cuestión, que se conocen como los **ejes principales** del potencial,

# Problemas de eigenvalores

## Ejemplo preliminar: interpretación de eigenvectores

La **ortogonalidad** de los eigenvectores se puede entender físicamente como las direcciones de simetría del problema en cuestión, que se conocen como los **ejes principales** del potencial,

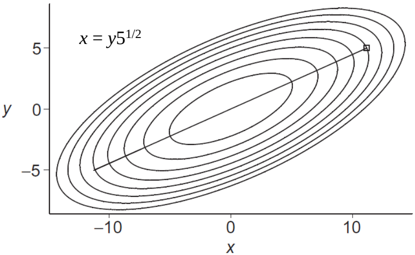


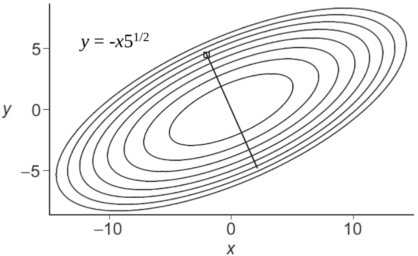



# Problemas de eigenvalores

## Ejemplo preliminar: interpretación de eigenvectores

La **ortogonalidad** de los eigenvectores se puede entender físicamente como las direcciones de simetría del problema en cuestión, que se conocen como los **ejes principales** del potencial,




Por tanto, los eigenvectores definen una **matriz de rotación** del sistema original al sistema de ejes principales,

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}\sqrt{5} & 1\\ 1 & -\sqrt{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}\sqrt{5}x+y\\ x-\sqrt{5}y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad \mathbf{Ur}=\mathbf{r}'.$$

# Problemas de eigenvalores

## Transformación de similaridad

Finalmente, queda el proceso de **transformar** el problema original al nuevo sistema de ejes principales, para ello realizamos lo siguiente,

## Transformación de similaridad

Finalmente, queda el proceso de **transformar** el problema original al nuevo sistema de ejes principales, para ello realizamos lo siguiente,

$$\mathbf{H}\mathbf{r} = \lambda\mathbf{r}$$

# Problemas de eigenvalores

## Transformación de similaridad

Finalmente, queda el proceso de **transformar** el problema original al nuevo sistema de ejes principales, para ello realizamos lo siguiente,

$$\mathbf{H}\mathbf{r} = \lambda\mathbf{r} \;\Rightarrow\; \mathbf{H}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{r} = \lambda\mathbf{U}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{r},$$

# Problemas de eigenvalores

## Transformación de similaridad

Finalmente, queda el proceso de **transformar** el problema original al nuevo sistema de ejes principales, para ello realizamos lo siguiente,

$$\mathbf{Hr} = \lambda \mathbf{r} \;\Rightarrow\; \mathbf{HU}^{-1}\mathbf{Ur} = \lambda \mathbf{U}^{-1}\mathbf{Ur},$$

$$\mathbf{UHU}^{-1}\mathbf{Ur} = \mathbf{U}\lambda\mathbf{U}^{-1}\mathbf{Ur}$$

# Problemas de eigenvalores

## Transformación de similaridad

Finalmente, queda el proceso de **transformar** el problema original al nuevo sistema de ejes principales, para ello realizamos lo siguiente,

$$\mathbf{Hr} = \lambda\mathbf{r} \;\Rightarrow\; \mathbf{HU}^{-1}\mathbf{Ur} = \lambda\mathbf{U}^{-1}\mathbf{Ur},$$

$$\mathbf{UHU}^{-1}\mathbf{Ur} = \mathbf{U}\lambda\mathbf{U}^{-1}\mathbf{Ur} \;\Rightarrow\; \mathbf{UHU}^{-1}(\mathbf{Ur}) = \lambda(\mathbf{Ur}),$$

# Problemas de eigenvalores

## Transformación de similaridad

Finalmente, queda el proceso de **transformar** el problema original al nuevo sistema de ejes principales, para ello realizamos lo siguiente,

$$\mathbf{H}\mathbf{r} = \lambda\mathbf{r} \;\Rightarrow\; \mathbf{H}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{r} = \lambda\mathbf{U}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{r},$$
$$\mathbf{U}\mathbf{H}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{r} = \mathbf{U}\lambda\mathbf{U}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{r} \;\Rightarrow\; \mathbf{U}\mathbf{H}\mathbf{U}^{-1}(\mathbf{U}\mathbf{r}) = \lambda(\mathbf{U}\mathbf{r}),$$

ya que $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{1}$.

