Contenido

Contenido: Tema 04

Contenido: Tema 04

Fundamentos de ecuaciones diferenciales

Clasificación de las ecuaciones diferenciales

Las ecuaciones diferenciales (DE), en general, se pueden clasificar mediante los siguientes criterios,

- **Número de variables independientes**: serán ecs. diferenciales ordinarias **(ODE)** si tienen sólo **una** variable independiente, y ecs. diferenciales parciales **(PDE)** si tiene **más de una**, por lo que presentará derivadas parciales.
- **Orden**: se refiere al **orden** de la derivada más alta en la DE.
- **Grado**: indica la **potencia** de la derivada de **mayor orden** en la DE, después de ser racionalizada.

Ejemplos:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \;\Rightarrow\; \text{segundo orden y primer grado.}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3} \;\Rightarrow\; \text{tercer orden y segundo grado.}$$

Fundamentos de ecuaciones diferenciales

Clasificación de las ecuaciones diferenciales

- **Lineal**: una ODE es lineal cuando cada término en ella es tal que la variable **dependiente** o **sus derivadas** aparecen sólo una vez y sólo en potencias igual a 1.
- **Homogénea**: se dice que una ODE lineal es homogénea cuando no hay términos **independientes** de la **variable dependiente**, en caso contrario se dice que la ODE es **no-homogénea**.

Ejemplos:

$$\frac{d^3y}{dx^3} + y\frac{dy}{dx} = 0 \;\Rightarrow\; \text{ODE no lineal.}$$

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3} + e^x \mathrm{Sen}x\frac{dy}{dx} + y = \mathrm{ln}x \;\Rightarrow\; \text{ODE lineal no-homogénea.}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x^2\frac{dy}{dx} + y = 0 \;\Rightarrow\; \text{ODE lineal homogénea.}$$

Contenido: Tema 04

La forma general de las ecuaciones diferenciales **ordinarias (ODEs) de primer orden** es:

$$
\frac{dy}{dx} = f(x,y),
$$
$$
\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)},
$$

las cuales pueden ser o no lineales.

Dependiendo de la forma en que se exprese la ODE de **primer orden**, es posible aplicar uno de los siguientes métodos de solución,

- **Separación de variables**,
- **Diferenciales exactas**,
- **Factores integrantes**.

ODE's lineales de primer orden

Métodos de solución: separación de variables

Consideremos la siguiente forma de las ODEs de primer orden,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \quad \text{y si} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{P(x)}{Q(y)},$$

entonces lo podemos expresar como,

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0,$$

integrando la ec. anterior desde (x_0, y_0) hasta (x, y) tenemos,

$$\int_{x_0}^{x} P(x)dx + \int_{y_0}^{y} Q(y)dy = 0 \quad \Leftarrow \quad \textbf{solución de la ODE}.$$

Algunas consideraciones:

1) Los límites inferiores contribuyen **sólo** con valores constantes a la solución, por lo que se pueden ignorar y sólo añadir una cte. de integración.
2) Esta técnica de solución **no** requiere que la ODE sea **lineal**.

ODE's lineales de primer orden

Métodos de solución: separación de variables

Existen ciertos casos en donde no es posible aplicar directamente la **separación de variables**, sin embargo mediante **cambios de variable** adecuados, se puede convertir a un caso de separación de variables.

Por ejemplo, si tenemos casos como:

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by) \quad \forall \quad a, b = \text{ctes.}$$

entonces podemos proponer,

$$\begin{aligned} w = ax + by \quad &\Rightarrow \quad dw = a dx + b dy, \\ \therefore \quad \frac{dw}{dx} = a + b\frac{dy}{dx} \quad &\Rightarrow \quad \frac{dw}{dx} = a + bf(ax + by) = a + bf(w), \\ \therefore \quad dx = \frac{dw}{a + bf(w)}, & \end{aligned}$$

obteniendo así una **separación de variables** en x y w, lo cual dará a si vez una relación implícita entre x y y, resolviendo el problema.

ODE's lineales de primer orden

Métodos de solución: separación de variables

Otro tipo de ecuaciones en donde podemos aplicar un **cambio de variables** es:

$$\frac{dy}{dx} = f(y/x),$$

en donde podemos aplicar la siguiente sustitución,

$$\begin{aligned} u = \frac{y}{x} \quad &\Rightarrow \quad y = xu, \\ \Rightarrow \quad dy &= xdu + udx, \\ \therefore \quad \frac{dy}{dx} &= f(u) = x\frac{du}{dx} + u, \\ \Rightarrow \quad \frac{dx}{x} &= \frac{du}{f(u) - u}, \end{aligned}$$

con lo que obtenemos una nueva relación que si es **separable**, dando como resultado una relación implícita entre u y x, lo que a su vez nos arrojará la solución, implícita también, en x y y.

ODE's lineales de primer orden

Métodos de solución: diferenciales exactas

Retomando la forma anterior de las ODEs de primer orden,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \quad \Rightarrow \quad P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

A esta ecuación se le dice **exacta** si podemos expresarla mediante un diferencial $d\varphi \;\; \forall \;\; \varphi(x,y) =$ cte.,

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy = 0,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = P(x,y) \;\; \& \;\; \frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q(x,y),$$

Para comprobar que tal $\varphi(x,y)$ **existe** y que podemos resolver nuestra ODE de esta forma, aplicamos lo siguiente,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \Rightarrow \quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}.$$

$\therefore$, si se cumple lo anterior, la construcción de la ODE será **exacta**.

ODE's lineales de primer orden

Métodos de solución: diferenciales exactas

Para ejemplificar el método de solución, consideremos que sí se cumple la condición de ecuaciones diferenciales **exactas**,

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

por tanto, existe una función $\varphi(x,y)$ tal que,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = P(x,y) \ \ \& \ \ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q(x,y),$$

ahora, integrando **parcialmente** cada una de las expresiones anteriores,

$$\varphi = \int P(x,y)dx + g(y) \ \ \& \ \ \varphi = \int Q(x,y)dy + h(x),$$

al comparar los resultados de las integrales anteriores, es posible determinar la naturaleza y forma de las funciones $g(y)$ y $h(x)$, obteniendo así $\varphi(x,y) = c$, lo cual será la solución implícita de la ODE.

