Contenido

Contenido: Tema 06

Contenido: Tema 06

Función Gamma

Definiciones: Límite infinito

La **función gamma** se define como,

$$\Gamma(z) \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} n^z \quad \forall \quad z \neq 0, -1, -2, -3, \ldots$$

Función Gamma

Definiciones: Límite infinito

La **función gamma** se define como,

$$\Gamma(z) \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} n^z \quad \forall \quad z \neq 0, -1, -2, -3, \ldots$$

Una relación funcional básica de la función Γ es,

$$\Gamma(z+1) = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{(z+1)(z+2)(z+3)\cdots(z+n+1)} n^{z+1},$$

Función Gamma

Definiciones: Límite infinito

La **función gamma** se define como,

$$\Gamma(z) \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} n^z \quad \forall \quad z \neq 0, -1, -2, -3, \ldots$$

Una relación funcional básica de la función Γ es,

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{(z+1)(z+2)(z+3)\cdots(z+n+1)} n^{z+1}, \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{nz}{z+n+1}\cdot \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} n^z,
\end{aligned}$$

Función Gamma

Definiciones: Límite infinito

La **función gamma** se define como,

$$\Gamma(z) \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} n^z \quad \forall \quad z \neq 0, -1, -2, -3, \ldots$$

Una relación funcional básica de la función Γ es,

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{(z+1)(z+2)(z+3)\cdots(z+n+1)} n^{z+1}, \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{nz}{z+n+1} \cdot \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} n^z, \\
&= z\Gamma(z).
\end{aligned}$$

Función Gamma

Definiciones: Límite infinito

La **función gamma** se define como,

$$\Gamma(z) \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} n^z \quad \forall \quad z \neq 0, -1, -2, -3, \dots$$

Una relación funcional básica de la función Γ es,

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{(z+1)(z+2)(z+3)\cdots(z+n+1)} n^{z+1}, \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{nz}{z+n+1} \cdot \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} n^z, \\
&= z\Gamma(z).
\end{aligned}$$

De la definición obtenemos,

$$\Gamma(1) = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n\cdot(n+1)} n,$$

Función Gamma

Definiciones: Límite infinito

La **función gamma** se define como,

$$\Gamma(z) \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} n^z \quad \forall \quad z \neq 0, -1, -2, -3, \ldots$$

Una relación funcional básica de la función Γ es,

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{(z+1)(z+2)(z+3)\cdots(z+n+1)} n^{z+1}, \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{nz}{z+n+1} \cdot \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} n^z, \\
&= z\Gamma(z).
\end{aligned}$$

De la definición obtenemos,

$$\begin{aligned}
\Gamma(1) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n\cdot(n+1)} n, \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1,
\end{aligned}$$

Función Gamma

Definiciones: Límite infinito

La **función gamma** se define como,

$$\Gamma(z) \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} n^z \quad \forall \quad z \neq 0, -1, -2, -3, \ldots$$

Una relación funcional básica de la función Γ es,

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{(z+1)(z+2)(z+3)\cdots(z+n+1)} n^{z+1}, \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{nz}{z+n+1} \cdot \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} n^z, \\
&= z\Gamma(z).
\end{aligned}$$

De la definición obtenemos,

$$\begin{aligned}
\Gamma(1) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n\cdot(n+1)} n, \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1,
\end{aligned}$$

por tanto,

$$\begin{aligned}
\Gamma(2) &= 1\Gamma(1) = 1, \\
\Gamma(3) &= 2\Gamma(2) = 2,
\end{aligned}$$

Función Gamma

Definiciones: Límite infinito

La **función gamma** se define como,

$$\Gamma(z) \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} n^z \quad \forall \quad z \neq 0, -1, -2, -3, \ldots$$

Una relación funcional básica de la función Γ es,

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{(z+1)(z+2)(z+3)\cdots(z+n+1)} n^{z+1}, \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{nz}{z+n+1} \cdot \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} n^z, \\
&= z\Gamma(z).
\end{aligned}$$

De la definición obtenemos,

$$\begin{aligned}
\Gamma(1) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n\cdot(n+1)} n, \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1,
\end{aligned}$$

por tanto,

$$\begin{aligned}
\Gamma(2) &= 1\Gamma(1) = 1, \\
\Gamma(3) &= 2\Gamma(2) = 2, \\
\Gamma(4) &= 3\Gamma(3) = 3\cdot 2,
\end{aligned}$$

Función Gamma

Definiciones: Límite infinito

La **función gamma** se define como,

$$\Gamma(z) \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} n^z \quad \forall \quad z \neq 0, -1, -2, -3, \ldots$$

Una relación funcional básica de la función Γ es,

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{(z+1)(z+2)(z+3)\cdots(z+n+1)} n^{z+1}, \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{nz}{z+n+1} \cdot \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} n^z, \\ &= z\Gamma(z).\end{aligned}$$

De la definición obtenemos,

$$\begin{aligned}\Gamma(1) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n\cdot(n+1)} n, \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1,\end{aligned}$$

por tanto,

$$\begin{aligned}\Gamma(2) &= 1\Gamma(1) = 1, \\ \Gamma(3) &= 2\Gamma(2) = 2, \\ \Gamma(4) &= 3\Gamma(3) = 3\cdot 2, \\ \Rightarrow \quad \Gamma(n) &= (n-1)!\end{aligned}$$

Función Gamma

Definiciones y relaciones: integral definida

La **integral definida** para la función gamma viene dada como,

$$\Gamma(z) \equiv \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \forall \quad \mathbb{R}\mathrm{e}\{z\} > 0.$$

Función Gamma

Definiciones y relaciones: integral definida

La **integral definida** para la función gamma viene dada como,

$$\Gamma(z) \equiv \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \forall \quad \mathbb{R}\mathrm{e}\{z\} > 0.$$

También se pueden utilizar las siguientes definiciones alternas,

$$\Gamma(z) = 2\int_0^\infty e^{-t^2} t^{2z-1} dt, \quad \text{ó} \quad \Gamma(z) = \int_0^1 \left[\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right]^{z-1} dt.$$