Pero $\mathbf{U}\mathbf{r} = \mathbf{r}'$, por tanto $(\mathbf{U}\mathbf{H}\mathbf{U}^{-1})\mathbf{r}' = \lambda\mathbf{r}'$.

# Problemas de eigenvalores

## Transformación de similaridad

Finalmente, queda el proceso de **transformar** el problema original al nuevo sistema de ejes principales, para ello realizamos lo siguiente,

$$\mathbf{H}\mathbf{r} = \lambda\mathbf{r} \;\Rightarrow\; \mathbf{H}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{r} = \lambda\mathbf{U}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{r},$$

$$\mathbf{U}\mathbf{H}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{r} = \mathbf{U}\lambda\mathbf{U}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{r} \;\Rightarrow\; \mathbf{U}\mathbf{H}\mathbf{U}^{-1}(\mathbf{U}\mathbf{r}) = \lambda(\mathbf{U}\mathbf{r}),$$

ya que $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{1}$.

Pero $\mathbf{U}\mathbf{r} = \mathbf{r}'$, por tanto $(\mathbf{U}\mathbf{H}\mathbf{U}^{-1})\mathbf{r}' = \lambda\mathbf{r}'$.

Es decir, se ha convertido $\mathbf{H}$ y $\mathbf{r}$ mediante una transformación al sistema preferencial, sin embargo el eigenvalor $\lambda$ permanece **invariante**, $\therefore$ la **transformación de similaridad** nos arroja la **matriz diagonal** del problema,

# Problemas de eigenvalores

## Transformación de similaridad

Finalmente, queda el proceso de **transformar** el problema original al nuevo sistema de ejes principales, para ello realizamos lo siguiente,

$$\mathbf{H}\mathbf{r} = \lambda\mathbf{r} \;\Rightarrow\; \mathbf{H}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{r} = \lambda\mathbf{U}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{r},$$
$$\mathbf{U}\mathbf{H}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{r} = \mathbf{U}\lambda\mathbf{U}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{r} \;\Rightarrow\; \mathbf{U}\mathbf{H}\mathbf{U}^{-1}(\mathbf{U}\mathbf{r}) = \lambda(\mathbf{U}\mathbf{r}),$$

ya que $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{1}$.

Pero $\mathbf{U}\mathbf{r} = \mathbf{r}'$, por tanto $(\mathbf{U}\mathbf{H}\mathbf{U}^{-1})\mathbf{r}' = \lambda\mathbf{r}'$.

Es decir, se ha convertido $\mathbf{H}$ y $\mathbf{r}$ mediante una transformación al sistema preferencial, sin embargo el eigenvalor $\lambda$ permanece **invariante**, ∴ la **transformación de similaridad** nos arroja la **matriz diagonal** del problema,

$$\mathbf{U}\mathbf{H}\mathbf{U}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}\sqrt{5} & 1 \\ 1 & -\sqrt{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{5} & 1 \\ 1 & -\sqrt{5}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0 \\ 0 & -7\end{bmatrix}.$$

# Contenido: Tema 02

# Matrices especiales

## Matrices hermíticas

Una matriz $\mathbf{H}$ es **hermítica** cuando $\mathbf{H} = \mathbf{H}^{\dagger}$.

# Matrices especiales

## Matrices hermíticas

Una matriz $\mathbf{H}$ es **hermítica** cuando $\mathbf{H} = \mathbf{H}^{\dagger}$.

En particular, cuando se trata con problemas de eigenvalores de matrices hermíticas, se tienen las siguientes propiedades:

# Matrices especiales

## Matrices hermíticas

Una matriz $\mathbf{H}$ es **hermítica** cuando $\mathbf{H} = \mathbf{H}^\dagger$.

En particular, cuando se trata con problemas de eigenvalores de matrices hermíticas, se tienen las siguientes propiedades:

- Los eigenvalores son **reales**.

# Matrices especiales

## Matrices hermíticas

Una matriz $\mathbf{H}$ es **hermítica** cuando $\mathbf{H} = \mathbf{H}^\dagger$.