ODE's lineales de primer orden

Métodos de solución: factores integrantes

La forma general de ODE's **lineales** de primer orden es:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x),$$

y en el caso de que fuera **exacta** se podía resolver por los métodos ya discutidos.

Sin embargo, en caso de que no fuera así, aún se puede transformar en exacta multiplicándola por un factor específico, conocido como **factor integrante**:

$$\exp\left(\int p(x)dx\right).$$

Para comprobar la forma del factor integrante, supongamos que $R(x)$ es el factor que estamos buscando $\Rightarrow$ si hacemos lo siguiente,

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \quad \Rightarrow \quad R(x)\frac{dy}{dx} + R(x)p(x)y = R(x)q(x),$$

de lo anterior, reordenando:

$$Rdy + Rp(x)ydx = Rq(x)dx \ \text{ ó } \ Rdy + [Rp(x)y - Rq(x)]dx = 0.$$

Ahora, recordando la condición para que una ODE sea **exacta**,

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right),$$

por tanto, para la ecuación obtenida, si quisieramos que tuviera expresión exacta, se debería cumplir:

$$\frac{\partial R(x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left[Rp(x)y\right],$$

y simplificando la expresión anterior, recordando que $R = R(x)$:

$$\frac{\partial R(x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left[R(x)p(x)y\right] \quad \Rightarrow \quad \frac{dR(x)}{dx} = R(x)p(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dR(x)}{R(x)} = p(x)dx.$$

Integrando lo anterior obtenemos,

$$\frac{dR(x)}{R(x)} = p(x)dx \;\Rightarrow\; \ln R(x) = \int p(x)dx \;\Rightarrow\; R(x) = \exp\left(\int p(x)dx\right).$$

Con el **factor integrante**, es posible por tanto obtener una solución general a la ODE,

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \quad\Rightarrow\quad e^F\frac{dy}{dx} + e^F p(x)y = e^F q(x) \;\;\forall\;\; F = \int p(x)dx,$$

$$\Rightarrow\;\; \frac{d}{dx}\left(ye^F\right) = e^F q(x) \quad\Rightarrow\quad d(ye^F) = e^F q(x)dx,$$

$$\therefore\;\; y(x) = e^{-F}\left[\int e^F q(x)dx + C\right],$$

$$\equiv y_2(x) + y_1(x).$$

ODE's lineales de primer orden

Propiedades de la solución

El término $y_1(x)$ de la solución $y(x)$,

$$y_1(x) = Ce^{-F},$$

corresponde a la solución de la ecuación **homogénea**.

Para comprobar, tomemos la ODE y hagamos $q(x) = 0$,

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} + p(x)y = 0,$$

integrando la ecuación obtenida,

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx \quad \Rightarrow \quad \ln y = -\int p(x)dx + C_1,$$

pero: $F = \int p(x)dx \quad \Rightarrow \quad \ln y = -F + C_1 \quad \Rightarrow \quad y = Ce^{-F},$

renombrando $e^{C_1} \to C$, obteniendo así el resultado esperado.

ODE's lineales de primer orden

Propiedades de la solución

Para el otro término de la solución, $y_2(x)$,

$$y_2(x) = e^{-F} \int e^F q(x) dx,$$

tenemos que corresponde al término $q(x)$ en la ODE, y por tanto es una solución de la ecuación original **no-homogénea**.

Por tanto, tenemos lo siguiente,

- $y_1(x)$ representa la solución general correspondiente a la ecuación **homogénea**.
- $y_2(x)$ representa la solución general correspondiente a la ec. **no-homogénea**.

Lo anterior nos indica que hemos encontrado la solución **completa** de la ODE lineal de primer orden,

$$y(x) = y_1^h(x) + y_2^{nh}(x),$$

la cual es la **única** solución **linealmente independiente** (salvo un múltiplo arbitrario de $y_2(x)$).

La **ecuación de Bernoulli** es una ecuación de primer orden **no-lineal** que presenta la siguiente forma general,

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n \quad \forall \quad n \in \mathbb{R}.$$

Esta ecuación, sin embargo, puede convertirse en una **lineal** si se realiza el siguiente cambio de variable,

$$w = y^{1-n} \quad \Rightarrow \quad y = w^{\frac{1}{1-n}},$$

$$\therefore \quad \frac{dw}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n}y^n\frac{dw}{dx}.$$

Sustituyendo lo anterior en la ecuación de Bernoulli,

$$\frac{1}{1-n}y^n\frac{dw}{dx} + p(x)y = q(x)y^n,$$

$$\Rightarrow \quad dw/dx + p(x)(1-n)y^{1-n} = q(x)(1-n),$$

$$\therefore \quad \frac{dw}{dx} + p(x)(1-n)w = q(x)(1-n), \quad \textbf{ODE lineal.}$$

Contenido: Tema 04

ODE's lineales de segundo orden

Coeficientes constantes

Un caso especial en las ODE's lineales, de cualquier orden, es aquel que tiene **coeficientes constantes**,

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{dy}{dx} + a_0 y = F(x),$$

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0)y = F(x) \;\; \forall \;\; D \equiv \frac{d}{dx}.$$

Centrándonos en ODE's lineales de **segundo orden**, tenemos,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = (D^2 + aD + b)y = F(x), \;\; \forall \;\; a, b = \text{ctes}.$$

y recordando que la solución de una ODE's **no-homogénea** involucra resolver primero la ecuación **homogénea** (haciendo $F(x) = 0$),

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = (D^2 + aD + b)y = 0,$$

lo cual arroja como solución la función **complementaria** $y_c(x)$ de la ecuación general.

