Contenido

5. Variable compleja

Contenido: Tema 05

Contenido: Tema 05

Números complejos y funciones

Propiedades básicas

Un **número complejo** esta definido como un par ordenado de dos variables reales,

$$z \equiv (x, y) = x + iy \quad \forall \quad x, y \in \mathbb{R},$$
$$\text{siendo:} \quad x \equiv \mathbb{R}\mathrm{e}\{z\} \;\&\; y \equiv \mathbb{I}\mathrm{m}\{z\}.$$

Para lo cual se define,

$$i \equiv (0, 1), \quad i^2 \equiv (-1, 0) \quad \Rightarrow \quad i = \sqrt{-1}.$$

Al tratarse los números complejos de un **campo**, tienen definidas las siguientes operaciones,

- **Adición**:

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

- **Producto**:

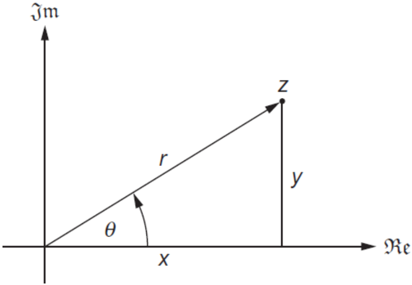
$$z_1 z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

También se tiene la definición del **complejo conjugado** de z,

si $z = x + iy \;\Rightarrow\; z^* = x - iy \;\therefore\; zz^* = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2$,

con lo cual se define la **norma** de z, como $|z| = \sqrt{zz^*}$.

Los números complejos han sido representados hasta ahora de manera **cartesiana**, sin embargo también tienen representación **polar**,



$$
\begin{aligned}
z &= x + iy, \\
&= r\,(\text{Cos}\theta + i\text{Sen}\theta) = re^{i\theta},
\end{aligned}
$$

en donde,

$$
r \equiv |z|, \;\; \text{Cos}\theta = \frac{x}{r}, \;\; \text{Sen}\theta = \frac{y}{r},
$$
$$
\therefore \;\; \text{Tg}\theta = y/x.
$$

Siendo r el **módulo** de z, y θ la **fase**.

En el caso de la descripción polar, la **multiplicación** queda como,

$$zz' = (re^{i\theta})(r'e^{i\theta'}) = (rr')e^{i(\theta+\theta')}.$$

Esta forma también es conveniente para expresar **potencias** y **raices**,

$$\textbf{potencia}: \quad \Rightarrow \quad z^n = r^n e^{in\theta},$$

$$\textbf{raíz}: \quad \Rightarrow \quad z^{1/n} = r^{1/n}e^{i\theta/n} = r^{1/n}e^{i(\theta+2m\pi)/n} \quad \forall \quad m \in \mathbb{Z},$$

Lo anterior da lugar al **teorema de Moivre**,

$$e^{in\theta} = \mathsf{Cos}n\theta + i\mathsf{Sen}n\theta = (\mathsf{Cos}\theta + i\mathsf{Sen}\theta)^n.$$

Las funciones trigonométricas también hacen uso de esta descripción,

$$\mathsf{Cos}\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}, \qquad \mathsf{Sen}\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i},$$

$$\mathsf{Cosh}\theta = \frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}, \qquad \mathsf{Senh}\theta = \frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2}.$$

$$\mathsf{Cosh}iz = \mathsf{Cos}z, \qquad \mathsf{Senh}iz = i\mathsf{Sen}z.$$

Usando la descripción en polares describimos al **logaritmo**,

$$\ln z = \ln re^{i\theta} = \ln r + i\theta,$$
$$\ln z = \ln\left(re^{i(\theta+2\pi m)}\right) = \ln r + i(\theta + 2\pi m).$$

Funciones

Una función f en el campo de los complejos se define como,

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \rightarrow & f(z), \end{array}$$

y en el caso de que los argumentos de z sean a su vez funciones,

$$\Rightarrow \quad f(z) = u(x,y) + iv(x,y),$$

$$\begin{array}{rccc} u,v: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \rightarrow & u(x,y),\ v(x,y). \end{array}$$

Contenido: Tema 05

Condiciones de Cauchy-Riemann

Derivada de una función compleja

La **derivada** de una función compleja $f(z)$ se define como,

$$\lim_{\delta z \to 0} \frac{f(z+\delta z) - f(z)}{(z+\delta z) - z} = \lim_{\delta z \to 0} \frac{\delta f(z)}{\delta z} = \frac{df}{dz} = f'(z),$$

en donde el límite es **idependiente** de la manera de acercarse a z.