Función Gamma

Definiciones y relaciones: integral definida

La **integral definida** para la función gamma viene dada como,

$$\Gamma(z) \equiv \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \forall \quad \mathbb{R}\mathrm{e}\{z\} > 0.$$

También se pueden utilizar las siguientes definiciones alternas,

$$\Gamma(z) = 2\int_0^\infty e^{-t^2} t^{2z-1} dt, \quad \text{ó} \quad \Gamma(z) = \int_0^1 \left[\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right]^{z-1} dt.$$

Analizando el caso de $z = 1/2$,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

Función Gamma

Definiciones y relaciones: integral definida

La **integral definida** para la función gamma viene dada como,

$$\Gamma(z) \equiv \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \forall \quad \mathbb{R}\mathrm{e}\{z\} > 0.$$

También se pueden utilizar las siguientes definiciones alternas,

$$\Gamma(z) = 2\int_0^\infty e^{-t^2} t^{2z-1} dt, \quad \text{ó} \quad \Gamma(z) = \int_0^1 \left[\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right]^{z-1} dt.$$

Analizando el caso de $z = 1/2$,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

Algunas fórmulas de relación son las siguientes,

Función Gamma

Definiciones y relaciones: integral definida

La **integral definida** para la función gamma viene dada como,

$$\Gamma(z) \equiv \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \forall \ \mathbb{R}\mathrm{e}\{z\} > 0.$$

También se pueden utilizar las siguientes definiciones alternas,

$$\Gamma(z) = 2\int_0^\infty e^{-t^2} t^{2z-1} dt, \quad \text{ó} \quad \Gamma(z) = \int_0^1 \left[\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right]^{z-1} dt.$$

Analizando el caso de $z = 1/2$,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

Algunas fórmulas de relación son las siguientes,

Fórmula de reflexión $\Rightarrow \ \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\mathrm{Sen}\ z\pi},$

Función Gamma

Definiciones y relaciones: integral definida

La **integral definida** para la función gamma viene dada como,

$$\Gamma(z) \equiv \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \forall \ \mathbb{R}\text{e}\{z\} > 0.$$

También se pueden utilizar las siguientes definiciones alternas,

$$\Gamma(z) = 2\int_0^\infty e^{-t^2} t^{2z-1} dt, \quad \text{ó} \quad \Gamma(z) = \int_0^1 \left[\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right]^{z-1} dt.$$

Analizando el caso de $z = 1/2$,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

Algunas fórmulas de relación son las siguientes,

$$\textbf{Fórmula de reflexión} \ \Rightarrow \ \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\text{Sen}\, z\pi},$$

$$\textbf{Duplicación de Legendre} \ \Rightarrow \ \Gamma(z+1)\Gamma\left(z+{}^1/_2\right) = 2^{-2z}\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z+1),$$

Función Gamma

Definiciones y relaciones: integral definida

La **integral definida** para la función gamma viene dada como,

$$\Gamma(z) \equiv \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \forall \ \mathbb{R}\mathrm{e}\{z\} > 0.$$

También se pueden utilizar las siguientes definiciones alternas,

$$\Gamma(z) = 2\int_0^\infty e^{-t^2} t^{2z-1} dt, \quad \text{ó} \quad \Gamma(z) = \int_0^1 \left[\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right]^{z-1} dt.$$

Analizando el caso de $z = 1/2$,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

Algunas fórmulas de relación son las siguientes,

Fórmula de reflexión $\Rightarrow \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\text{Sen } z\pi},$

Duplicación de Legendre $\Rightarrow \Gamma(z+1)\Gamma\left(z + {}^1\!/_2\right) = 2^{-2z}\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z+1),$

en donde la fórmula de reflexión se utiliza para conectar valores de $\Gamma(z)$, cuando z es un **no−entero**, mediante $\Gamma(1/2)$.

Función Gamma

Función digamma

Para poder calcular la derivada de la función Γ, analizamos lo siguiente,

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} n^z,$$

Función Gamma

Función digamma

Para poder calcular la derivada de la función Γ, analizamos lo siguiente,

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} n^z,$$

ahora aplicando el logaritmo,

$$\ln\Gamma(z+1) = \lim_{n\to\infty} \left[\ln(n!) + z\ln n - \ln(z+1) - \ln(z+2) - \cdots - \ln(z+n)\right]$$

Para poder calcular la derivada de la función Γ, analizamos lo siguiente,

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} n^z,$$

ahora aplicando el logaritmo,

$$\ln\Gamma(z+1) = \lim_{n\to\infty}\left[\ln(n!) + z\ln n - \ln(z+1) - \ln(z+2) - \cdots - \ln(z+n)\right]$$

Diferenciando lo anterior respecto a z,

$$\frac{d}{dz}\ln\Gamma(z+1) = \lim_{n\to\infty}\left[\ln n - \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2} - \cdots - \frac{1}{z+n}\right],$$

Función Gamma

Función digamma

Para poder calcular la derivada de la función Γ, analizamos lo siguiente,

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} n^z,$$

ahora aplicando el logaritmo,

$$\ln\Gamma(z+1) = \lim_{n\to\infty} \left[\ln(n!) + z\ln n - \ln(z+1) - \ln(z+2) - \cdots - \ln(z+n)\right]$$

Diferenciando lo anterior respecto a z,

$$\frac{d}{dz}\ln\Gamma(z+1) = \lim_{n\to\infty} \left[\ln n - \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2} - \cdots - \frac{1}{z+n}\right],$$

en donde lo obtenido define una nueva función,

$$\psi(z+1) = \frac{d}{dz}\ln\Gamma(z+1) = \frac{[\Gamma(z+1)]'}{\Gamma(z+1)}$$

Función Gamma

Función digamma

Para poder calcular la derivada de la función Γ, analizamos lo siguiente,

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} n^z,$$

ahora aplicando el logaritmo,

$$\ln\Gamma(z{+}1) = \lim_{n\to\infty} \left[\ln(n!) + z\ln n - \ln(z+1) - \ln(z+2) - \cdots - \ln(z+n)\right]$$

Diferenciando lo anterior respecto a z,

$$\frac{d}{dz}\ln\Gamma(z+1) = \lim_{n\to\infty}\left[\ln n - \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2} - \cdots - \frac{1}{z+n}\right],$$

en donde lo obtenido define una nueva función,

$$\psi(z+1) = \frac{d}{dz}\ln\Gamma(z+1) = \frac{[\Gamma(z+1)]'}{\Gamma(z+1)}$$

que se conoce como la **función digamma**.