ODE's lineales de segundo orden

Coeficientes constantes: soluciones

Ahora, para saber el número de soluciones complementarias linealmente **independientes** de la ecuación homogénea, tenemos el siguiente:

Teorema

Una ODE lineal homogénea de orden n tendrá a lo más n soluciones **linealmente independientes** y_j, en donde la solución general será

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j(x) \ \ \forall \ \ c_j = \text{ctes.}$$

lo que se conoce como **principio de superposición**.

Para el caso de segundo orden debemos tener a lo más **dos** soluciones **linealmente independientes**, las cuales por tanto deben cumplir,

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ dy_1/dx & dy_2/dx \end{vmatrix} \neq 0.$$

es decir, que el **Wronskiano** sea diferente de cero.

ODE's lineales de segundo orden

Coeficientes constantes: método de solución

La ODE de segundo grado lineal homogénea,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0,$$

tedrá como **solución general** $y \propto e^{mx}$, en donde m es obtenido sustituyendo y en la ecuación,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx}(e^{mx}) + a\frac{d}{dx}(e^{mx}) + b(e^{mx}) &= 0, \\ m^2e^{mx} + ame^{mx} + be^{mx} &= 0, \\ \Rightarrow \quad m^2 + am + b &= 0. \end{aligned}$$

La ecuación obtenida se le conoce como **ecuación auxiliar**, cuya solución nos da:

$$m_1 = -\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2}, \quad m_2 = -\frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

ODE's lineales de segundo orden

Coeficientes constantes: método de solución

De la forma de las soluciones a la ecuación auxiliar, se observa que es posible obtener tres casos distintos,

- m_1 y m_2 sean **reales** y **distintas** $\Rightarrow a^2 - 4b > 0$.
- m_1 y m_2 sean **reales** e **iguales** $\Rightarrow a^2 - 4b = 0$.
- m_1 y m_2 sean **complejos conjugados** $\Rightarrow a^2 - 4b < 0$.

En el caso de raices **reales y distintas**, se tendrán **dos** soluciones linealmente independientes,

$$y_1 = e^{m_1 x} \;\;\&\;\; y_2 = e^{m_2 x},$$

lo cual nos dará la **solución general**,

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x},$$

dada por el **principio de superposición**.

ODE's lineales de segundo orden

Coeficientes constantes: método de solución

En el caso de obtener raices **reales e iguales** ($m_1 = m_2$), entonces sólo es posible obtener **una** solución,

$$y_1 = e^{m_1 x} \;\; \forall \;\; m_1 = -a/2.$$

Para obtener la **segunda** solución, proponemos:

$$y = u(x) y_1(x) \;\; \forall \;\; y_1(x) \leftarrow \text{ solución de la ODE},$$

la cual aplicamos a la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0,$$

$$\text{donde: } y = u e^{m_1 x},$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \left(m_1 u + \frac{du}{dx} \right) e^{m_1 x},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(m_1^2 u + 2m_1 \frac{du}{dx} + \frac{d^2u}{dx^2} \right) e^{m_1 x},$$

Sustituyendo en la ODE lo obtenido anteriormente, tenemos:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + (2m_1 + a)\frac{du}{dx} + (m_1^2 + am_1 + b)u = 0 \ \ \forall \ \ e^{m_1 x} \neq 0,$$
$$\Rightarrow \frac{d^2u}{dx^2} = 0,$$

ya que,

$$(2m_1 + a) = 0, \ \ \forall \ \ m_1 = -a/2,$$
$$m_1^2 + am_1 + b = 0, \ \ \text{se trata de la ec. } \textbf{auxiliar}.$$

con lo cual, resolviendo, obtenemos:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0 \ \ \Rightarrow \ \ \frac{du}{dx} = C = \text{cte.} \ \ \Rightarrow \ \ u = x,$$

entonces, construyendo la **solución general**,

$$y_1 = e^{m_1 x} \ \ \& \ \ y_2 = u(x)y_1(x) = xe^{m_1 x},$$
$$\therefore \ \ y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_1 x}.$$

Para el caso cuando se obtiene de la ecuación auxiliar raices **complejas conjugadas**,

$$m_1 = \alpha + i\beta \;\; \& \;\; m_2 = \alpha - i\beta,$$

por tanto, las posibles soluciones serán,

$$y_1 = e^{m_1 x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x},$$
$$y_2 = e^{m_2 x} = e^{\alpha x} e^{-i\beta x}.$$

Sin embargo, como se requiere que las soluciones sean funciones definidas en un a región el campo de los **reales** $\Rightarrow$ se deben reformular las expresiones de y_1 y y_2 mediante la **fórmula de Euler**:

$$e^{i\theta} = \mathrm{Cos}\theta + i\mathrm{Sen}\theta,$$

con lo cual obtenemos:

$$y_1 = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x}\left(\mathrm{Cos}\beta x + i\mathrm{Sen}\beta x\right),$$
$$y_2 = e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}\left(\mathrm{Cos}\beta x - i\mathrm{Sen}\beta x\right).$$

ODE's lineales de segundo orden

Coeficientes constantes: método de solución

Con las expresiones anteriores se puede construir la **solución general**,

$$\begin{aligned} y &= A_1 y_1 + A_2 y_2, \\ &= A_1 e^{\alpha x}\left(\mathsf{Cos}\beta x + i\mathsf{Sen}\beta x\right) + A_2 e^{\alpha x}\left(\mathsf{Cos}\beta x - i\mathsf{Sen}\beta x\right), \\ &= (A_1 + A_2) e^{\alpha x}\mathsf{Cos}\beta x + i(A_1 - A_2) e^{\alpha x}\mathsf{Sen}\beta x, \\ \therefore\ y &= c_1 e^{\alpha x}\mathsf{Cos}\beta x + c_2 e^{\alpha x}\mathsf{Sen}\beta x, \end{aligned}$$

en donde se han realizado las siguientes sustituciones,

$$c_1 = A_1 + A_2 \ \ \& \ \ c_2 = i(A_1 - A_2),$$

obteniendo así,

$$y_1 = e^{\alpha x}\mathsf{Cos}\beta x \ \ \& \ \ y_2 = e^{\alpha x}\mathsf{Sen}\beta x,$$

las cuales representan, ahora sí, un conjunto de funciones **reales**, linealmente independientes.