En particular, cuando se trata con problemas de eigenvalores de matrices hermíticas, se tienen las siguientes propiedades:

- Los eigenvalores son **reales**.
- Eigenvectores correspondientes a diferentes eigenvalores son **ortogonales**.

# Matrices especiales

## Matrices hermíticas

Una matriz $\mathbf{H}$ es **hermítica** cuando $\mathbf{H} = \mathbf{H}^{\dagger}$.

En particular, cuando se trata con problemas de eigenvalores de matrices hermíticas, se tienen las siguientes propiedades:

- Los eigenvalores son **reales**.
- Eigenvectores correspondientes a diferentes eigenvalores son **ortogonales**.
- Los eigenvectores forman un **set completo** en el cual se puede expander cualquier vector perteneciente al propio espacio.

# Matrices especiales

## Matrices hermíticas

Una matriz $\mathbf{H}$ es **hermítica** cuando $\mathbf{H} = \mathbf{H}^{\dagger}$.

En particular, cuando se trata con problemas de eigenvalores de matrices hermíticas, se tienen las siguientes propiedades:

- Los eigenvalores son **reales**.
- Eigenvectores correspondientes a diferentes eigenvalores son **ortogonales**.
- Los eigenvectores forman un **set completo** en el cual se puede expander cualquier vector perteneciente al propio espacio.

Además, en el caso de **transf. de similaridad**, $\mathbf{U}\mathbf{H}\mathbf{U}^{-1}$, se cumple,

# Matrices especiales

## Matrices hermíticas

Una matriz $\mathbf{H}$ es **hermítica** cuando $\mathbf{H} = \mathbf{H}^\dagger$.

En particular, cuando se trata con problemas de eigenvalores de matrices hermíticas, se tienen las siguientes propiedades:

- Los eigenvalores son **reales**.
- Eigenvectores correspondientes a diferentes eigenvalores son **ortogonales**.
- Los eigenvectores forman un **set completo** en el cual se puede expander cualquier vector perteneciente al propio espacio.

Además, en el caso de **transf. de similaridad**, $\mathbf{U}\mathbf{H}\mathbf{U}^{-1}$, se cumple,

- Los eigenvalores son **invariantes**.

# Matrices especiales

## Matrices hermíticas

Una matriz $\mathbf{H}$ es **hermítica** cuando $\mathbf{H} = \mathbf{H}^\dagger$.

En particular, cuando se trata con problemas de eigenvalores de matrices hermíticas, se tienen las siguientes propiedades:

- Los eigenvalores son **reales**.
- Eigenvectores correspondientes a diferentes eigenvalores son **ortogonales**.
- Los eigenvectores forman un **set completo** en el cual se puede expander cualquier vector perteneciente al propio espacio.

Además, en el caso de **transf. de similaridad**, $\mathbf{UHU}^{-1}$, se cumple,

- Los eigenvalores son **invariantes**.
- $\mathbf{UHU}^{-1}$ será **diagonal**, con los eigenvalores de $\mathbf{H}$ como sus elementos diagonales.

# Matrices especiales

## Matrices hermíticas

Una matriz $\mathbf{H}$ es **hermítica** cuando $\mathbf{H} = \mathbf{H}^{\dagger}$.

En particular, cuando se trata con problemas de eigenvalores de matrices hermíticas, se tienen las siguientes propiedades:

- Los eigenvalores son **reales**.
- Eigenvectores correspondientes a diferentes eigenvalores son **ortogonales**.
- Los eigenvectores forman un **set completo** en el cual se puede expander cualquier vector perteneciente al propio espacio.

Además, en el caso de **transf. de similaridad**, $\mathbf{UHU}^{-1}$, se cumple,

- Los eigenvalores son **invariantes**.
- $\mathbf{UHU}^{-1}$ será **diagonal**, con los eigenvalores de $\mathbf{H}$ como sus elementos diagonales.
- El eigenvector (normalizado) de la matriz $\mathbf{H}$, corresponde al eigenvalor $(\mathbf{UHU}^{-1})_{ii}$, será la $i$**-ésima columna** de $\mathbf{U}^{-1}$.