Función Gamma

Función poligamma

La función Γ puede ser derivada repetidas veces, dando lugar a la **función poligama**,

$$\psi(z+1) = \frac{d}{dz}\ln\Gamma(z+1),$$

Función Gamma

Función poligamma

La función Γ puede ser derivada repetidas veces, dando lugar a la **función poligama**,

$$\psi(z+1) = \frac{d}{dz}\ln\Gamma(z+1),$$

$$\Rightarrow \quad \psi^{(m)}(z+1) \equiv \frac{d^{m+1}}{dz^{m+1}}\ln\Gamma(z+1),$$

Función Gamma

Función poligamma

La función Γ puede ser derivada repetidas veces, dando lugar a la **función poligama**,

$$\psi(z+1) = \frac{d}{dz}\ln\Gamma(z+1),$$

$$\Rightarrow \quad \psi^{(m)}(z+1) \equiv \frac{d^{m+1}}{dz^{m+1}}\ln\Gamma(z+1),$$

$$= (-1)^{m+1} m! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^{m+1}} \quad \forall \quad m = 1, 2, 3, \ldots .$$

La función Γ puede ser derivada repetidas veces, dando lugar a la **función poligama**,

$$\psi(z+1) = \frac{d}{dz}\ln\Gamma(z+1),$$

$$\Rightarrow \quad \psi^{(m)}(z+1) \equiv \frac{d^{m+1}}{dz^{m+1}}\ln\Gamma(z+1),$$

$$= (-1)^{m+1} m! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^{m+1}} \quad \forall \quad m = 1, 2, 3, \ldots.$$

Si tenemos el caso de $z = 0$, entonces la serie de la ecuación anterior se reduce a la función **zeta de Riemann**,

$$\zeta(m) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^m},$$

La función Γ puede ser derivada repetidas veces, dando lugar a la **función poligama**,

$$\psi(z+1) = \frac{d}{dz}\ln\Gamma(z+1),$$

$$\Rightarrow \quad \psi^{(m)}(z+1) \equiv \frac{d^{m+1}}{dz^{m+1}}\ln\Gamma(z+1),$$

$$= (-1)^{m+1}m!\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^{m+1}} \quad \forall \quad m = 1, 2, 3, \ldots .$$

Si tenemos el caso de $z = 0$, entonces la serie de la ecuación anterior se reduce a la función **zeta de Riemann**,

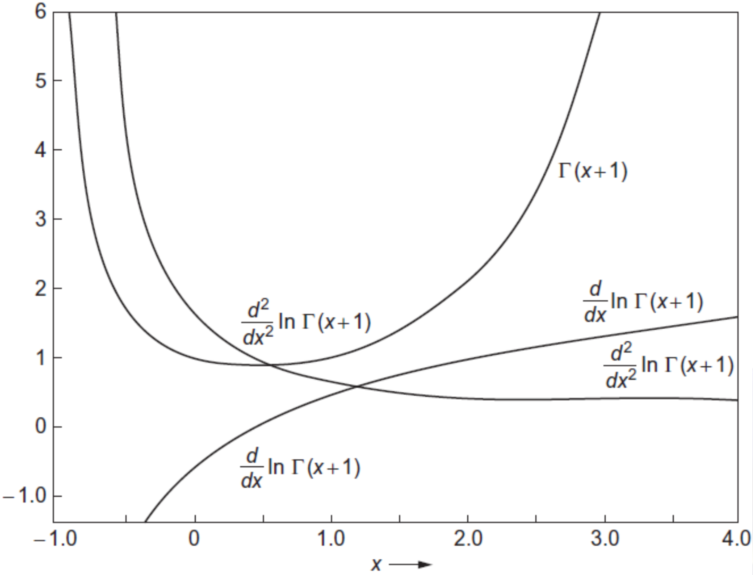
$$\zeta(m) \equiv \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^m},$$

teniendo por tanto,

$$\psi^{(m)}(1) = (-1)^{m+1}m!\zeta(m+1) \quad \forall \quad m = 1, 2, 3, \ldots .$$

Función Gamma

Funciones gamma, digamma y poligamma



Contenido: Tema 06

Polinomios y series de Legendre

Ecuación de Legendre

La ecuación diferencial de **Legendre** tiene la siguiente forma,

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + \nu(\nu+1)y = 0 \quad \forall \quad \nu = \text{cte.} > 0,$$

Polinomios y series de Legendre

Ecuación de Legendre

La ecuación diferencial de **Legendre** tiene la siguiente forma,

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + \nu(\nu+1)y = 0 \quad \forall \ \ \nu = \text{cte.} > 0,$$

si la reescribimos como sigue:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2x}{1-x^2}\frac{dy}{dx} + \frac{\nu(\nu+1)}{1-x^2}y = 0,$$

La ecuación diferencial de **Legendre** tiene la siguiente forma,

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + \nu(\nu+1)y = 0 \quad \forall \;\; \nu = \text{cte.} > 0,$$

si la reescribimos como sigue:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2x}{1-x^2}\frac{dy}{dx} + \frac{\nu(\nu+1)}{1-x^2}y = 0,$$

observamos que $x = 0$ es un **punto ordinario**, por tanto, podemos proponer la solución como,

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m,$$

La ecuación diferencial de **Legendre** tiene la siguiente forma,

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + \nu(\nu+1)y = 0 \quad \forall \;\; \nu = \text{cte.} > 0,$$

si la reescribimos como sigue:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2x}{1-x^2}\frac{dy}{dx} + \frac{\nu(\nu+1)}{1-x^2}y = 0,$$

observamos que $x = 0$ es un **punto ordinario**, por tanto, podemos proponer la solución como,

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m,$$

$\Rightarrow$ sustituyéndola en la ec. diferencial y haciendo $k = \nu(\nu+1)$:

$$\sum_{m=0}^{\infty} m(m-1)a_m x^{m-2} + \sum_{m=0}^{\infty} \left[k - m(m+1)\right] a_m x^m = 0.$$