Para encontrar que restricciones impone esto en $f(z)$ consideremos,

$$\begin{aligned} z = x + iy \ &\rightarrow \ \ \delta z = \delta x + i\delta y, \\ f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \ &\rightarrow \ \ \delta f(z) = \delta u + i\delta v, \end{aligned}$$

relacionando,

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \frac{\delta f(z)}{\delta z} &= \frac{\delta u + i\delta v}{\delta x + i\delta y}, \\ \therefore \quad \frac{df}{dz} &= \lim_{\delta z \to 0} \frac{\delta f(z)}{\delta z} = \lim_{\delta z \to 0} \frac{\delta u + i\delta v}{\delta x + i\delta y}. \end{aligned}$$

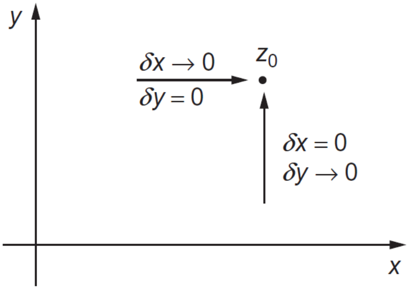
Condiciones de Cauchy-Riemann

Definición de las condiciones

De la relación anterior,

$$\lim_{\delta z \to 0} \frac{\delta f}{\delta z} = \lim_{\delta z \to 0} \frac{\delta u + i\delta v}{\delta x + i\delta y},$$

tomemos dos enfoques diferentes,



$\delta y = 0$:

$$\lim_{\delta z \to 0} \frac{\delta f}{\delta z} = \lim_{\delta x \to 0} \left(\frac{\delta u}{\delta x} + i \frac{\delta v}{\delta x} \right), \\ = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

$\delta x = 0$:

$$\lim_{\delta z \to 0} \frac{\delta f}{\delta z} = \lim_{\delta y \to 0} \left(\frac{\delta u}{i\delta y} + \frac{\delta v}{\delta y} \right), \\ = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Condiciones de Cauchy-Riemann

Definición y regiones

Si df/dz existe $\Rightarrow$ los resultados anteriores deben ser **idénticos**,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\therefore \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \& \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

lo cual se conoce como **condiciones de Cauchy-Riemann**, y también se pueden expresar en polares,

$$r\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \& \quad r\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Que $f(z)$ sea **diferenciable** conlleva a definir en que región lo es,

- Si lo es en cierta región del plano complejo $\Rightarrow$ se dice que $f(z)$ es **analítica** en esa región.
- Si $f'(z)$ **no existe** en $z = z_0$, pero es analítica en **al menos** un punto de cualquier vecindad de z_0, entonces z_0 es una **singularidad** de $f(z)$.
- Si $f'(z)$ **no existe** en $z = z_0$, pero es analítica en **toda** vecindad de z_0, entonces z_0 es una **singularidad aislada**.

Funciones armónicas

Si $u(x,y)$ y $v(x,y)$ satisfacen las ecs. de Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x},$$

sumando tenemos,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

de manera análoga para $v(x,y)$. Por tanto, cada función, u y v, satisface la **ecuación de Laplace**.

Gradiente

Si realizamos lo siguiente,

$$\frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y},$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x},$$

restando: $$\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0,$$
$$\Rightarrow \quad \nabla u \cdot \nabla v = 0,$$

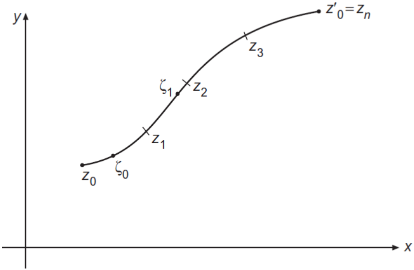
$\therefore\ u(x,y) = c_1$ y $v(x,y) = c_2$ son $\perp$ en los puntos de intersección.