ODE's lineales de segundo orden

Puntos singulares

En una ODE lineal homogénea general,

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0,$$

se tiene una clasificación de puntos específicos x_0 en el rango de acción de la ODE,

- **Ordinarios**: si $P(x)$ y $Q(x)$ son finitos en x_0, dentro del rango de acción.
- **Singulares**: si $P(x)$ y $Q(x)$ divergen cuando $x \to x_0$.
  - **Regular**: si alguno $P(x)$ o $Q(x)$ divergen en x_0, pero $(x - x_0)P(x)$ y $(x - x_0)^2 Q(x)$ permanecen finitos.
  - **Irregular**: si, $P(x)$ diverge más rápido que $1/(x - x_0)$ tal que $(x - x_0)P(x)$ diverge conforme $x \to x_0$, ó cuando $Q(x)$ diverge más rápido que $1/(x - x_0)^2$ tal que $(x - x_0)^2 Q(x)$ tiende a infinito cuando $x \to x_0$.

Las definiciones anteriores aplican para todo valor **finito** de x_0. Si se tiene el caso de $x_0 \to \infty$ se procede a realizar un cambio de variable:

$$x = 1/z \;\Rightarrow\; \text{si } x \to \infty \text{ entonces } z \to 0.$$

Método de Frobenius & Teorema de Fuchs

(1) Si $P(x)$ y $Q(x)$ tienen en $x = x_0$ un punto **ordinario** $\Rightarrow$ la ODE lineal de segundo orden tendrá **dos** soluciones de la forma,

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^j \quad \forall \quad a_0 \neq 0.$$

(2) Si $P(x)$ y $Q(x)$ tienen en $x = x_0$ un punto singular **regular** $\Rightarrow$ la ODE lineal de segundo orden tendrá **al menos una** solución de la forma

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^{s+j} \quad \forall \quad a_0 \neq 0,$$

en donde $s =$ cte. será determinada junto con los coeficientes a_j.

(3) Si $P(x)$ y $Q(x)$ tienen en $x = x_0$ un punto singular **irregular** $\Rightarrow$ la ODE lineal de segundo orden podría **no tener** solución.

ODE's lineales de segundo orden

Método de Frobenius: caso general

Consideremos el siguiente caso general para ejemplificar el método de **Frobenius**,

$$x^2 y'' + x g(x) y' + h(x) y = 0,$$

en donde las funciones $g(x)$ y $h(x)$ son analíticas en $x_0 = 0$.

Escribiendo la ecuación anterior en la forma canónica,

$$y'' + \frac{g(x)}{x} y' + \frac{h(x)}{x^2} y = 0,$$

y comprobando la naturaleza del punto $x_0 = 0$ para $P(x) = g(x)/x$ y $Q(x) = h(x)/x^2$, encontramos que será **singular regular**.

Por tanto, podemos expresar la solución de la ecuación diferencial como una **serie de potencias** del tipo,

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^{j+s} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{j+s} \quad \forall \quad a_0 \neq 0.$$

ODE's lineales de segundo orden

Método de Frobenius: caso general

Calculando las derivadas de la solución propuesta,

$$y'(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (j+s) x^{j+s-1}, \quad y''(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (j+s)(j+s-1) x^{j+s-2}.$$

Ahora, por otro lado, debido a la naturaleza de $g(x)$ y $h(x)$, también podemos expanderlas en **serie de potencias**,

$$g(x) = g(0) + g_1 x + g_2 x^2 + \ldots, \quad h(x) = h(0) + h_1 x + h_2 x^2 + \ldots.$$

Sustituyendo las expansiones anteriores en la ecuación diferencial,

$$x^2 y'' + x g(x) y' + h(x) y = 0,$$

$$\Rightarrow \quad x^2 \sum_{j=0}^{\infty} a_j (j+s)(j+s-1) x^{j+s-2} + \ldots$$

$$\ldots + x \sum_{i=0}^{\infty} g_i x^i \sum_{j=0}^{\infty} a_j (j+s) x^{j+s-1} + \sum_{i=0}^{\infty} h_i x^i \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{j+s} = 0,$$

Reordenando y aplicando algunos productos tenemos,

$$x^2 \sum_{j=0}^{\infty} a_j (j+s)(j+s-1) x^{j+s-2} + \ldots$$

$$\ldots + x \sum_{i=0}^{\infty} g_i x^i \sum_{j=0}^{\infty} a_j (j+s) x^{j+s-1} + \sum_{i=0}^{\infty} h_i x^i \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{j+s} = 0,$$

$$\therefore \quad \sum_{j=0}^{\infty} a_j (j+s)(j+s-1) x^{j+s} + \ldots$$

$$\ldots + (g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \ldots) \sum_{j=0}^{\infty} a_j (j+s) x^{j+s} + \ldots$$

$$\ldots + (h_0 + h_1 x + h_2 x^2 + \ldots) \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{j+s} = 0,$$

ODE's lineales de segundo orden

Método de Frobenius: caso general

Expandiendo las series tenemos

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j(j+s)(j+s-1)x^{j+s} + \ldots$$

$$\ldots + (g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \ldots)\sum_{j=0}^{\infty} a_j(j+s)x^{j+s} + \ldots$$

$$\ldots + (h_0 + h_1 x + h_2 x^2 + \ldots)\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{j+s} = 0,$$

agrupando los términos por valores de j:

$$\begin{aligned}
j = 0 \;\Rightarrow\;& a_0 s(s-1)x^s + (g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \ldots)a_0 s x^s + \ldots \\
&\ldots + (h_0 + h_1 x + h_2 x^2 + \ldots)a_0 x^s, \\
j = 1 \;\Rightarrow\;& a_1(1+s)s x^{1+s} + (g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \ldots)a_1(1+s)x^{1+s} + \ldots \\
&\ldots + (h_0 + h_1 x + h_2 x^2 + \ldots)a_1 x^{1+s}, \\
\vdots \quad & \vdots
\end{aligned}$$