Polinomios y series de Legendre

Solución de la ecuación de Legendre: coeficientes

De la relación anterior, si agrupamos los coeficientes por potencias iguales, llegamos a la siguiente **ecuación de recurrencia**,

$$a_{m+2} = -\frac{k - m(m+1)}{(m+1)(m+2)} a_m = -\frac{(\nu - m)(\nu + m + 1)}{(m+1)(m+2)} a_m .$$

Polinomios y series de Legendre

Solución de la ecuación de Legendre: coeficientes

De la relación anterior, si agrupamos los coeficientes por potencias iguales, llegamos a la siguiente **ecuación de recurrencia**,

$$a_{m+2} = -\frac{k - m(m+1)}{(m+1)(m+2)} a_m = -\frac{(\nu - m)(\nu + m + 1)}{(m+1)(m+2)} a_m.$$

Observamos que, cuando $\nu = n \in \mathbb{Z}^+$, habrá un punto donde la serie termine, es decir, sea **finita**, debido a al factor $(\nu - m)$, obteniendo un polinomio de orden n como expansión.

Polinomios y series de Legendre

Solución de la ecuación de Legendre: coeficientes

De la relación anterior, si agrupamos los coeficientes por potencias iguales, llegamos a la siguiente **ecuación de recurrencia**,

$$a_{m+2} = -\frac{k - m(m+1)}{(m+1)(m+2)} a_m = -\frac{(\nu - m)(\nu + m + 1)}{(m+1)(m+2)} a_m .$$

Observamos que, cuando $\nu = n \in \mathbb{Z}^+$, habrá un punto donde la serie termine, es decir, sea **finita**, debido a al factor $(\nu - m)$, obteniendo un polinomio de orden n como expansión.

Haciendo $\nu = n$ y corriendo los índices,

$$a_{m+2} = -\frac{(n-m)(m+n+1)}{(m+1)(m+2)} a_m ,$$

Polinomios y series de Legendre

Solución de la ecuación de Legendre: coeficientes

De la relación anterior, si agrupamos los coeficientes por potencias iguales, llegamos a la siguiente **ecuación de recurrencia**,

$$a_{m+2} = -\frac{k - m(m+1)}{(m+1)(m+2)} a_m = -\frac{(\nu - m)(\nu + m + 1)}{(m+1)(m+2)} a_m.$$

Observamos que, cuando $\nu = n \in \mathbb{Z}^+$, habrá un punto donde la serie termine, es decir, sea **finita**, debido a al factor $(\nu - m)$, obteniendo un polinomio de orden n como expansión.

Haciendo $\nu = n$ y corriendo los índices,

$$a_{m+2} = -\frac{(n - m)(m + n + 1)}{(m+1)(m+2)} a_m,$$

$$m = 0: \quad a_2 = -\frac{n(n+1)}{2!} a_0,$$

Polinomios y series de Legendre

Solución de la ecuación de Legendre: coeficientes

De la relación anterior, si agrupamos los coeficientes por potencias iguales, llegamos a la siguiente **ecuación de recurrencia**,

$$a_{m+2} = -\frac{k - m(m+1)}{(m+1)(m+2)} a_m = -\frac{(\nu - m)(\nu + m + 1)}{(m+1)(m+2)} a_m.$$

Observamos que, cuando $\nu = n \in \mathbb{Z}^+$, habrá un punto donde la serie termine, es decir, sea **finita**, debido a al factor $(\nu - m)$, obteniendo un polinomio de orden n como expansión.

Haciendo $\nu = n$ y corriendo los índices,

$$\begin{aligned} a_{m+2} &= -\frac{(n-m)(m+n+1)}{(m+1)(m+2)} a_m, \\ m = 0: \quad a_2 &= -\frac{n(n+1)}{2!} a_0, \\ m = 1: \quad a_3 &= -\frac{(n-1)(n+2)}{3!} a_1, \end{aligned}$$

continuando,

$$m = 2: \quad a_4 = \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!} a_0,$$

Polinomios y series de Legendre

Solución de la ecuación de Legendre: coeficientes

continuando,

$$m = 2: \quad a_4 = \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!} a_0,$$

$$m = 3: \quad a_5 = -\frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!} a_1,$$

Polinomios y series de Legendre

Solución de la ecuación de Legendre: coeficientes

continuando,

$$
\begin{aligned}
m = 2: &\quad a_4 = \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}a_0, \\
m = 3: &\quad a_5 = -\frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}a_1, \\
m = 4: &\quad a_6 = -\frac{(n-4)(n-2)n(n+1)(n+3)(n+5)}{6!}a_0, \\
\vdots \quad & \quad \vdots \quad \vdots
\end{aligned}
$$

Polinomios y series de Legendre

Solución de la ecuación de Legendre: coeficientes

continuando,

$$
\begin{aligned}
m = 2: &\quad a_4 = \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}a_0, \\
m = 3: &\quad a_5 = -\frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}a_1, \\
m = 4: &\quad a_6 = -\frac{(n-4)(n-2)n(n+1)(n+3)(n+5)}{6!}a_0, \\
&\quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
m = n: &\quad a_{n+2} = -\frac{(n-n)(2n-1)}{(n+1)(n+2)}a_n = 0,
\end{aligned}
$$

continuando,

$$m=2: \quad a_4 = \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}a_0,$$

$$m=3: \quad a_5 = -\frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}a_1,$$

$$m=4: \quad a_6 = -\frac{(n-4)(n-2)n(n+1)(n+3)(n+5)}{6!}a_0,$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$m=n: \quad a_{n+2} = -\frac{(n-n)(2n-1)}{(n+1)(n+2)}a_n = 0,$$

por tanto, la serie **termina** cuando $m=n$, dando un polinomio de orden n como solución.

Polinomios y series de Legendre

Solución de la ecuación de Legendre: coeficientes

continuando,

$$m = 2: \quad a_4 = \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}a_0,$$

$$m = 3: \quad a_5 = -\frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}a_1,$$

$$m = 4: \quad a_6 = -\frac{(n-4)(n-2)n(n+1)(n+3)(n+5)}{6!}a_0,$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$m = n: \quad a_{n+2} = -\frac{(n-n)(2n-1)}{(n+1)(n+2)}a_n = 0,$$

por tanto, la serie **termina** cuando $m = n$, dando un polinomio de orden n como solución.

