Contenido

Contenido: Tema 03

Contenido: Tema 03

Serie infinita

se define como una suma de un número infinito de términos.

Si tenemos una secuencia infinita de términos u_1, u_2, u_3, $\ldots$, entonces definimos la i-ésima **suma parcial** s_i y la **suma total** S como,

$$s_i = \sum_{n=1}^{i} u_n \quad \Rightarrow \quad S = \lim_{i\to\infty} s_i = \sum_{n=1}^{\infty} u_n,$$

con lo cual decimos que la serie es **convergente** y tiene valor S.

Por otro lado, también existen series **divergentes**, las cuales cumplen que la suma de sus términos tienden a $\pm\infty$.

Dentro de las divergentes, existen series llamadas **oscilatorias**, ya que tienen sumas parciales que oscilan entre dos valores, por ejemplo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots - (-1)^n + \ldots$$

Existen diferentes criteros para determinar si una serie es convergente o divergente, algunos de ellos son,

- **Comparación**
- **Raices de Cauchy**
- **Razón de D'Alambert / Razón de Cauchy**
- **Integral de Cauchy / Integral de Maclaurin**
- **Criterio de Leibniz**[1].

Dentro de las series convergentes, existe una sub-clasificación:

- **Absolutas**: si los valores absolutos de los términos de la serie forman a su vez una serie convergente.
- **Condicionales**: si la serie converge, pero no absolutamente.

[1]para series alternantes

Criterio de convergencia

Si una serie de términos u_n satisface término a término la condición $0 \leq u_n \leq a_n$, en donde a_n forma una serie **convergente**, entonces la serie $\sum_n u_n$ es también **convergente**

Ejemplo de serie convergente a_n es la **geométrica**,

$$\alpha + \alpha r + \alpha r^2 + \alpha r^3 + \ldots + \alpha r^n + \ldots,$$

donde la suma parcial s_n de los primeros n términos es,

$$s_n = \sum_{m=0}^{n-1} \alpha r^m = \alpha \frac{1 - r^n}{1 - r}.$$

Para el caso cuando $|r| < 1$ y n es muy grande ($r^n \to 0$):

$$\lim_{n \to \infty} s_n = S_n = \alpha \frac{1}{1 - r}.^2$$

[2] para $|r| \geq 1$ la serie claramente diverge ya que r^n crece conforme n aumenta

Criterio de divergencia

Si una serie de términos v_n satisface término a término la condición $0 \leq b_n \leq v_n$, en donde b_n forma una serie **divergente**, entonces la serie $\sum_n v_n$ es también **divergente**

Un ejemplo de serie divergente b_n es la **armónica**,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

Se puede pensar que la serie es convergente ya que $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$, pero si analizamos la serie de la sig. manera,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}\right) + \ldots$$

cada término en paréntesis contiene p términos de la forma,

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} + \ldots + \frac{1}{p+p} \geq \frac{p}{2p} = \frac{1}{2}.$$

Volvemos a escribir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}\right) +$$

$$\forall \ \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} + \ldots + \frac{1}{p+p} \geq \frac{p}{2p} = \frac{1}{2}.$$

Ahora, generando las sumas parciales de los grupos de paréntesis, llegamos a lo siguiente:

$$s_1 = 1, \ s_2 = \frac{3}{2}, \ s_3 > \frac{4}{2}, \ s_4 > \frac{5}{2}, \ \ldots, \ s_n > \frac{n+1}{2},$$

por tanto, la serie es **divergente**.

Criterio de convergencia

Si tenemos que $(a_n)^{1/n} \leq r < 1$ para n suficientemente grande, con r independiente de n, entonces $\sum_n a_n$ será **convergente**.

Para comprobar, elevemos a la n la relación,

$$(a_n)^{1/n} \leq r < 1 \quad \Rightarrow \quad a_n \leq r^n < 1,$$

como r^n es el término n de la serie **geométrica** $\Rightarrow \sum_n a_n$ es convergente por el criterio de **comparación**.

Criterio de divergencia

Si tenemos que $(a_n)^{1/n} \geq 1$, con n lo suficientemente grande, entonces $\sum_n a_n$ será **divergente**.