Contenido: Tema 05

Teorema y fórmula integral de Cauchy

Integrales de contorno

Las integrales en variable compleja son realizadas en un camino del plano complejo, conocido como **contorno** C.



Considerando la suma,

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(z_j - z_{j-1}),$$

$$\forall \quad z_{j-1} \leq \xi_j \leq z_j,$$

y haciendo $n \to \infty$ con $|z_j - z_{j-1}| \to 0$, asegurando además que el $\lim_{n\to\infty} S_n$ **existe**, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(z_j - z_{j-1})$$

$$= \int_{z_0}^{z_0'} f(z)dz = \int_C f(z)dz,$$

resultado que se conoce como la **integral de contorno** de $f(z)$.

La **integral de contorno** se puede calcular también en función de sus partes **real** e **imaginaria**,

$$\begin{aligned}\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz &= \int_{x_1,y_1}^{x_2,y_2} \left[u(x,y)+iv(x,y)\right]\left[dx+idy\right], \\ &= \int_{x_1,y_1}^{x_2,y_2} \left[u(x,y)dx - v(x,y)dy\right] + \ldots \\ &\ldots + i\int_{x_1,y_1}^{x_2,y_2} \left[v(x,y)dx + u(x,y)dy\right].\end{aligned}$$

De igual manera, se puede definir la integral para contornos **paramétricos**: $C = \{z(t) \mid t \in [a,b]\}$,

$$\Rightarrow \quad \int_C f(z)dz = \int_a^b f\left[z(t)\right] z'(t)dt \quad \forall \quad z'(t) = \frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}.$$

Teorema

Si $f(z)$ es una función **analítica** en todos los puntos de una región **simplemente conectada** en el plano complejo, y si C es un contorno **cerrado** dentro de esa región, entonces

$$\oint_C f(z)dz = 0.$$

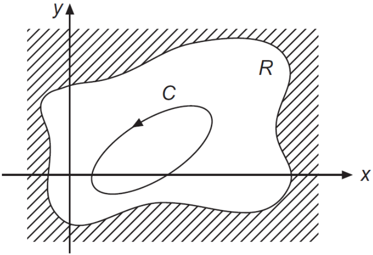
Algunas aclaraciones al respecto:

- La condición de que $f(z)$ sea **analítica** no es necesaria, demostrado por el teorema de **Cauchy-Goursat**.
- Una región es **simplemente conectada** si toda curva cerrada dentro de ella se puede reducir continuamente hasta un punto que pertenezca también a dicha región.
- Finalmente, el **contorno** no puede ubicarse en la frontera de la región, ya que C debe estar **dentro** de la región.

Teorema y fórmula integral de Cauchy

Demostración del teorema integral de Cauchy

Consideremos al contorno C^1 simplemente conectado en la región R donde $f(z)$ es analítica,



$$\oint_C f(z)dz = \oint_C (u+iv)(dx+idy),$$
$$= \oint_C (udx - vdy) + \dots$$
$$\dots + i\oint_C (vdx+udy).$$

Recordando el teorema de Stokes: $\oint_l \mathbf{V}\cdot d\mathbf{r} = \int_S (\nabla\times\mathbf{V})\cdot d\boldsymbol{\sigma},$

$\Rightarrow$ en 2D: $\oint_l (V_x dx + V_y dy) = \int_S \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) dxdy.$

[1] se considera el sentido de la integral como aquel en el cual el área encerrada queda a la izquierda del contorno mismo.