Analizando por tanto el último término de la serie a_n,

Polinomios y series de Legendre

Solución de la ecuación de Legendre: coeficientes

continuando,

$$m=2: \quad a_4 = \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}a_0,$$

$$m=3: \quad a_5 = -\frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}a_1,$$

$$m=4: \quad a_6 = -\frac{(n-4)(n-2)n(n+1)(n+3)(n+5)}{6!}a_0,$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$m=n: \quad a_{n+2} = -\frac{(n-n)(2n-1)}{(n+1)(n+2)}a_n = 0,$$

por tanto, la serie **termina** cuando $m=n$, dando un polinomio de orden n como solución.

Analizando por tanto el último término de la serie a_n,

$$m=n-2: \quad a_n = -\frac{2(2n-1)}{(n-1)n}a_{n-2}$$

continuando,

$$m = 2: \quad a_4 = \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}a_0,$$

$$m = 3: \quad a_5 = -\frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}a_1,$$

$$m = 4: \quad a_6 = -\frac{(n-4)(n-2)n(n+1)(n+3)(n+5)}{6!}a_0,$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$m = n: \quad a_{n+2} = -\frac{(n-n)(2n-1)}{(n+1)(n+2)}a_n = 0,$$

por tanto, la serie **termina** cuando $m = n$, dando un polinomio de orden n como solución.

Analizando por tanto el último término de la serie a_n,

$$m = n-2: \quad a_n = -\frac{2(2n-1)}{(n-1)n}a_{n-2} \quad \Rightarrow \quad a_{n-2} = -\frac{(n-1)n}{2(2n-1)}a_n.$$

Polinomios y series de Legendre

Solución de la ecuación de Legendre: coeficientes

Del resultado anterior,

$$a_{n-2} = -\frac{(n-1)n}{2(2n-1)}a_n,$$

Polinomios y series de Legendre

Solución de la ecuación de Legendre: coeficientes

Del resultado anterior,

$$a_{n-2} = -\frac{(n-1)n}{2(2n-1)}a_n,$$

tenemos que los coeficientes dependerán del valor a_n, el cual es arbitrario, por tanto se toma la siguiente convención para fijar su valor:

Polinomios y series de Legendre

Solución de la ecuación de Legendre: coeficientes

Del resultado anterior,

$$a_{n-2} = -\frac{(n-1)n}{2(2n-1)} a_n,$$

tenemos que los coeficientes dependerán del valor a_n, el cual es arbitrario, por tanto se toma la siguiente convención para fijar su valor:

$$a_0 = 1,$$

Solución de la ecuación de Legendre: coeficientes

Del resultado anterior,

$$a_{n-2} = -\frac{(n-1)n}{2(2n-1)}a_n,$$

tenemos que los coeficientes dependerán del valor a_n, el cual es arbitrario, por tanto se toma la siguiente convención para fijar su valor:

$$a_0 = 1, \quad P_n(x=1) = 1.$$

Del resultado anterior,

$$a_{n-2} = -\frac{(n-1)n}{2(2n-1)}a_n,$$

tenemos que los coeficientes dependerán del valor a_n, el cual es arbitrario, por tanto se toma la siguiente convención para fijar su valor:

$$a_0 = 1, \quad P_n(x=1) = 1.$$

Con estas consideraciones, se tiene que el valor para a_n es,

$$a_n = \frac{(2n!)}{2^n(n!)^2}.$$

Polinomios y series de Legendre

Solución de la ecuación de Legendre: coeficientes

Del resultado anterior,

$$a_{n-2} = -\frac{(n-1)n}{2(2n-1)}a_n,$$

tenemos que los coeficientes dependerán del valor a_n, el cual es arbitrario, por tanto se toma la siguiente convención para fijar su valor:

$$a_0 = 1, \quad P_n(x=1) = 1.$$

Con estas consideraciones, se tiene que el valor para a_n es,

$$a_n = \frac{(2n!)}{2^n(n!)^2}.$$

Corriendo índices,

Solución de la ecuación de Legendre: coeficientes

Del resultado anterior,

$$a_{n-2} = -\frac{(n-1)n}{2(2n-1)}a_n,$$

tenemos que los coeficientes dependerán del valor a_n, el cual es arbitrario, por tanto se toma la siguiente convención para fijar su valor:

$$a_0 = 1, \quad P_n(x=1) = 1.$$

Con estas consideraciones, se tiene que el valor para a_n es,

$$a_n = \frac{(2n!)}{2^n(n!)^2}.$$

Corriendo índices,

$$a_m = -\frac{(m+1)(m+2)}{(n-m)(m+n+1)}a_{m+2},$$

Polinomios y series de Legendre

Solución de la ecuación de Legendre: coeficientes

Del resultado anterior,

$$a_{n-2} = -\frac{(n-1)n}{2(2n-1)}a_n,$$

tenemos que los coeficientes dependerán del valor a_n, el cual es arbitrario, por tanto se toma la siguiente convención para fijar su valor:

$$a_0 = 1, \quad P_n(x=1) = 1.$$

Con estas consideraciones, se tiene que el valor para a_n es,

$$a_n = \frac{(2n!)}{2^n (n!)^2}.$$

Corriendo índices,

$$a_m = -\frac{(m+1)(m+2)}{(n-m)(m+n+1)}a_{m+2},$$

$$m = n-2: \quad a_{n-2} = -\frac{(n-1)n}{2(2n-1)}a_n = -\frac{(2n-2)!}{2^n (n-2)!(n-1)!}.$$

continuando,

$$m = n - 4: \quad a_{n-4} = -\frac{(n-3)(n-2)}{4(2n-3)} a_{n-2} = \frac{(2n-2\cdot 2)!}{2!2^n(n-2)!(n-4)!},$$

continuando,

$$m = n - 4: \quad a_{n-4} = -\frac{(n-3)(n-2)}{4(2n-3)} a_{n-2} = \frac{(2n - 2\cdot 2)!}{2!2^n(n-2)!(n-4)!},$$