Comprobando,

$$(a_n)^{1/n} \geq 1 \quad \Rightarrow \quad a_n \geq 1,$$

por tanto la serie **diverge**.

Criterios

Si $a_{n+1}/a_n \leq r < 1$ para n suficientemente grande y r independiente de n, entonces $\sum_n a_n$ será **convergente**.

Por otro lado, si $a_{n+1}/a_n \geq 1$ para n lo suficientemente grande, entonces $\sum_n a_n$ será **divergente**.

Una descripción alterna a este criterio es el siguiente,

$$\text{Si } \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \begin{cases} < 1, & \textbf{convergente}, \\ > 1, & \textbf{divergente}, \\ = 1, & \textbf{indeterminado}. \end{cases}$$

La indeterminación ocurre cuando se tiene que $a_{n+1}/a_n < 1$ pero no se puede encontrar un $r < 1$ para toda n lo suficentemente grande tal que $a_{n+1}/a_n \leq r$,

$$\text{por ejemplo la serie armónica: } \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{1+n} < 1.$$

Criterios

Sea $f(x)$ una función contínua y decreciente de manera monótona, en donde $f(n) = a_n$, entonces,

$$\text{si} \quad \int_1^\infty f(x)dx \text{ es } \begin{cases} \text{finita} & \Rightarrow \quad \textbf{convergente}, \\ \text{infinita} & \Rightarrow \quad \textbf{divergente}. \end{cases}$$

Si tenemos la suma parcial s_i como,

$$s_i = \sum_{n=1}^{i} a_n = \sum_{n=1}^{i} f(n),$$

entonces podemos establecer

$$s_i \geq \int_1^{i+1} f(x)dx.$$

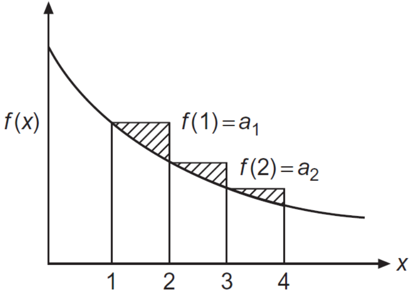
Por otro lado, también se tiene,

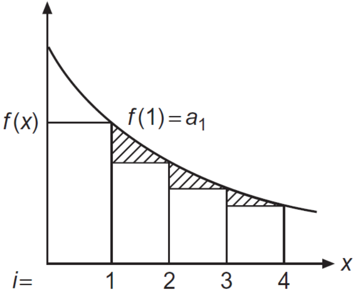
$$s_i - a_1 \leq \int_1^{i} f(x)dx,$$

Fundamentos y criterios de convergencia

Integral de Cauchy / Integral de Maclaurin

$$s_i \geq \int_1^{i+1} f(x)dx. \qquad\qquad s_i - a_1 \leq \int_1^{i} f(x)dx,$$





Tomando el límite conforme $i \to \infty$ de lo anterior tenemos,

$$\int_1^{\infty} f(x)dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \int_1^{\infty} f(x)dx + a_1,$$

por tanto la serie será **convergente** o **divergente**, según la integral **converge** o **diverge**, respectivamente.

Fundamentos y criterios de convergencia

Series alternantes: Criterio de Leibniz

Una serie **alternante** se define como aquella que cambia el signo de sus elementos de forma alternada, por ejemplo,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n \;\; \forall \;\; a_n > 0.$$

Criterio de convergencia

Si se tiene que $a_n > 0$ y a_n es monónotamente decreciente,

$$a_n - a_{n+1} > 0 \;\; \& \;\; \lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

entonces la serie será **convergente**.