Demostración del teorema integral de Cauchy

Con Stokes en 2D,

$$\oint_l (V_x dx + V_y dy) = \int_S \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) dxdy,$$

identificamos términos en la integral de contorno,

$$\mathbb{R}\mathsf{e}\left\{ \oint_C f(z)dz \right\} = \oint_C (udx - vdy) = \int_S \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy,$$

$$\mathbb{I}\mathsf{m}\left\{ \oint_C f(z)dz \right\} = \oint_C (vdx + udy) = \int_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy.$$

Pero al ser $f(z)$ analítica, cumple con las **condiciones de Cauchy**:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

entonces ambas integrales se cancelan, por tanto obtenemos,

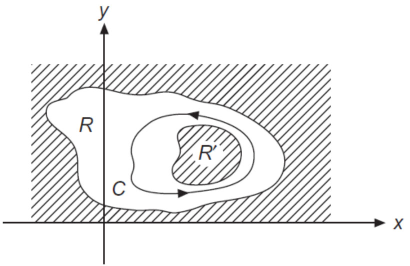
$$\oint_C f(z)dz = \mathbb{R}\mathsf{e}\left\{ \oint_C f(z)dz \right\} + i\mathbb{I}\mathsf{m}\left\{ \oint_C f(z)dz \right\} = 0.$$

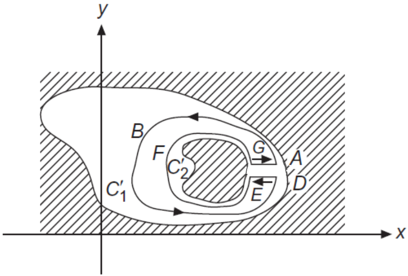
lo que demuestra el **teorema de Cauchy**.

Teorema y fórmula integral de Cauchy

Regiones multiplemente conectadas

Hay casos donde no se posible definir una R simplemente conectada,





ya que no es posible reducir C de tal manera que colapse en un punto de R.

Por tanto, se utiliza un nuevo contorno formado por C_1' y C_2' que defina una región **multiplemente conectada**.

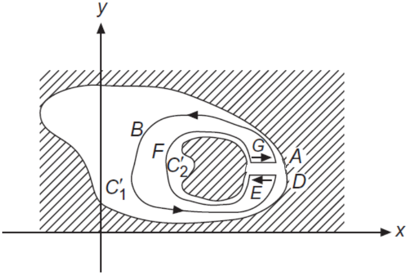
Se tiene que GA y DE pueden ser tan cercanos como se desee, además:

$$\int_G^A f(z)dz = -\int_D^E f(z)dz.$$

Teorema y fórmula integral de Cauchy

Regiones multiplemente conectadas

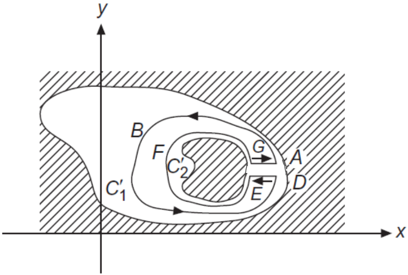
Invocando el **teorema de Cauchy** para esta nueva R conectada por C',



$$\oint_{C'} f(z)dz = \int_{ABD} f(z)dz + \ldots$$
$$\ldots + \int_{EFG} f(z)dz,$$
$$= 0.$$

Lo anterior se cumple, tomando en cuenta las sig. consideraciones,

- A y D; y E y G están **infinitesimalmente** separados, respectivamente.
- $f(z)$ es **continua** a través de la barrera.
- Por tanto, el camino $ABD \to ABDA$ (contorno cerrado), así como el camino $EFG \to EFGE$ (contorno cerrado).



Renombrando $ABDA \to C_1'$ y $EFGE \to -C_2'$ tenemos,

$$\therefore \quad \oint_{C_1'} f(z)dz = \oint_{C_2'} f(z)dz,$$

donde C_1' y C_2' siguen la convención de sentido postivo.

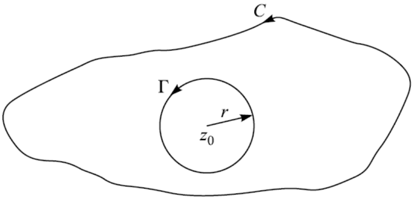
Por tanto, podemos declarar,

Principio del teorema integral de Cauchy

La integral de una función analítica sobre una trayectoria cerrada tiene un valor **inalterable** sobre todas las posibles deformaciones continuas del contorno dentro de la región donde es analítica.