# Matrices especiales

## Matrices hermíticas

Una matriz $\mathbf{H}$ es **hermítica** cuando $\mathbf{H} = \mathbf{H}^{\dagger}$.

En particular, cuando se trata con problemas de eigenvalores de matrices hermíticas, se tienen las siguientes propiedades:

- Los eigenvalores son **reales**.
- Eigenvectores correspondientes a diferentes eigenvalores son **ortogonales**.
- Los eigenvectores forman un **set completo** en el cual se puede expander cualquier vector perteneciente al propio espacio.

Además, en el caso de **transf. de similaridad**, $\mathbf{UHU}^{-1}$, se cumple,

- Los eigenvalores son **invariantes**.
- $\mathbf{UHU}^{-1}$ será **diagonal**, con los eigenvalores de $\mathbf{H}$ como sus elementos diagonales.
- El eigenvector (normalizado) de la matriz $\mathbf{H}$, corresponde al eigenvalor $(\mathbf{UHU}^{-1})_{ii}$, será la $i$**-ésima columna** de $\mathbf{U}^{-1}$.
- Finalmente, $|\mathbf{H}|$ y $\mathrm{Tr}(\mathbf{H})$ son **invariantes** ante tal transformación.

## Matrices normales

Hasta ahora nos hemos centrado en la discusión de matrices hermíticas, las cuales representan un elemento de un grupo mas amplio, el de las **matrices normales**:

# Matrices especiales

## Matrices normales

Hasta ahora nos hemos centrado en la discusión de matrices hermíticas, las cuales representan un elemento de un grupo mas amplio, el de las **matrices normales**:

una matriz $\mathbf{A}$ es normal si cumple: $\left[\mathbf{A}, \mathbf{A}^{\dagger}\right] = 0.$

# Matrices especiales

## Matrices normales

Hasta ahora nos hemos centrado en la discusión de matrices hermíticas, las cuales representan un elemento de un grupo mas amplio, el de las **matrices normales**:

$$\text{una matriz } \mathbf{A} \text{ es normal si cumple:} \quad \left[\mathbf{A}, \mathbf{A}^\dagger\right] = 0.$$

Las matrices **normales** satisfacen las siguientes propiedades,

# Matrices especiales

## Matrices normales

Hasta ahora nos hemos centrado en la discusión de matrices hermíticas, las cuales representan un elemento de un grupo mas amplio, el de las **matrices normales**:

$$\text{una matriz } \mathbf{A} \text{ es normal si cumple:} \quad \left[\mathbf{A}, \mathbf{A}^{\dagger}\right] = 0.$$

Las matrices **normales** satisfacen las siguientes propiedades,

- eigenvectores correspondientes a diferentes eigenvalores son **ortogonales** y forman, además, un **set completo**.

# Matrices especiales

## Matrices normales

Hasta ahora nos hemos centrado en la discusión de matrices hermíticas, las cuales representan un elemento de un grupo mas amplio, el de las **matrices normales**:

$$\text{una matriz } \mathbf{A} \text{ es normal si cumple:} \quad \left[\mathbf{A}, \mathbf{A}^{\dagger}\right] = 0.$$

Las matrices **normales** satisfacen las siguientes propiedades,

- eigenvectores correspondientes a diferentes eigenvalores son **ortogonales** y forman, además, un **set completo**.
- pueden ser diagonalizables mediante una transformación de **similaridad** $(\mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^{-1})$.

# Matrices especiales

## Matrices normales

Hasta ahora nos hemos centrado en la discusión de matrices hermíticas, las cuales representan un elemento de un grupo mas amplio, el de las **matrices normales**:

$$\text{una matriz } \mathbf{A} \text{ es normal si cumple: } \quad \left[\mathbf{A}, \mathbf{A}^\dagger\right] = 0.$$

Las matrices **normales** satisfacen las siguientes propiedades,

- eigenvectores correspondientes a diferentes eigenvalores son **ortogonales** y forman, además, un **set completo**.
- pueden ser diagonalizables mediante una transformación de **similaridad** $(\mathbf{UAU}^{-1})$.
- los eigenvalores pueden ser **imaginarios**, además de que los eigenvalores de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}^\dagger$ son $\lambda$ y $\lambda^*$, respectivamente.