generalizando los resultados anteriores,

$$a_{n-2j} = \frac{(-1)^j (2n-2j)!}{2^n j!(n-j)!(n-2j)!}.$$

continuando,

$$m = n-4: \quad a_{n-4} = -\frac{(n-3)(n-2)}{4(2n-3)}a_{n-2} = \frac{(2n-2\cdot 2)!}{2!2^n(n-2)!(n-4)!},$$

generalizando los resultados anteriores,

$$a_{n-2j} = \frac{(-1)^j(2n-2j)!}{2^n j!(n-j)!(n-2j)!}.$$

Sust. lo anterior en la expresión de la solución general propuesta,

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = \sum_{j=0}^{\infty} a_{n-2j}x^{n-2j} = \sum_{j=0}^{M} \frac{(-1)^j(2n-2j)!}{2^n j!(n-j)!(n-2j)!}x^{n-2j}$$

continuando,

$$m = n-4: \quad a_{n-4} = -\frac{(n-3)(n-2)}{4(2n-3)} a_{n-2} = \frac{(2n-2\cdot 2)!}{2!2^n(n-2)!(n-4)!},$$

generalizando los resultados anteriores,

$$a_{n-2j} = \frac{(-1)^j(2n-2j)!}{2^n j!(n-j)!(n-2j)!}.$$

Sust. lo anterior en la expresión de la solución general propuesta,

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = \sum_{j=0}^{\infty} a_{n-2j} x^{n-2j} = \sum_{j=0}^{M} \frac{(-1)^j(2n-2j)!}{2^n j!(n-j)!(n-2j)!} x^{n-2j}$$

obtenemos los **polinomios de Legendre**, en donde $M = n/2$ para n **par**, y $M = (n-1)/2$ para n **impar**.

De la expresión anterior analizamos algunos casos específicos,

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{M} \frac{(-1)^j (2n-2j)!}{2^n j!(n-j)!(n-2j)!} x^{n-2j}$$

De la expresión anterior analizamos algunos casos específicos,

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{M} \frac{(-1)^j (2n-2j)!}{2^n j!(n-j)!(n-2j)!} x^{n-2j}$$

$$P_0(x) = 1,$$

Polinomios y series de Legendre

Polinomios de Legendre

De la expresión anterior analizamos algunos casos específicos,

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{M} \frac{(-1)^j (2n-2j)!}{2^n j!(n-j)!(n-2j)!} x^{n-2j}$$

$$P_0(x) = 1,$$
$$P_1(x) = x,$$

Polinomios y series de Legendre

Polinomios de Legendre

De la expresión anterior analizamos algunos casos específicos,

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{M} \frac{(-1)^j (2n-2j)!}{2^n j!(n-j)!(n-2j)!} x^{n-2j}$$

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_1(x) &= x, \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right), \end{aligned}$$

Polinomios y series de Legendre

Polinomios de Legendre

De la expresión anterior analizamos algunos casos específicos,

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{M} \frac{(-1)^j (2n-2j)!}{2^n j!(n-j)!(n-2j)!} x^{n-2j}$$

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1, \\
P_1(x) &= x, \\
P_2(x) &= \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right), \\
P_3(x) &= \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right),
\end{aligned}$$

Polinomios y series de Legendre

Polinomios de Legendre

De la expresión anterior analizamos algunos casos específicos,

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{M} \frac{(-1)^j (2n-2j)!}{2^n j!(n-j)!(n-2j)!} x^{n-2j}$$

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1, \\
P_1(x) &= x, \\
P_2(x) &= \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right), \\
P_3(x) &= \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right), \\
P_4(x) &= \frac{1}{8}\left(35x^4 - 30x^2 + 3\right),
\end{aligned}$$

De la expresión anterior analizamos algunos casos específicos,

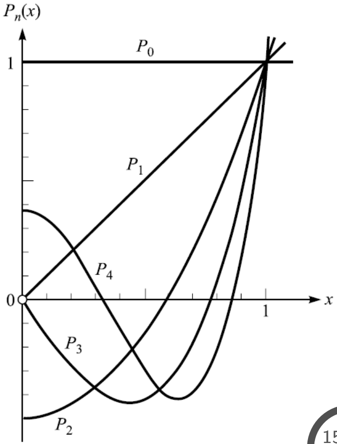
$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{M} \frac{(-1)^j (2n-2j)!}{2^n j!(n-j)!(n-2j)!} x^{n-2j}$$

$$P_0(x) = 1,$$
$$P_1(x) = x,$$
$$P_2(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right),$$
$$P_3(x) = \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right),$$
$$P_4(x) = \frac{1}{8}\left(35x^4 - 30x^2 + 3\right),$$
$$P_5(x) = \frac{1}{8}\left(63x^5 - 70x^3 + 15x\right).$$

De la expresión anterior analizamos algunos casos específicos,

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{M} \frac{(-1)^j(2n-2j)!}{2^n j!(n-j)!(n-2j)!} x^{n-2j}$$

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1, \\
P_1(x) &= x, \\
P_2(x) &= \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right), \\
P_3(x) &= \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right), \\
P_4(x) &= \frac{1}{8}\left(35x^4 - 30x^2 + 3\right), \\
P_5(x) &= \frac{1}{8}\left(63x^5 - 70x^3 + 15x\right).
\end{aligned}$$



Polinomios y series de Legendre

Fórmula de Rodrigues y función generadora

La **fórmula de Rodrigues** viene dada como,

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n.$$

y sirve para calcular los polinomios de Legendre, $P_n(x)$, sin la necesidad de expander la serie para sus n términos.

La **fórmula de Rodrigues** viene dada como,

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

y sirve para calcular los polinomios de Legendre, $P_n(x)$, sin la necesidad de expander la serie para sus n términos.

Por otro lado, los polinomios $P_n(x)$ representan a los coeficientes de z^n en la expansión de $\Phi(x,z)$, conocida como la función **generadora**,

$$\Phi(x,z) = (1-2xz+z^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n \quad \forall \quad |z|<1.$$

La **fórmula de Rodrigues** viene dada como,

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

y sirve para calcular los polinomios de Legendre, $P_n(x)$, sin la necesidad de expander la serie para sus n términos.