Analizemos la siguiente integral,

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$



y consideremos ahora un contorno menor Γ centrado en z_0 y radio r,

$$\Rightarrow \quad \oint_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$

lo anterior debido al **teorema integral de Cauchy**.

Ahora,

$$z - z_0 = re^{i\theta} \quad \forall \quad 0 \leq \theta < 2\pi,$$
$$\Rightarrow \quad dz = ire^{i\theta} d\theta,$$

sustituyendo en la integral de Γ,

$$\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta}) ire^{i\theta}}{re^{i\theta}} d\theta,$$
$$= i \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

Del resultado anterior,

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = i\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})d\theta,$$

se toma el límite cuando $r \to 0$,

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz &= \lim_{r\to 0}\int_0^{2\pi} if(z_0+re^{i\theta})d\theta,\\ &= i\int_0^{2\pi} f(z_0)d\theta = 2\pi i f(z_0).\end{aligned}$$

Por tanto se obtiene:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz \;{}^{2} \quad \forall \quad f(z) \textbf{ analítica},$$

lo cual se conoce como la **fórmula integral de Cauchy**.

[2] donde z_0 se encuentra dentro de C.

La **fórmula integral de Cauchy** puede ser usada para expresar derivadas de órdenes mayores,

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}} \quad \forall \quad f(z) \text{ analítica,}$$

lo cual indica que si $f(z)$ es **analítica** $\Rightarrow$ todas las derivadas de todos los órdenes también lo son.

Finalmente, se tiene el **inverso del teorema de Cauchy**,

Teorema de Morera

Si $f(z)$ es continua en una región R simplemente conectada y el teorema de Cauchy es válido para todo contorno cerrado C, entonces $f(z)$ es analítica en R.

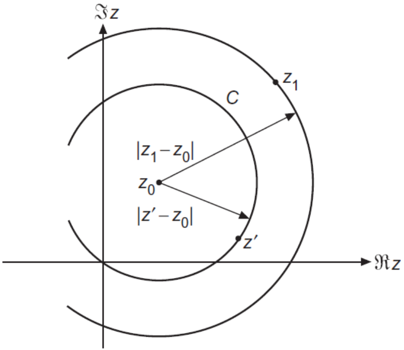
Contenido: Tema 05

Expansión de Laurent

Expansión de Taylor

Una de las aplicaciones de la **fórmula integral de Cauchy** es la obtención de la **serie de Taylor** de $f(z)$ alrededor de $z = z_0$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z')}{z' - z} dz',$$



donde,

- z' es un punto **en** C,
- z es un punto cualquiera **dentro** de C,
- $z = z_1$ es la **singularidad** más cercana a $z = z_0$.

Reescribiendo la integral de Cauchy,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z')}{z' - z} dz' = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z') dz'}{(z' - z_0) - (z - z_0)}.$$

Reescribiendo,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z')}{z'-z}dz' = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z')dz'}{(z'-z_0)-(z-z_0)},$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z')dz'}{(z'-z_0)\left[1-(z-z_0)/(z'-z_0)\right]}.$$

Observando vemos que el denominador tiene la siguiente forma,

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \ldots = \sum_n^{\infty} t^n \quad \forall \quad |t| < 1,$$

ya que tenemos para un punto z **interior** a C,

$$|z - z_0| < |z' - z_0|.$$

Entonces,

$$\frac{1}{1-(z-z_0)/(z'-z_0)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{z'-z_0}\right)^n.$$

Expansión de Laurent

Expansión de Taylor

Sustituyendo en la expresión de la integral de Cauchy,

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z')dz'}{(z'-z_0)\left[1-(z-z_0)/(z'-z_0)\right]}, \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(z')dz'}{z'-z_0}\,\frac{(z-z_0)^n}{(z'-z_0)^n}, \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n f(z')dz'}{(z'-z_0)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z')dz'}{(z'-z_0)^{n+1}},
\end{aligned}
$$

pero sabemos,

$$
f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z')dz'}{(z'-z_0)^{n+1}},
$$