# Matrices especiales

## Matrices normales

Hasta ahora nos hemos centrado en la discusión de matrices hermíticas, las cuales representan un elemento de un grupo mas amplio, el de las **matrices normales**:

$$\text{una matriz } \mathbf{A} \text{ es normal si cumple:} \quad \left[\mathbf{A}, \mathbf{A}^\dagger\right] = 0.$$

Las matrices **normales** satisfacen las siguientes propiedades,

- eigenvectores correspondientes a diferentes eigenvalores son **ortogonales** y forman, además, un **set completo**.
- pueden ser diagonalizables mediante una transformación de **similaridad** $(\mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^{-1})$.
- los eigenvalores pueden ser **imaginarios**, además de que los eigenvalores de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}^\dagger$ son $\lambda$ y $\lambda^*$, respectivamente.
- los eigenvectores de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}^\dagger$ son **iguales**.

# Matrices especiales

## Matrices normales

Hasta ahora nos hemos centrado en la discusión de matrices hermíticas, las cuales representan un elemento de un grupo mas amplio, el de las **matrices normales**:

$$\text{una matriz } \mathbf{A} \text{ es normal si cumple: } \quad \left[\mathbf{A}, \mathbf{A}^\dagger\right] = 0.$$

Las matrices **normales** satisfacen las siguientes propiedades,

- eigenvectores correspondientes a diferentes eigenvalores son **ortogonales** y forman, además, un **set completo**.
- pueden ser diagonalizables mediante una transformación de **similaridad** ($\mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^{-1}$).
- los eigenvalores pueden ser **imaginarios**, además de que los eigenvalores de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}^\dagger$ son $\lambda$ y $\lambda^*$, respectivamente.
- los eigenvectores de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}^\dagger$ son **iguales**.
- ejemplos de matrices normales: matrices **unitarias** y **anti-hermíticas** ($\mathbf{A}^\dagger = -\mathbf{A}$)

# Matrices especiales

## Matrices no-normales

Existen casos en los cuales **no** se cumple el criterio de normalidad:

$$\left[\mathbf{A}, \mathbf{A}^\dagger\right] \neq 0,$$

llamadas matrices **no-normales**.

# Matrices especiales

## Matrices no-normales

Existen casos en los cuales **no** se cumple el criterio de normalidad:

$$\left[\mathbf{A}, \mathbf{A}^\dagger\right] \neq 0,$$

llamadas matrices **no-normales**.

Para este tipo de matrices:

- se sigue cumpliendo que los eigenvalores de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}^\dagger$ son $\lambda$ y $\lambda^*$, respectivamente.

# Matrices especiales

## Matrices no-normales

Existen casos en los cuales **no** se cumple el criterio de normalidad:

$$\left[\mathbf{A}, \mathbf{A}^{\dagger}\right] \neq 0,$$

llamadas matrices **no-normales**.

Para este tipo de matrices:

- se sigue cumpliendo que los eigenvalores de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}^{\dagger}$ son $\lambda$ y $\lambda^{*}$, respectivamente.
- sin embargo, los eigenvectores ya no son **ortogonales** ...

Existen casos en los cuales **no** se cumple el criterio de normalidad:

$$\left[\mathbf{A}, \mathbf{A}^{\dagger}\right] \neq 0,$$

llamadas matrices **no-normales**.

Para este tipo de matrices:

- se sigue cumpliendo que los eigenvalores de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}^{\dagger}$ son $\lambda$ y $\lambda^{*}$, respectivamente.
- sin embargo, los eigenvectores ya no son **ortogonales** ...
- ... ni son los mismos para $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}^{\dagger}$.

# Matrices especiales

## Matrices no-normales

Existen casos en los cuales **no** se cumple el criterio de normalidad:

$$\left[\mathbf{A}, \mathbf{A}^{\dagger}\right] \neq 0,$$

llamadas matrices **no-normales**.

Para este tipo de matrices:

- se sigue cumpliendo que los eigenvalores de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}^{\dagger}$ son $\lambda$ y $\lambda^*$, respectivamente.
- sin embargo, los eigenvectores ya no son **ortogonales** ...
- ... ni son los mismos para $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}^{\dagger}$.

Finalmente, existen también las llamadas matrices **defectivas**, las cuales no poseen ni siquiera un set completo de eigenvectores.