De lo anterior,

$$
\begin{aligned}
j=0 \;\Rightarrow\; & a_0 s(s-1)x^s + (g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \ldots)a_0 s x^s + \ldots \\
& \ldots + (h_0 + h_1 x + h_2 x^2 + \ldots)a_0 x^s, \\
j=1 \;\Rightarrow\; & a_1(1+s)s x^{1+s} + (g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \ldots)a_1(1+s)x^{1+s} + \ldots \\
& \ldots + (h_0 + h_1 x + h_2 x^2 + \ldots)a_1 x^{1+s}, \\
\vdots \quad & \vdots
\end{aligned}
$$

agrupando en potencias de x tenemos,

$$
\begin{aligned}
s \;\Rightarrow\; & a_0 s(s-1) + a_0 g_0 s + a_0 h_0 = 0, \\
s+1 \;\Rightarrow\; & a_0 g_1 s + a_0 h_1 + a_1(1+s)s + a_1 g_0(1+s) + a_1 h_0 = 0, \\
\vdots \quad & \vdots
\end{aligned}
$$

Por tanto, de la **ecuación indicial** (x^s) tenemos,

$$
a_0\left[s(s-1) + g_0 s + h_0\right] = 0 \;\Rightarrow\; s^2 + (g_0 - 1)s + h_0 = 0, \;\; \forall \;\; a_0 \neq 0
$$

ODE's lineales de segundo orden

Método de Frobenius: caso general

De la **ecuación indicial** anteriormente obtenida,

$$s^2 + (g_0 - 1)s + h_0 = 0,$$

observamos que en general habrá **tres** diferentes posibilidades, según sean las raices de la ecuación:

- **Caso 1**: las raices son **distintas** y **no** difieren por un **entero**, $s_1 - s_2 = N \ \ \forall \ \ N \in \mathbb{Q}$. Este caso es el más sencillo y común, dando de manera natural las **dos soluciones** independientes.
- **Caso 2**: las raices son **degeneradas**, $s_1 = s_2$. En este caso el método sólo arroja **una solución** de las dos necesarias. Por tanto, es necesario un método adicional para el cálculo de la segunda solución.
- **Caso 3**: las **raices** difieren por un **entero**, $s_1 - s_2 = N \ \ \forall \ \ N \in \mathbb{Z}$. En este caso la **raiz mayor** nos dará una **solución**, mientras que la menor puede o no darnos otra, dependiento del comportamiento de los coeficientes.

Para casos de ODEs homogéneas de segundo orden en donde no podemos obtener de manera directa las dos soluciones linealmente independientes, existen métodos para encontrar la **segunda solución**:

- **Método del Wronskiano**,
- **Expansión en series**.

Método del Wronskiano

Tenemos una ODE lineal de **segundo orden**,

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \;\; \forall \;\; y_1, \; y_2 \;\; \text{soluciones independientes,}$$

en donde el Wronskiano del sistema es,

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2.$$

ODE's lineales de segundo orden

Segunda solución: Método del Wronskiano

Ahora, si diferenciamos el Wronskiano obtenemos,

$$W = y_1 y_2' - y_1' y_2 \quad \Rightarrow \quad W' = y_1 y_2'' - y_1'' y_2,$$

y usamos la ODE, para obtener las expresiones de y_i'',

$$y_i'' + P(x) y_i' + Q(x) y_i = 0 \quad \Rightarrow \quad y_i'' = -P(x) y_i' - Q(x) y_i.$$

y las sustituimos en W',

$$\begin{aligned} W' &= y_1 y_2'' - y_1'' y_2, \\ \Rightarrow \quad W' &= y_1[-P(x) y_2' - Q(x) y_2] - [-P(x) y_1' - Q(x) y_1] y_2, \\ &= -P(x)[y_1 y_2' - y_1' y_2] = -P(x) W, \\ \therefore \quad \frac{dW}{W} &= -P(x) dx. \end{aligned}$$

La ecuación anterior puede ser utilizada para obtener la segunda solución, $y_2(x)$, conociendo la primera, $y_1(x)$, previamente.

ODE's lineales de segundo orden

Segunda solución: Método del Wronskiano

Para obtener la segunda solución, se integra la ecuación anterior desde una cte. arbitraria $x_1 = a$ hasta $x_1 = x$,

$$\ln\left[\frac{W(x)}{W(a)}\right] = -\int_a^x P(x_1)dx_1 \;\Rightarrow\; W(x) = W(a)\exp\left[-\int_a^x P(x_1)dx_1\right].$$

Por otro lado, observamos que:

$$W = y_1 y_2' - y_1' y_2 = y_1^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right),$$

combinando los resultados anteriores,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{W(a)}{y_1^2}\exp\left[-\int_a^x P(x_1)dx_1\right].$$

Integrando nuevamente el resultado anterior desde una cte. arbitraria $x_2 = b$ hasta $x_2 = x$,

$$\left.\frac{y_2(x_2)}{y_1(x_2)}\right|_b^x = W(a)\int_b^x \frac{dx_2}{[y_1(x_2)]^2}\exp\left[-\int_a^{x_2} P(x_1)dx_1\right],$$

ODE's lineales de segundo orden

Segunda solución: Método del Wronskiano

Entonces,

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{y_2(x_2)}{y_1(x_2)}\right|_b^x &= W(a)\int_b^x \frac{dx_2}{\left[y_1(x_2)\right]^2}\exp\left[-\int_a^{x_2} P(x_1)dx_1\right], \\
y_2(x) &= y_1(x)\frac{y_2(b)}{y_1(b)} + y_1(x)W(a)\int_b^x \frac{dx_2}{\left[y_1(x_2)\right]^2}\exp\left[-\int_a^{x_2} P(x_1)dx_1\right], \\
\therefore\ \ y_2(x) &= y_1(x)W(a)\int_b^x \frac{dx_2}{\left[y_1(x_2)\right]^2}\exp\left[-\int_a^{x_2} P(x_1)dx_1\right].
\end{aligned}
$$

donde se ha descartado $y_1(x)y_2(b)/y_1(b)$ ya que es un **múltiplo** de $y_1(x)$, y por tanto no arroja información adicional a la solución $y_2(x)$.