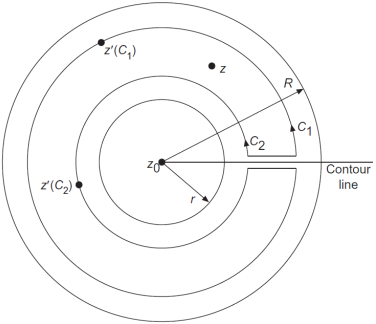
$$
\Rightarrow \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \quad \leftarrow \quad \textbf{serie de Taylor},
$$

donde $|z_1 - z_0|$ es el **círculo** o **radio de convergencia**.

Para el caso de funciones analíticas en regiones **multiplemente conectadas**, como las anulares, aún podemos hallar una expresión de $f(z)$ aplicando integrales de Cauchy,

Condiciones

- región anular definida por r y R ($r < R$),
- C_1 y C_2 tienen radios r_1 y r_2, respectivamente, con $r < r_2 < r_1 < R$, centrados en z_0.



Aplicando la **fórmula integral de Cauchy** para un z dentro de esta región,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z')dz'}{z' - z} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z')dz'}{z' - z}.$$

Expansión de Laurent

Serie de Laurent

Haciendo el mismo tratamiento que en Taylor,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(z')dz'}{(z'-z_0)-(z-z_0)} - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(z')dz'}{(z'-z_0)-(z-z_0)},$$

en donde ahora,

$$C_1 : \ |z'-z_0| > |z-z_0|, \quad C_2 : \ |z'-z_0| < |z-z_0|,$$

por tanto,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(z')dz'}{(z'-z_0)\left[1-(z-z_0)/(z'-z_0)\right]} + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(z')dz'}{(z-z_0)\left[1-(z'-z_0)/(z-z_0)\right]}$$

en donde observamos que en los denominadores podemos aplicar:

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \quad \forall \quad |t| < 1.$$

Sustituyendo la expansión del denominador en $f(z)$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left[\oint_{C_1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(z')dz'}{(z'-z_0)}\frac{(z-z_0)^n}{(z'-z_0)^n} + \oint_{C_2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(z')dz'}{(z-z_0)}\frac{(z'-z_0)^n}{(z-z_0)^n}\right],$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\oint_{C_1}\frac{f(z')dz'}{(z'-z_0)^{n+1}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^{-n-1}\oint_{C_2}\frac{f(z')dz'}{(z'-z_0)^{-n}},$$

corriendo el índice en C_2 como $n \to m-1$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\oint_{C_1}\frac{f(z')dz'}{(z'-z_0)^{n+1}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{2\pi i}\sum_{m=1}^{\infty}(z-z_0)^{-m}\oint_{C_2}\frac{f(z')dz'}{(z'-z_0)^{-m+1}}.$$

Expansión de Laurent

Serie de Laurent

Del resultado anterior,

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n \oint_{C_1}\frac{f(z')dz'}{(z'-z_0)^{n+1}} + \ldots \\
&\ldots + \frac{1}{2\pi i}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(z-z_0)^m}\oint_{C_2}\frac{f(z')dz'}{(z'-z_0)^{-m+1}}, \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n},
\end{aligned}
$$
[3]

lo cual se conoce como la **serie de Laurent**, que involucra tanto potencias **positivas** como **negativas**, y cuyos coeficientes son:

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(z')dz'}{(z'-z_0)^{n+1}} \quad \forall \;\; n = 0, 1, 2, \ldots \\
b_n &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(z')dz'}{(z'-z_0)^{-n+1}} \quad \forall \;\; n = 1, 2, \ldots
\end{aligned}
$$

[3] $m \to n$ ya que es un índice mudo.