Por otro lado, los polinomios $P_n(x)$ representan a los coeficientes de z^n en la expansión de $\Phi(x,z)$, conocida como la función **generadora**,

$$\Phi(x,z) = (1-2xz+z^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n \quad \forall \quad |z|<1.$$

De $\Phi(x,z)$ podemos obtener fórmulas de **recurrencia** derivando respecto a z,

$$\frac{\partial\Phi(x,z)}{\partial z} = \frac{x-z}{(1-2xz+z^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x) z^{n-1},$$

Polinomios y series de Legendre

Función generadora y relaciones de recurrencia

De lo anterior,

$$\frac{\partial \Phi(x,z)}{\partial z} = \frac{x-z}{(1-2xz+z^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(x) z^{n-1},$$

De lo anterior,

$$\frac{\partial \Phi(x,z)}{\partial z} = \frac{x-z}{(1-2xz+z^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)z^{n-1},$$

rearreglando términos,

$$(x-z)(1-2xz+z^2)^{-1/2} = (1-2xz+z^2)\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)z^{n-1},$$

Polinomios y series de Legendre

Función generadora y relaciones de recurrencia

De lo anterior,

$$\frac{\partial \Phi(x,z)}{\partial z} = \frac{x-z}{(1-2xz+z^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)z^{n-1},$$

rearreglando términos,

$$(x-z)(1-2xz+z^2)^{-1/2} = (1-2xz+z^2)\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)z^{n-1},$$

pero,

$$(1-2xz+z^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)z^n,$$

De lo anterior,

$$\frac{\partial\Phi(x,z)}{\partial z} = \frac{x-z}{(1-2xz+z^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)z^{n-1},$$

rearreglando términos,

$$(x-z)(1-2xz+z^2)^{-1/2} = (1-2xz+z^2)\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)z^{n-1},$$

pero,

$$(1-2xz+z^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)z^n,$$

entonces, relacionando

$$(1-2xz+z^2)\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)z^{n-1} + (z-x)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)z^n = 0.$$

Polinomios y series de Legendre

Relaciones de recurrencia

Multiplicando y reagrupando series similares de la expresión anterior,

$$\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)z^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)xP_n(x)z^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_n(x)z^{n+1} = 0$$

Relaciones de recurrencia

Multiplicando y reagrupando series similares de la expresión anterior,

$$\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)z^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)xP_n(x)z^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_n(x)z^{n+1} = 0$$

de lo cual expandemos y agrupamos coeficientes de las potencias z^n, obteniendo así:

$$(2n+1)xP_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x) \quad \forall \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Polinomios y series de Legendre

Relaciones de recurrencia

Multiplicando y reagrupando series similares de la expresión anterior,

$$\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)z^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)xP_n(x)z^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_n(x)z^{n+1} = 0$$

de lo cual expandemos y agrupamos coeficientes de las potencias z^n, obteniendo así:

$$(2n+1)xP_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x) \ \ \forall \ \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Lo anterior nos permite generar **sucesivos** P_n's de los valores iniciales de $P_0 = 1$ y $P_1 = x$, por ejemplo:

Polinomios y series de Legendre

Relaciones de recurrencia

Multiplicando y reagrupando series similares de la expresión anterior,

$$\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)z^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)xP_n(x)z^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_n(x)z^{n+1} = 0$$

de lo cual expandemos y agrupamos coeficientes de las potencias z^n, obteniendo así:

$$(2n+1)xP_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x) \quad \forall \;\; n = 1, 2, 3, \ldots$$

Lo anterior nos permite generar **sucesivos** P_n's de los valores iniciales de $P_0 = 1$ y $P_1 = x$, por ejemplo:

$$n = 1: \quad 3xP_1(x) = 2P_2(x) + P_0 \quad \rightarrow \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

Polinomios y series de Legendre

Relaciones de recurrencia

Multiplicando y reagrupando series similares de la expresión anterior,

$$\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)z^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)xP_n(x)z^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_n(x)z^{n+1} = 0$$

de lo cual expandemos y agrupamos coeficientes de las potencias z^n, obteniendo así:

$$(2n+1)xP_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x) \quad \forall \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Lo anterior nos permite generar **sucesivos** P_n's de los valores iniciales de $P_0 = 1$ y $P_1 = x$, por ejemplo:

$$n = 1 : \quad 3xP_1(x) = 2P_2(x) + P_0 \quad \rightarrow \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

$$n = 2 : \quad 5xP_2(x) = 3P_3(x) + 2P_1 \quad \rightarrow \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x).$$

Otro tipo de relación de recurrencia puede ser obtenida derivando a la función generadora respecto x,

$$\frac{\partial \Phi(x,z)}{\partial x} = \frac{z}{(1-2xz+z^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x) z^n,$$

Polinomios y series de Legendre

Relaciones de recurrencia

Otro tipo de relación de recurrencia puede ser obtenida derivando a la función generadora respecto x,

$$\frac{\partial \Phi(x,z)}{\partial x} = \frac{z}{(1-2xz+z^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x) z^n,$$

$$\Rightarrow \quad z(1-2xz+z^2)^{-1/2} = (1-2xz+z^2)\sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x) z^n,$$

Otro tipo de relación de recurrencia puede ser obtenida derivando a la función generadora respecto x,

$$\frac{\partial \Phi(x,z)}{\partial x} = \frac{z}{(1-2xz+z^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x) z^n,$$

$$\Rightarrow \quad z(1-2xz+z^2)^{-1/2} = (1-2xz+z^2)\sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x) z^n,$$

$$\therefore \quad (1-2xz+z^2)\sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x) z^n - z\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n = 0.$$

Polinomios y series de Legendre

Relaciones de recurrencia

Otro tipo de relación de recurrencia puede ser obtenida derivando a la función generadora respecto x,

$$\frac{\partial \Phi(x,z)}{\partial x} = \frac{z}{(1-2xz+z^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x) z^n,$$

$$\Rightarrow \quad z(1-2xz+z^2)^{-1/2} = (1-2xz+z^2) \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x) z^n,$$

$$\therefore \quad (1-2xz+z^2) \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x) z^n - z \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n = 0.$$