La ecuación anterior podemos expresarla de manera mas compacta como,

$$
y_2(x) = y_1(x)\int^x \frac{dx_2}{\left[y_1(x_2)\right]^2}\exp\left[-\int^{x_2} P(x_1)dx_1\right].
$$

ODE's lineales de segundo orden

Segunda solución: Método del Wronskiano

De la solución resultante,

$$y_2(x) = y_1(x) \int^x \frac{dx_2}{[y_1(x_2)]^2} \exp\left[-\int^{x_2} P(x_1)dx_1\right],$$

tales cambios fueron posibles ya que,

- Como $W(a) =$ cte. y las soluciones $y_i(x)$ de una ODE homogénea siempre contienen un factor arbitrario de **normalización** $\Rightarrow$ hacemos $W(a) = 1$.
- Los límites han sido **eliminados**, ya que solo aportan elementos ctes. a ser multiplicados por $y_1(x)$, los cuales no ofrecen información adicional relevante.

Finalmente, para el caso particular cuando $P(x) = 0$, tenemos:

$$y'' + Q(x)y = 0 \Rightarrow y_2(x) = y_1(x) \int^x \frac{dx_2}{[y_1(x_2)]^2},$$

en donde $W = y_1y_2' - y_1'y_2 =$ cte.

ODE's lineales de segundo orden

Segunda solución: Expansión en series

Usando el **método de Frobenius** para la sig. ODE de 2° orden,

$$x^2y'' + xg(x)y' + h(x)y = 0 \quad \Rightarrow \quad y'' + \frac{g(x)}{x}y' + \frac{h(x)}{x^2}y = 0,$$

en donde se había encontrado que $x_0 = 0$ era una **singularidad**, por lo que la solución propuesta era,

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{j+s} \;\; \forall \;\; a_0 \neq 0.$$

Considerando que $g(x)$ y $h(x)$ eran **analíticas** en la vecindad de $x_0 = 0$, se llegó a la siguiente expresión para la solución propuesta,

$$x^2y'' + xg(x)y' + h(x)y = 0,$$

$$\Rightarrow \;\; x^2 \sum_{j=0}^{\infty} a_j(j+s)(j+s-1)x^{j+s-2} + \ldots$$

$$\ldots + x\sum_{i=0}^{\infty} g_i x^i \sum_{j=0}^{\infty} a_j(j+s)x^{j+s-1} + \sum_{i=0}^{\infty} h_i x^i \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{j+s} = 0.$$

La expresión anterior se simplificaba, obteniendo lo siguiente:

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j(j+s)(j+s-1)x^{j+s} + \ldots$$

$$\ldots + (g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \ldots)\sum_{j=0}^{\infty} a_j(j+s)x^{j+s} + \ldots$$

$$\ldots + (h_0 + h_1 x + h_2 x^2 + \ldots)\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{j+s} = 0,$$

y agrupando los coeficientes de potencias iguales de x:

$$\begin{aligned} s \;&\Rightarrow\; a_0 s(s-1) + a_0 g_0 s + a_0 h_0 = 0, \\ s+1 \;&\Rightarrow\; a_0 g_1 s + a_0 h_1 + a_1(1+s)s + a_1 g_0(1+s) + a_1 h_0 = 0, \end{aligned}$$

lo cual nos daba como resultado la **ecuación indicial**,

$$a_0\left[s(s-1) + g_0 s + h_0\right] = 0 \quad\Rightarrow\quad s^2 + (g_0 - 1)s + h_0 = 0, \;\; \forall \;\; a_0 \neq 0.$$

Considerando el caso en el cual se tiene $s_1 - s_2 = n \;\; \forall \;\; n \in \mathbb{Z}$, entonces sólo se puede asegurar **una** solución.

Tomando en cuenta ese caso, hacemos $s_1 = \alpha \Rightarrow s_2 = \alpha - n$,

$$\Rightarrow \quad (s-\alpha)(s-\alpha+n) = 0 \;\rightarrow\; s^2 + (n-2\alpha)s + \alpha(\alpha - n) = 0,$$

comparando lo anterior con la ecuación indicial,

$$s^2 + (g_0 - 1)s + h_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad g_0 - 1 = n - 2\alpha, \quad \& \quad \alpha(\alpha - n) = h_0.$$

Considerando que hemos obtenido $s = \alpha$, podemos expresar la **primera** solución como:

$$y_1(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{j+s} = x^{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j,$$

mientras que la **segunda** solución $y_2(x)$ debe ser obtenida por otro método.

Utilizando el **método del Wronskiano** para obtener $y_2(x)$,

$$y_2(x) = y_1(x) \int^x \frac{dx_2}{[y_1(x_2)]^2} \exp\left[-\int^{x_2} P(x_1) dx_1\right],$$

$$= y_1(x) \int^x \frac{dx_2}{x^{2\alpha}\left[\sum_{j=0}^{\infty} a_j x_2^j\right]^2} \exp\left[-\int^{x_2} \sum_{i=0}^{\infty} g_i x_1^{i-1} dx_1\right],$$

en donde recordemos que $P(x) = x^{-1} g(x)$.