Expansión de Laurent

Serie de Laurent

Se puede expresar la **serie de Laurent** de otra forma equivalente, haciendo $n \to -n$ en C_2,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n \oint_{C_1}\frac{f(z')dz'}{(z'-z_0)^{n+1}} + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}(z-z_0)^{-n} \oint_{C_2}\frac{f(z')dz'}{(z'-z_0)^{-n+1}},$$

$$\Rightarrow \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n \oint_{C_1}\frac{f(z')dz'}{(z'-z_0)^{n+1}} + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{-1}(z-z_0)^{n} \oint_{C_2}\frac{f(z')dz'}{(z'-z_0)^{n+1}},$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \;\; \forall \;\; c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C}\frac{f(z')dz'}{(z'-z_0)^{n+1}},$$

en donde la región de integración es $r_2 < |z-z_0| < r_1$ y $n \in \mathbb{Z}$.

Contenido: Tema 05

Residuos y polos

Residuos

Consideremos que deseamos calcular la integral de $f(z)$, la cual es analítica en la vecindad de un punto $z = z_0$, y donde el **polo** más cercano es z_1, **fuera** del C. Entonces, por el **teorema integral de Cauchy**:

$$\oint_C f(z)dz = 0.$$

Ahora, si $f(z)$ tiene un **polo** en $z = z_0$ que se encuentra **dentro** de la región limitada por $C \Rightarrow$ la integral ya no será **cero**.

Para calcular la integral, expresemos $f(z)$ en términos de una **serie de Laurent**,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n},$$

en donde,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z')dz'}{(z' - z_0)^{n+1}}, \quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z')dz'}{(z' - z_0)^{-n+1}}.$$

Para la parte de la serie con potencias **negativas**, observemos el caso de $n = 1$,[4]

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(z')dz'}{(z'-z_0)^{-n+1}}, \\ \Rightarrow \quad b_1 &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(z')dz'}{(z'-z_0)^{0}} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} f(z')dz', \\ \therefore \quad 2\pi i b_1 &= \oint_{C_2} f(z')dz'. \end{aligned}$$

Por tanto, para calcular la integral de $f(z)$ en una región con un **polo** en z_0, basta obtener el **residuo** b_1 de $f(z)$ en z_0:

$$b_1 = \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z).$$

[4] para $n > 1$ la integral se anula por el t. integral de Cauchy $\therefore\ b_n = 0\ \forall\ n > 1$

El **residuo** de $f(z)$ se puede obtener de tres maneras:

1) De la serie de Laurent directamente, tomando el coeficiente de z^{-1}.
2) Mediante límites de $f(z)$.
3) Expresando $f(z) = p(z)/q(z)$.

Método de límites

Si $f(z)$ tiene un polo en $z = z_0$, entonces la serie de Laurent es,

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}, \\
&= a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots \\
&\quad \dots + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \frac{b_3}{(z - z_0)^3} + \dots
\end{aligned}
$$

Residuos y polos

Cálculo de residuos: método de límites

Examinando de la serie,

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^n f(z),$$

encontramos el n más pequeño para el cual el límite **existe**, es decir es **finito** $\Rightarrow$ el orden del polo en $z-z_0$ es n.

En el caso de un polo de orden uno, o **polo simple**, tenemos,

$$\begin{aligned} f(z) &= a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \ldots + \frac{b_1}{z-z_0}, \\ (z-z_0)f(z) &= a_0(z-z_0) + a_1(z-z_0)^2 + \ldots + b_1, \\ \Rightarrow \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) &= b_1, \end{aligned}$$

por tanto, se tiene:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = b_1 = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z),$$

cuando $z-z_0$ es un **polo simple** de $f(z)$.