Realizando los productos y agrupando sumatorias tenemos,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x) z^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} \left[2xP_n'(x) + P_n(x)\right] z^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x) z^n = 0,$$

Otro tipo de relación de recurrencia puede ser obtenida derivando a la función generadora respecto x,

$$\frac{\partial \Phi(x,z)}{\partial x} = \frac{z}{(1-2xz+z^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x) z^n,$$

$$\Rightarrow \quad z(1-2xz+z^2)^{-1/2} = (1-2xz+z^2) \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x) z^n,$$

$$\therefore \quad (1-2xz+z^2) \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x) z^n - z \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n = 0.$$

Realizando los productos y agrupando sumatorias tenemos,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x) z^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} \left[2xP_n'(x) + P_n(x) \right] z^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x) z^n = 0,$$

expandiendo y agrupando coeficientes del término z^{n+1},

$$P_{n+1}'(x) + P_{n-1}'(x) = 2xP_n'(x) + P_n(x).$$

Polinomios y series de Legendre

Relaciones de recurrencia

Otra ecuación útil se obtiene diferenciando respecto a x la primera relación de recurrencia obtenida,

$$(2n+1)xP_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x),$$

Polinomios y series de Legendre

Relaciones de recurrencia

Otra ecuación útil se obtiene diferenciando respecto a x la primera relación de recurrencia obtenida,

$$\begin{aligned} (2n+1)xP_n(x) &= (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x), \\ (2n+1)P_n(x) + (2n+1)xP_n'(x) &= (n+1)P_{n+1}'(x) + nP_{n-1}'(x), \end{aligned}$$

Otra ecuación útil se obtiene diferenciando respecto a x la primera relación de recurrencia obtenida,

$$\begin{aligned}
(2n+1)xP_n(x) &= (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x), \\
(2n+1)P_n(x) + (2n+1)xP_n'(x) &= (n+1)P_{n+1}'(x) + nP_{n-1}'(x), \\
2(2n+1)P_n(x) + 2(2n+1)xP_n'(x) &= 2(n+1)P_{n+1}'(x) + 2nP_{n-1}'(x).
\end{aligned}$$

Otra ecuación útil se obtiene diferenciando respecto a x la primera relación de recurrencia obtenida,

$$\begin{aligned}(2n+1)xP_n(x) &= (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x),\\ (2n+1)P_n(x) + (2n+1)xP_n'(x) &= (n+1)P_{n+1}'(x) + nP_{n-1}'(x),\\ 2(2n+1)P_n(x) + 2(2n+1)xP_n'(x) &= 2(n+1)P_{n+1}'(x) + 2nP_{n-1}'(x).\end{aligned}$$

Ahora, si a la relación anterior es multiplicada por $(2n+1)$,

$$P_{n+1}'(x) + P_{n-1}'(x) = 2xP_n'(x) + P_n(x),$$

Polinomios y series de Legendre

Relaciones de recurrencia

Otra ecuación útil se obtiene diferenciando respecto a x la primera relación de recurrencia obtenida,

$$\begin{aligned}(2n+1)xP_n(x) &= (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x),\\ (2n+1)P_n(x) + (2n+1)xP_n'(x) &= (n+1)P_{n+1}'(x) + nP_{n-1}'(x),\\ 2(2n+1)P_n(x) + 2(2n+1)xP_n'(x) &= 2(n+1)P_{n+1}'(x) + 2nP_{n-1}'(x).\end{aligned}$$

Ahora, si a la relación anterior es multiplicada por $(2n+1)$,

$$\begin{aligned}P_{n+1}'(x) + P_{n-1}'(x) &= 2xP_n'(x) + P_n(x),\\ (2n+1)P_{n+1}'(x) + (2n+1)P_{n-1}'(x) &= 2(2n+1)xP_n'(x) + (2n+1)P_n(x)\end{aligned}$$

Otra ecuación útil se obtiene diferenciando respecto a x la primera relación de recurrencia obtenida,

$$\begin{aligned}
(2n+1)xP_n(x) &= (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x), \\
(2n+1)P_n(x) + (2n+1)xP_n'(x) &= (n+1)P_{n+1}'(x) + nP_{n-1}'(x), \\
2(2n+1)P_n(x) + 2(2n+1)xP_n'(x) &= 2(n+1)P_{n+1}'(x) + 2nP_{n-1}'(x).
\end{aligned}$$

Ahora, si a la relación anterior es multiplicada por $(2n+1)$,

$$\begin{aligned}
P_{n+1}'(x) + P_{n-1}'(x) &= 2xP_n'(x) + P_n(x), \\
(2n+1)P_{n+1}'(x) + (2n+1)P_{n-1}'(x) &= 2(2n+1)xP_n'(x) + (2n+1)P_n(x)
\end{aligned}$$

sumando ambos resultados previos nos queda una nueva relación de recurrencia,

$$(2n+1)P_n(x) = P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x).$$

Algunas otras relaciones de recurrencia importantes son las siguientes,

$$
\begin{aligned}
P'_{n+1}(x) &= (n+1)P_n(x) + xP'_n(x), \\
P'_{n-1}(x) &= -nP_n(x) + xP'_n(x), \\
(1-x^2)P'_n(x) &= nP_{n-1}(x) - nxP_n(x), \\
(1-x^2)P'_n(x) &= (n+1)xP_n(x) - (n+1)P'_{n+1}(x),
\end{aligned}
$$

las cuales se obtienen de las relaciones deducidas anteriormente, mediante manipulación algebráica.

Algunas otras relaciones de recurrencia importantes son las siguientes,

$$
\begin{aligned}
P'_{n+1}(x) &= (n+1)P_n(x) + xP'_n(x), \\
P'_{n-1}(x) &= -nP_n(x) + xP'_n(x), \\
(1-x^2)P'_n(x) &= nP_{n-1}(x) - nxP_n(x), \\
(1-x^2)P'_n(x) &= (n+1)xP_n(x) - (n+1)P'_{n+1}(x),
\end{aligned}
$$

las cuales se obtienen de las relaciones deducidas anteriormente, mediante manipulación algebráica.

El uso de una u otra relación de recurrencia dependerá de la información que se tiene a la mano, así como también la simplicidad de la aplicación de las mismas.