Integrando primero la parte del exponencial,

$$\int^{x_2} \sum_{i=0}^{\infty} g_i x_1^{i-1} dx_1 = \int^{x_2} \left[g_0 x_1^{-1} + \sum_{i=1}^{\infty} g_i x_1^{i-1}\right] dx_1,$$

$$= \int^{x_2} \left[g_0 x_1^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} g_{k+1} x_1^{k}\right] dx_1 \quad \forall \quad i-1 \to k,$$

$$= g_0 \ln x_2 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+1}}{k+1} x_2^{k+1}.$$

Sustituyendo el resultado anterior en la función exponencial,

$$\exp\left[-\int^{x_2}\sum_{i=0}^{\infty} g_i x_1^{i-1} dx_1\right] = \exp\left[\ln\left(x_2^{-g_0}\right)\right]\exp\left[-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{g_{k+1}}{k+1}x_2^{k+1}\right],$$

$$= x_2^{-g_0}\left[1-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{g_{k+1}}{k+1}x_2^{k+1}+\dots\right.$$

$$\left.\dots+\frac{1}{2!}\left(-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{g_{k+1}}{k+1}x_2^{k+1}\right)^2+\dots\right],$$

en donde la serie será **convergente** si la serie $g(x)/x$ es **convergente**, por tanto lo podemos expresar a su vez como una serie **resultante**,

$$\Rightarrow \quad \exp\left[-\int^{x_2}\sum_{i=0}^{\infty} g_i x_1^{i-1} dx_1\right] = x_2^{-g_0}\sum_{m=0}^{\infty}\beta_m x_2^m \quad \forall \quad \beta_m = f(g_i).$$

ODE's lineales de segundo orden

Segunda solución: Expansión en series

Tratando ahora el término del denominador,

$$\left[x_2^{2\alpha}\left(\sum_{j=0}^{\infty}a_j x_2^j\right)^2\right]^{-1} = x_2^{-2\alpha}\left(\sum_{j=0}^{\infty}a_j x_2^j\right)^{-2},$$

$$= x_2^{-2\alpha}a_0^{-2}\left(1 + a_0^{-1}\sum_{j=1}^{\infty}a_j x_2^j\right)^{-2}.$$

Lo anterior lo podemos expresar como una **expansión binomial**, ya que el término de la serie es **convergente**,

$$a_0^{-2}\left(1 + a_0^{-1}\sum_{j=1}^{\infty}a_j x_2^j\right)^{-2} = a_0^{-2}\left(1 - \frac{2}{a_0}\sum_{j=1}^{\infty}a_j x_2^j - \frac{3}{a_0^2}\left[\sum_{j=1}^{\infty}a_j x_2^j\right]^2 + \ldots\right.$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} b_n x_2^n \;\; \forall \;\; b_n = f(a_j).$$

Finalmente, retomando la expresión para $y_2(x)$,

$$y_2(x) = y_1(x) \int^x \frac{dx_2}{x^{2\alpha}\left[\sum_{j=0}^{\infty} a_j x_2^j\right]^2} \exp\left[-\int^{x_2} \sum_{i=0}^{\infty} g_i x_1^{i-1} dx_1\right],$$

sustituimos los resultados obtenidos previamente,

$$\exp\left[-\int^{x_2} \sum_{i=0}^{\infty} g_i x_1^{i-1} dx_1\right] = x_2^{-g_0} \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m x_2^m,$$

$$\left[x_2^{2\alpha}\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j x_2^j\right)^2\right]^{-1} = x_2^{-2\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x_2^n,$$

$$\Rightarrow \quad y_2(x) = y_1(x) \int^x x_2^{-g_0-2\alpha} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \beta_m x_2^m\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x_2^n\right) dx_2,$$

$$= y_1(x) \int^x x_2^{-g_0-2\alpha} \left(\sum_{j=0}^{\infty} c_j x_2^j\right) dx_2.$$

Recordando que se había encontrado de la ecuación **indicial** y las propiedades de las raices de la misma lo sig:

$$g_0 - 1 = n - 2\alpha \quad \Rightarrow \quad -n - 1 = -g_0 - 2\alpha \;\; \forall \;\; n \in \mathbb{Z},$$

por tanto la solución $y_2(x)$ queda como:

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1(x) \int^x x_2^{-n-1} \left(\sum_{j=0}^{\infty} c_j x_2^j \right) dx_2 = y_1(x) \int^x dx_2 \sum_{j=0}^{\infty} c_j x_2^{j-n-1}, \\ &= y_1(x) \int^x dx_2 \left(c_0 x_2^{-n-1} + c_1 x_2^{-n} + \ldots + c_n x_2^{-1} + \ldots \right), \\ &= y_1(x) \left(\frac{c_0}{-n} x^{-n} + \frac{c_1}{-n+1} x^{-n+1} + \ldots + c_n \ln(x) + \ldots \right), \\ &= c_n y_1(x) \ln(x) + y_1(x) \sum_{l=-n}^{\infty} \gamma_l x^l. \end{aligned}$$

Si sustituimos el resultado de la solución $y_1(x)$ en la parte de la serie, encontramos:

$$y_1(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{j+\alpha},$$

$$\Rightarrow \quad y_2(x) = c_n y_1(x) \ln(x) + x^{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \sum_{l=-n}^{\infty} \gamma_l x^l,$$

$$y_2(x) = c_n y_1(x) \ln(x) + \sum_{i=-n}^{\infty} d_i x^{i+\alpha}.$$

Ahora, si recorremos el índice $i \to i + n = j$, entonces:

$$y_2(x) = c_n y_1(x) \ln(x) + \sum_{j=0}^{\infty} d_{j-n} x^{j-n+\alpha}.$$

Pero recordando,

$$s_1 - s_2 = n \;\; \forall \;\; s_1 = \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha - n = s_2,$$

sustituyendo lo anterior en la solución para $y_2(x)$,

$$\begin{aligned} y_2(x) &= c_n y_1(x) \ln(x) + \sum_{j=0}^{\infty} d_{j-n} x^{j-n+\alpha}, \\ &= c_n y_1(x) \ln(x) + \sum_{j=0}^{\infty} d_{j-n} x^{j+s_2}, \end{aligned}$$

finalmente, realizando la siguiente sustitución $f_j = d_{j-n}$, llegamos a la expresión para la **segunda solución**:

$$\Rightarrow \quad y_2(x) = c_n y_1(x) \ln(x) + \sum_{j=0}^{\infty} f_j x^{j+s_2}.$$

ODE's lineales de segundo orden

Ecuaciones no-homogéneas

Una ecuación **no-homogénea** es del tipo,

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = F(x),$$

en donde el proceso de solución consiste en dos partes:

(1) Resolver la parte **homogénea** ($F(x) = 0$) obteniendo las dos sol. independientes $y_1(x)$ y $y_2(x)$, dando así la func. **complementaria**).