Residuos y polos

Cálculo de residuos: método de límites

Para el caso de polos de orden **mayor a uno** $(m > 1)$ en $z = z_0$, se realiza un análisis similar,

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \frac{b_3}{(z - z_0)^3} + \dots$$

$$\dots + \frac{b_{m-2}}{(z - z_0)^{m-2}} + \frac{b_{m-1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \frac{b_m}{(z - z_0)^m},$$

entonces, como $b_m \neq 0$, tenemos:

$$(z - z_0)^m f(z) = (z - z_0)^m \left[a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots\right] + \dots$$

$$\dots + b_1(z - z_0)^{m-1} + b_2(z - z_0)^{m-2} + \dots +$$

$$\dots + b_{m-2}(z - z_0)^2 + b_{m-1}(z - z_0) + b_m,$$

lo cual representa la **serie de Taylor** de $(z - z_0)^m f(z)$ alrededor de $z = z_0$.

Residuos y polos

Cálculo de residuos: método de límites

Reescribiendo la expresión anterior,

$$(z-z_0)^m f(z) = b_m + b_{m-1}(z-z_0) + b_{m-2}(z-z_0)^2 + \dots$$
$$\dots + b_2(z-z_0)^{m-2} + b_1(z-z_0)^{m-1} + \dots$$
$$\dots + (z-z_0)^m \left[a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots\right],$$

derivando ambos lados $(m-1)$ veces,

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right] = (m-1)!b_1 + m!a_0(z-z_0) + \dots$$

y tomando el límite cuando $z \to z_0$,

$$\lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right] = (m-1)!b_1,$$

por tanto,

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \left\{ \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right] \right\}.$$

Residuos y polos

Cálculo de residuos: $f(z) = p(z)/q(z)$

Analizando el caso cuando $f(z)$ se puede expresar de la forma $f(z) = p(z)/q(z)$ y se cumplen las siguientes condiciones:

- $p(z)$ y $q(z)$ son **analíticas** en $z = z_0$, $p(z) \neq 0$, y $q(z_0) = 0$,

para ellos, expandiendo $q(z)$ en Taylor,

$$q(z) = q(z_0) + (z - z_0)q'(z_0) + \frac{(z - z_0)^2}{2!}q''(z_0) + \dots$$

y calculando lo siguiente,

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z) &= \lim_{z\to z_0}(z - z_0)\frac{p(z)}{q(z)}, \\
&= \lim_{z\to z_0}\frac{(z - z_0)p(z)}{(z - z_0)q'(z_0) + (z - z_0)^2 q''(z_0)/2! + \dots}, \\
&= \lim_{z\to z_0}\frac{p(z)}{q'(z_0) + (z - z_0)q''(z_0)/2! + \dots} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)},
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

Residuos y polos

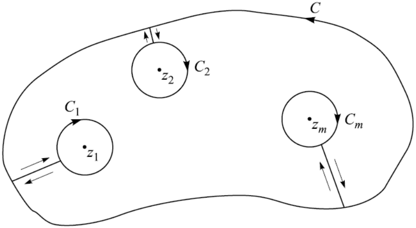
Teorema del residuo

Consideremos un contorno C que encierra varias **singularidades** o **polos** aislados de $f(z)$,

y generemos una región multiplemente conectada, aislando los polos fuera de R tal que

$$\oint_{C'} f(z)dz = 0,$$

donde C' es la resultante de la suma de los contornos.



Expandiendo la integral en C',

$$\oint_{C} f(z)dz - \oint_{C_1} f(z)dz - \oint_{C_2} f(z)dz - \ldots - \oint_{C_m} f(z)dz = 0,$$

$$\Rightarrow \quad \oint_{C} f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz + \ldots + \oint_{C_m} f(z)dz.$$

Residuos y polos

Teorema del residuo

Sin embargo, sabemos que las integrales en los contornos $C_i \;\; \forall \;\; i = 1, 2, \ldots m$ son los **residuos** de $f(z)$ para los diferentes **polos** aislados en R, por tanto, tenemos el siguiente teorema:

Teorema del residuo

Si $f(z)$ es analítica dentro de una región limitada por C, excepto en un número finito de puntos singulares o polos $z_1, z_2, \ldots, z_m$ en el interior de C, entonces,

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z) = 2\pi i (b_{1,1} + b_{1,2} + \ldots + b_{1,m})$$

donde $b_{1,j}$ es el residuo de $f(z)$ en el polo z_j.