Considerando el remantente de s_{2n} como R_{2n},

$$\begin{aligned} R_{2n} &= (a_{2n+1} - a_{2n+2}) + (a_{2n+3} - a_{2n+4}) + \ldots \\ &= a_{2n+1} - (a_{2n+2} - a_{2n+3}) - (a_{2n+4} - a_{2n+5}) + \ldots \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ se cumple $0 < R_{2n} < a_{2n+1}$, es decir R_{2n} es **positivo** y **acotado**

Existen algunas operaciones permitidas para series infinitas **absolutamente convergentes**,

- La suma de la serie es **independiente** del orden en el cual los términos son añadidos.
- Dos series pueden ser sumadas, restadas o multiplicadas término a término, y el resultado también será una serie **absolutamente convergente**.
- Una serie, como un todo, puede ser multiplicada por otra serie y el límite de la serie producto será el producto de los límites de cada una de las series. La serie producto (una serie doble) será de igual manera una **absolutamente convergente**.

Contenido: Tema 03

Si consideramos en una serie infinita que los términos son $u_n = u_n(x)$, entonces la suma parcial se vuelve una función de x,

$$s_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x),$$

asi como también la suma total de la serie,

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x).$$

Convergencia uniforme

Si para un pequeño $\epsilon > 0$ $\exists$ un N independiente de x en el intervalo $[a, b]$, tal que:

$$|S(x) - s_n(x)| < \epsilon \;\; \forall \;\; n \geq N,$$

entonces la serie es **uniformemente convergente** en el intervalo $[a, b]$.

Lo que establece este criterio es que debe ser posible encontrar un N finito tal que,

$$\left| \sum_{i=N+1}^{\infty} u_i(x) \right| < \epsilon \ \ \forall \ \ x \in [a, b],$$

para que la serie sea **uniformemente convergente**.

Algunas de las propiedades de una serie uniformemente convergente $\sum_n u_n(x)$ en el intervalo $[a, b]$ con $u_n(x)$ **contínuos**, son:

(1) La suma total de la serie $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ es también **contínua**.

(2) La serie se puede integrar término a término, por lo que la suma de las integrales es la integral de la suma,

$$\int_a^b S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx.$$

(3) La derivada de la suma $S(x)$ es igual a la suma de las derivadas de los términos que forman la serie,

$$\frac{d}{dx}S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}u_n(x),$$

en donde se debe de cumplir que en el intervalo $[a, b]$,

$$\frac{d}{dx}u_n(x) \;\rightarrow\; \text{sea contínua y diferenciable,}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}u_n(x) \;\rightarrow\; \text{sea } \textbf{uniformemente convergente}.$$

Series de funciones

Criterios de convergencia: Weierstrass M (Majorant)

Criterio

Si es es posible construir una serie de números,

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_i,$$

$$\text{tal que} \quad M_i \geq |u_i(x)| \quad \forall \quad x \in [a, b],$$

y que la sumatoria sea convergente, entonces la serie $u_i(x)$ será **uniformemente convergente** en $[a, b]$.

Una restricción del criterio, debido a $|u_i(x)|$, es que solo aplica a series que también son **absolutamente convergentes**.

Criterio

Si tenemos que $u_n(x)$ se puede expresar como $a_n f_n(x)$, donde:

1. a_n forma una serie convergente: $\sum_n a_n = A$,
2. $\forall\ x \in [a,b]$ las $f_n(x)$ son monótonamente decrecientes en n:

$$f_{n+1}(x) \leq f_n(x),$$

3. $\forall\ x \in [a,b]$ todas las $f_n(x)$ están restringidas al rango,

$$0 \leq f_n(x) \leq M,$$

   donde M es independiente de x,

entonces podemos decir que $\sum_n u_n(x)$ **converge uniformemente** en el intervalo $[a,b]$.

Contenido: Tema 03

Consideremos una función $f(x)$ que tiene n-ésima derivada continua en $a \leq x \leq b$, entonces integrando n veces tenemos,

$$
\begin{aligned}
\int_a^x f^{(n)}(x_1)dx_1 &= f^{(n-1)}(x_1)\Big|_a^x = f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a), \\
\int_a^x dx_2 \int_a^{x_2} f^{(n)}(x_1)dx_1 &= \int_a^x dx_2 \left[f^{(n-1)}(x_2) - f^{(n-1)}(a)\right], \\
&= f^{(n-2)}(x) - f^{(n-2)}(a) - \ldots \\
&\ldots - (x-a)f^{(n-1)}(a), \\
\int_a^x \int_a^{x_3} dx_2 \int_a^{x_2} f^{(n)}(x_1)dx_1 &= f^{(n-3)}(x) - f^{(n-3)}(a) - \ldots \\
&\ldots - (x-a)f^{(n-2)}(a) - \ldots \\
&\ldots - \frac{(x-a)^2}{2!} f^{(n-1)}(a),
\end{aligned}
$$