(2) Obtener la solución **particular** $y_p(x)$ que resuelve a $F(x)$.

Con lo cual se obtiene la solución general de la ODE:

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x) \quad \forall \quad y_c(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2(x).$$

Para obtener tal solución particular se puede proceder de las sig. maneras:

- Proponer una solución que se intuya, de manera educada, sea la que nos resuelva para $F(x)$.
- Utilizar el método de **variación de parámetros**, el cual hace uso de las soluciones de la parte **homogénea** como punto de partida para hallar $y_p(x)$.

ODE's lineales de segundo orden

Ecuaciones no-homogéneas: Método de coeficientes indeterminados

Para el caso de ODE's no-homogéneas con **coeficientes constantes**, es posible obtener la **solución particular** $y_p(x)$ mediante el método de **coeficientes indeterminados**.

El método consiste en una deducción (educada) de la posible forma funcional de $y_p(x)$, dependiendo de la forma de $F(x)$.

- **Caso I**: $F(x) = p_n(x)$
  Cuando se tiene un polinomio de grado n en la variable independiente para $F(x)$, se asume la siguiente forma para la solución particular,

  $$y_p = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \ldots + A_1 x + A_0.$$

- **Caso II**: $F(x) = ke^{\alpha x}$
  En este caso, en donde k y α son constantes conocidas, se asume como posible solución,

  $$y_p = Ae^{\alpha x}.$$

ODE's lineales de segundo orden

Ecuaciones no-homogéneas: Método de coeficientes indeterminados

- **Caso III**: $F(x) = k_1\text{Cos}\beta x + k_2\text{Sen}\beta x$
  Donde k_1, k_2, y β son constantes conocidas, entonces:

$$y_p = A\text{Cos}\beta x + B\text{Sen}\beta x.$$

En las ODE's donde $F(x)$ sea un **producto** o **suma** de términos como los casos **I** a **III**, se propone como sol. particular el **producto** o **suma** de las soluciones propuestas correspondientes,

$$F(x) = e^{\alpha x}p_n(x),$$

$$\Rightarrow\ y_p = e^{\alpha x}(A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \ldots + A_1 x + A_0).$$

$$F(x) = e^{\alpha x}p_n(x)\text{Sen}\beta x,$$

$$\Rightarrow\ y_p = e^{\alpha x}\text{Sen}\beta x(A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \ldots + A_1 x + A_0) + \ldots$$

$$\ldots + e^{\alpha x}\text{Cos}\beta x(B_n x^n + B_{n-1}x^{n-1} + \ldots + B_1 x + B_0),$$

$$F(x) = k_1 e^{\alpha x} + p_n(x) + k_2\text{Sen}\beta x,$$

$$\Rightarrow\ y_p = Ce^{\alpha x} + (A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \ldots + A_1 x + A_0) + \ldots$$

$$\ldots + B_1\text{Sen}\beta x + B_2\text{Cos}\beta x.$$

El método de **variación de parámetros** comienza proponiendo una forma a la solución **particular** de la ec. **no-homogénea**,

$$y(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x),$$

calculando después las derivadas de la solución propuesta, para sustituirlas en la ODE:

$$y' = u_1y_1' + u_1'y_1 + u_2y_2' + u_2'y_2 = u_1y_1' + u_2y_2' + (y_1u_1' + y_2u_2'),$$

sin embargo, debido a la libertad de la forma que pueden tener las u_i's, se eligen de tal manera que se cumpla la siguiente relación:

$$y_1u_1' + y_2u_2' = 0,$$

por tanto las derivadas quedan como,

$$\begin{aligned} y' &= u_1y_1' + u_2y_2', \\ y'' &= u_1y_1'' + u_2y_2'' + u_1'y_1' + u_2'y_2'. \end{aligned}$$

Insertando lo obtenido anteriormente en la ODE,

$$\begin{aligned} F(x) &= y'' + P(x)y' + Q(x)y, \\ \Rightarrow \quad F(x) &= u_1 y_1'' + u_2 y_2'' + u_1' y_1' + u_2' y_2' + \dots \\ &\quad \dots + P(x)(u_1 y_1' + u_2 y_2') + Q(x)(u_1 y_1 + u_2 y_2), \\ \therefore \quad F(x) &= u_1 \left[y_1'' + P(x) y_1' + Q(x) y_1 \right] + \dots \\ &\quad \dots + u_2 \left[y_2'' + P(x) y_2' + Q(x) y_2 \right] + u_1' y_1' + u_2' y_2', \end{aligned}$$

pero como las soluciones y_1 y y_2 cumplen con la ec. homogénera, anulan los términos en paréntesis, por tanto solo nos queda:

$$F(x) = u_1' y_1' + u_2' y_2'.$$

La ecuación anterior junto con la condición sobre las funciones u_i's nos da un sistema de ec. simultáneas a resolverse en u_1' y u_2',

$$y_1 u_1' + y_2 u_2' = 0, \quad u_1' y_1' + u_2' y_2' = F(x),$$

las cuales integrando se obtiene $u_1(x)$ y $u_2(x)$, dando finalmente y_p.