Por tanto, después de haber integrado n veces tenemos,

$$\begin{aligned}\int_a^x dx_n \dots \int_a^{x_2} f^{(n)}(x_1)dx_1 = f(x) - f(a) - (x-a)f'(a) - \dots \\ \dots - \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) - \dots \\ \dots - \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a).\end{aligned}$$

Ahora, si resolvemos para $f(x)$ tenemos,

$$\begin{aligned}f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \dots \\ \dots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + R_n\end{aligned}$$

donde $R_n = \int_a^x dx_n \dots \int_a^{x_2} dx_1 f^{(n)}(x_1).$

El remanente R_n puede ser convertido a una forma más práctica usando el teorema del valor medio,

$$\int_a^x g(x)dx = (x-a)g(\xi), \quad \forall \;\; a \leq \xi \leq x.$$

Por tanto, usando lo anterior para R_n,

$$\begin{aligned}
R_n &= \int_a^x dx_n \ldots \int_a^{x_3} dx_2 \int_a^{x_2} dx_1 f^{(n)}(x_1), \\
&= \int_a^x dx_n \ldots \int_a^{x_3} dx_2 \left[(x_2-a)f^{(n)}(\xi)\right], \\
&= \int_a^x dx_n \ldots \int_a^{x_4} dx_3 \left[\frac{(x_3-a)^2}{2!} f^{(n)}(\xi)\right], \\
\Rightarrow \quad R_n &= \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi).
\end{aligned}$$

Sustituyendo lo obtenido para R_n en la expansión de $f(x)$ tenemos,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots \\ &\ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(\xi), \end{aligned}$$

Ahora, cuando $f(x)$ es tal que $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$, entonces obtenemos:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a), \end{aligned}$$

lo que se conoce como la **serie de Taylor**.

Cuando la serie de Taylor tiene como punto de referencia $a = 0$, entonces se le conoce como **serie de Maclaurin**,

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0),$$

lo cual se puede ver que representa una **serie de potencias**,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \forall \quad a_n = \text{ctes.}$$

Algunas propiedades importantes de las series de potencias son,

- La representación de la expansión en serie de $f(x)$ es **única** $\Rightarrow \; a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$,
- Si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = R^{-1}$ entonces $-R < x < R$ será el **radio de convergencia** de la serie.

Supongamos que tenemos la siguiente función,

$$f(x) = (1+x)^m \quad \forall \quad m \in \mathbb{R},$$

entonces aplicando la expansión de Maclaurin,

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0),$$

$$\Rightarrow \quad (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots$$

$$\ldots + m(m-1)\cdots(m-n+1)\frac{x^n}{n!} + \ldots,$$

obteniendo el **rango de convergencia** de la serie,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)(m-n+2)/(n+1)!}{m(m-1)\cdots(m-n+1)/n!}\right|,$$

Reduciendo la expresión anterior,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)(m-n+2)/(n+1)!}{m(m-1)\cdots(m-n+1)/n!}\right|,$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{m-n+2}{n+1}\right|,$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(m+2)/n-1}{1+1/n}\right| \to 1,$$

$\therefore$ el radio de convergencia para la serie binomial será $-1 < x < 1$.

Resumiendo, tenemos que la **serie binomial** es,

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots,$$

en donde $m \in \mathbb{R}$.

Los **coeficientes binomiales** los expresamos mediante la siguiente simbología,

$$\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!},$$

por tanto la expansión quedará como,

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n.$$

Tales coeficientes dependerán de la naturaleza de m,

- $m \in \mathbb{Z}^+$: la serie será **finita**, ya que termina con $n = m$ y los coeficientes serán,

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}.$$

- $m \in \mathbb{Z}^-$: hacemos $m = -p \ \forall \ p \in \mathbb{Z}^+$, entonces:

$$\binom{-p}{n} = (-1)^n \frac{p(p+1)\dots(p+n-1)}{n!} = \frac{(-1)^n (p+n-1)!}{n!(p-1)!},$$

- m no-entero: se hace uso del **símbolo de Pochhammer**, $(a)_n$,

$$(a)_0 = 1,\ (a)_1 = a,\ (a)_{n+1} = a(a+1)\dots(a+n), \quad \forall \ \ n \geq 1,$$

por tanto, los coeficientes serán,

$$\binom{m}{n} = \frac{(m-n+1)_n}{n!}.$$

Algunas de las series más ampliamente utilizadas son,

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

$$\text{Sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\text{Cos}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},$$

$$\text{Senh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\text{Cosh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$\forall \; -\infty < x < \infty$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n},$$

$$(1+x)^p = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} x^n, \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(p-n+1)_n}{n!} x^n$$

$$\forall \; -1 < x < 1.$$

Contenido: Tema 03

Definición

Una **serie de Fourier** está definida como una expansión de una función en términos de una serie de funciones **Seno** y **Coseno**,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{Cos} nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{Sen} nx,$$

en donde los coef. a_0, a_n, y b_n vienen dados por las sig. integrales,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(s)\text{Cos} ns ds, \quad \forall \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(s)\text{Sen} ns ds, \quad \forall \quad n = 1, 2, \ldots$$

y las condiciones que se deben cumplir son que $f(x)$ sólo tenga:

- un número finito de **discontinuidades finitas**,
- un número finito de **valores extremos** en el intervalo $[0, 2\pi]$,

siendo lo anterior conocido como las **condiciones de Dirichlet**.

La **serie de Fourier** también puede ser expresada en términos de funciones **exponenciales**,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

donde,

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n), \quad \forall \quad n > 0.$$

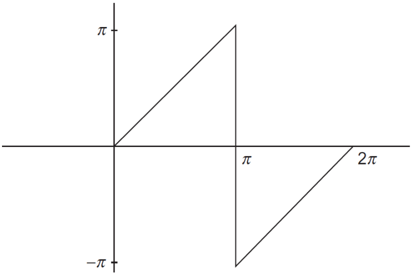
De la expansión de $f(x)$ en series de Fourier (en forma exponencial o trigonométrica) se tienen las siguientes propiedades,

- los términos de la expansión son **funciones ortogonales**,
- requiere información del **intervalo completo** de expansión, y no sólo un punto.[3]
- puede describir funciones con singularidades/discontinuidades, convergiendo al **valor medio** alrededor de la singularidad.

[3]como en el caso de las series de potencias.

Consideremos la siguiente función,

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < \pi \\ x - 2\pi, & \pi < x \leq 2\pi. \end{cases}$$



$\therefore$ $f(x)$ en series de Fourier,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{Cos} nx + \ldots$$

$$\ldots + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{Sen} nx,$$

en donde,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(s)ds = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} sds + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}(s - 2\pi)ds,$$

$$= (1/\pi)\left[s^2/2\right]_0^{\pi} + 1/\pi\left[(s-2\pi)^2/2\right]_{\pi}^{2\pi} = 0.$$

Series de Fourier, propiedades y aplicaciones

Ejemplo: onda diente de sierra

Calculando ahora a_n,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(s)\text{Cos}nsds = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} s\text{Cos}nsds + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}(s-2\pi)\text{Cos}nsds,$$

lo cual integrando por partes nos da,

$$a_n = \frac{1}{\pi n^2}\left(\text{Cos}n\pi - 1 + 1 - \text{Cos}n\pi\right) = 0.$$

Ahora para b_n,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(s)\text{Sen}nsds = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} s\text{Sen}nsds + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}(s-2\pi)\text{Sen}nsds,$$

lo cual también integramos por partes y obtenemos,

$$b_n = \frac{1}{\pi n^2}\left(-n\pi\text{Cos}n\pi - n\pi\text{Cos}n\pi\right) = -\frac{2}{n}\text{Cos}n\pi.$$

Ejemplo: onda diente de sierra

Analizando el resultado anterior, tenemos

$$\text{Cos}n\pi = \begin{cases} +1, & \text{si} \quad n = 2k \qquad \forall\ k \in \mathbb{Z}^+ \\ -1, & \text{si} \quad n = 2k+1\ \forall\ k \in \mathbb{Z}^+ \end{cases}$$

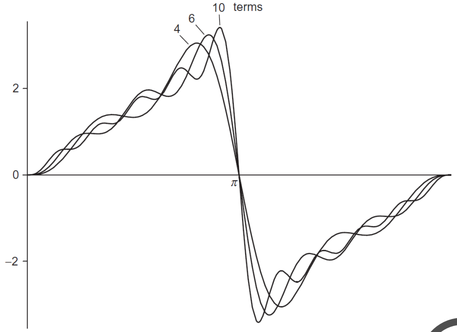
$$\Rightarrow \quad b_n = -\frac{2}{n}\text{Cos}n\pi = -\frac{2}{n}(-1)^n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \quad \forall\ n > 1.$$

construyendo finalmente la **serie de Fourier**,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1}\text{Sen}nx,$$

$$= 2\left[\text{Sen}x - \frac{1}{2}\text{Sen}2x + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \frac{1}{3}\text{Sen}3x + \ldots\right],$$



Series de Fourier, propiedades y aplicaciones

Funciones periódicas

Para el caso en el que $f(x)$ sea **periódica** con periodo L, el intervalo natural de la expansión de Fourier será el mismo de $f(x)$, por tanto,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{Cos}\frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{Sen}\frac{n\pi x}{L},$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(s)\text{Cos}\frac{n\pi s}{L}ds, \quad \forall \quad n = 0, 1, 2\dots$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(s)\text{Sen}\frac{n\pi s}{L}ds, \quad \forall \quad n = 1, 2\dots$$

Si por el contrario, $f(x)$ **no es periódica**, aún podemos expandirla en Fourier, sin embargo,

- el resultado dependerá del intervalo elegido para la expansión,
- no se puede asegurar que se tendrá una descripción realista de $f(x)$ **fuera** del rango de expansión.

De la expansión en Fourier de $f(x)$ y de las expresiones de los coeficientes a_n y b_n se puede deducir la forma de dicha expansión sólo analizando la **simetría** de $f(x)$,

- si $f(x)$ es **par** $\Rightarrow$ la expansión será **par**,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{Cos} nx,$$

- si $f(x)$ es **impar** $\Rightarrow$ la expansión será **impar**,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{Sen} nx.$$

Las series anteriores se conocen también como series **coseno de Fourier** y series **seno de Fourier**, respectivamente.

En general, para un rango específico, por ejemplo $[0, \pi]$, si se tiene una función bien **definida** en dicho rango, es posible representarla como:

- Serie de **potencias**, siempre y cuando no tenga discontinuidades en el rango de expansión.
- Serie de **cosenos** de Fourier.
- Serie de **senos** de Fourier.

Independientemente de la representación, las tres darán un comportamiento **similar** de $f(x)$, en el rango en cuestión $[0, \pi]$, pero fuera del rango utilizado, el comportamiento entre representaciones será muy **diferente**.

Contenido: Tema 03

Transformada de Fourier

Transformadas integrales

En general, podemos encontrar pares de funciones, $f(t)$ y $g(x)$, relacionadas por expresiones del siguiente tipo,

$$g(x) = \int_a^b f(t)K(x,t)dt,$$

en donde $K(x,t)$ es conocido como el **kernel** de la transformación.

Por tanto, podemos considerar a la relación integral como un **operador**,

$$g(x) = \mathcal{L}f(t),$$

en donde $g(x)$ se le conoce como la **transformada integral** de $f(t)$ por el operador $\mathcal{L}$.

Una propiedad de tales operadores es que son **lineales**,

$$\int_a^b \left[f_1(t) + f_2(t)\right] K(x,t)dt = \int_a^b f_1(t)K(x,t)dt + \int_a^b f_2(t)K(x,t)dt,$$

$$\int_a^b cf(t)K(x,t)dt = c\int_a^b f(t)K(x,t)dt.$$

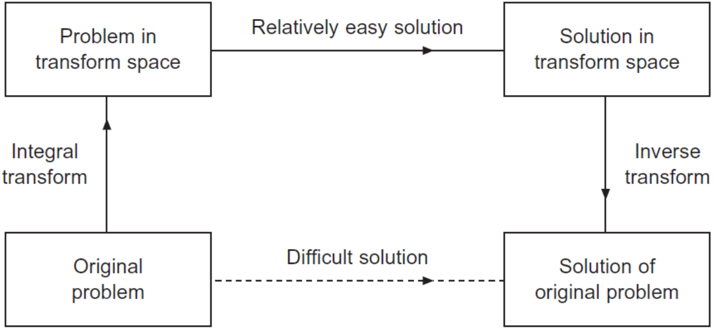
Transformada de Fourier

Transformadas integrales

Otra propiedad para que la transformación sea útil, es que debe existir el **inverso** del operador $\mathcal{L}$,

$$\mathcal{L}^{-1} g(x) = f(t),$$

Con las propiedades de las transformaciones integrales podemos aplicar la siguiente metodología para la solución de problemas:



Transformada de Fourier

Definición

La **transformada de Fourier**, expresada $g(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$, viene dada como,

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt.$$

De la transformadas de Fourier se obtienen descripciones alternas en términos de funciones coseno y seno, considerando además la paridad de $f(t)$ y $g(x)$,

$$g_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \text{Cos}\omega t dt,$$
$$g_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \text{Sen}\omega t dt,$$

las cuales se conocen como transformadas **coseno de Fourier** y **seno de Fourier**, respectivamente.

La función δ **de Dirac** se define de la siguiente manera, con $n \to \infty$,

$$\delta_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{n} e^{i\omega x} d\omega,$$

en donde algunas de sus propiedades son,

$$\delta(x - x') = 0, \quad \forall \quad x \neq x';$$
$$\int_a^b \delta(x - x') dx = \begin{cases} 0, & x > b \text{ ó } x < a, \\ 1, & a < x < b. \end{cases}$$

Utilizando la función δ, podemos expresar lo siguiente,

$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta_n(x - t) dx, \\ &= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left[\int_{-n}^{n} e^{i\omega(x-t)} d\omega \right] dx, \end{aligned}$$

Transformada de Fourier

Integral de Fourier

Intercambiando el orden de integración tenemos,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x) e^{i\omega(x-t)},$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx.$$

donde la ec. anterior se le conoce como la **integral de Fourier** de $f(t)$.

Si, además, integramos la parte de x, obtenemos lo siguiente,

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} d\omega \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx.$$
$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{-i\omega t} d\omega,$$

$\therefore$ llegamos a la expresión de la **transformada inversa de Fourier**, $f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{g(\omega)\}$.

La **transformada inversa de Fourier** también se encuentra para el caso de las funciones **coseno** y **seno**,

$$g(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} \qquad f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{g(\omega)\}$$

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt, \qquad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{-i\omega t} d\omega,$$

$$g_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \text{Cos}\omega t dt, \qquad f_c(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} g(\omega) \text{Cos}\omega t d\omega,$$

$$g_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \text{Sen}\omega t dt, \qquad f_s(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} g(\omega) \text{Sen}\omega t d\omega.$$

Transformada de Fourier

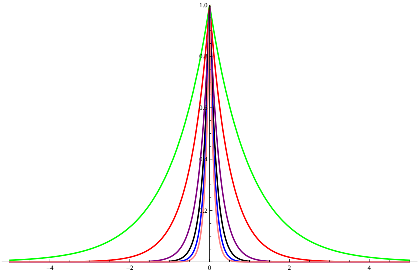
Ejemplo: transformada de Fourier

La **transformada de Fourier** de $f(t) = e^{-\alpha|t|}\ \forall\ \alpha > 0$, es:

$$g(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2},$$

graficando $f(t)$ y $g(\omega)$ variando α tenemos,

$f(t)$



$g(\omega)$