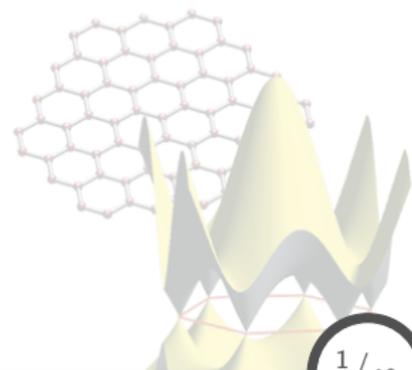
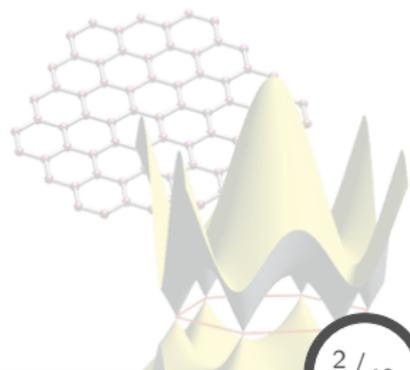


## 4. Modelo del gas de electrones libres



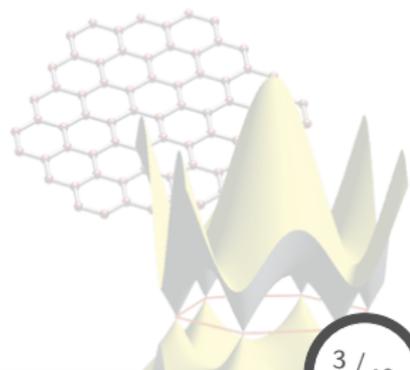
# Contenido: Tema 04

- 4. Modelo del gas de electrones libres
  - 4.1 Modelo del gas de Fermi
  - 4.2 Gas de electrones en tres dimensiones
  - 4.3 Capacidad calorífica, conductividad eléctrica y térmica del gas de electrones
  - 4.4 Movimiento en campos magnéticos: Efecto Hall



# Contenido: Tema 04

- 4. Modelo del gas de electrones libres
  - 4.1 Modelo del gas de Fermi
  - 4.2 Gas de electrones en tres dimensiones
  - 4.3 Capacidad calorífica, conductividad eléctrica y térmica del gas de electrones
  - 4.4 Movimiento en campos magnéticos: Efecto Hall



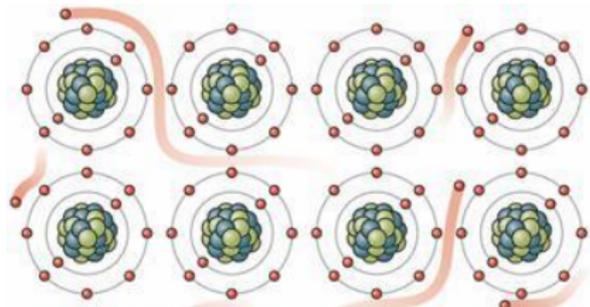


# Modelo del gas de Fermi

## Metales alcalinos y nobles

Los metales **alcalinos** y **nobles** poseen en las capas electrónicas más externas estados de **valencia** de simetría  $s$ .<sup>1</sup>

Considerando un cristal de Na,



Conf. elec.  $\Rightarrow 1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$ ,

Est. cristalina  $\Rightarrow$  bcc,

$$a_0 = 4.225 \text{ \AA},$$

$$R_{ion}(\text{Na}^+) = 0.98 \text{ \AA}.$$

Calculando la fracción de volumen ocupado por los iones,

$$V_{cell} = a_0^3 = 75.4 \text{ \AA}^3,$$

$$V_{ion} = 8\pi R_{ion}^3/3 = 7.88 \text{ \AA}^3,$$

$$\Rightarrow f_{ion} = \frac{V_{ion}}{V_{cell}} = 10.5\%,$$

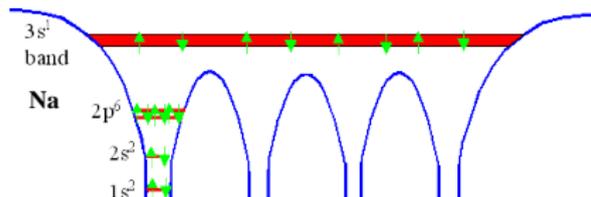
casi el **90%** del espacio es ocupado por la nube electrónica, donde en tales sistemas se llega a un **camino libre medio** de hasta  $10^8$  dist. interatómicas (aprox. 1cm).

<sup>1</sup>Aún los metales nobles, ya que tienen capas  $d$  llenas.

# Modelo del gas de Fermi

## Modelo del gas de electrones libres

### Potencial real



### Potencial modelo



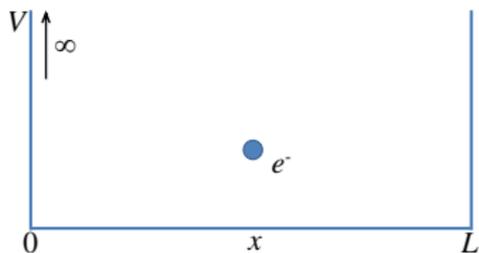
El modelo de **gas de electrones libres (gas de Fermi)** es el modelo más simple para describir un metal, y considera lo siguiente:

- El cristal contempla un número fijo de  $N$  iones positivos, considerados como carga de **background**.
- Se cuenta con  $M$  electrones, los cuales no interaccionan con los iones o entre ellos, moviéndose **libremente** por el cristal.
- Los electrones cumplen con el **principio de exclusión de Pauli**.

# Modelo del gas de Fermi

## Modelo del gas de electrones libres en una dimensión

Considerando en el **modelo del gas de electrones libres** un electrón  $e^-$  de masa  $m$ , en una caja de potencial unidimensional de longitud  $L$ , cuyas barreras son infinitas,



siendo la ec. de Schrödinger:

$$H\psi = \epsilon\psi \quad \forall \quad V = 0,$$

$$H = p^2/2m \quad \forall \quad p = -i\hbar\partial_x,$$

$$\therefore -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\psi = \epsilon\psi,$$

$$\text{con: } \psi = 0 \quad \forall \quad x = 0, L.$$

Resolviendo la ecuación anterior, se obtendrá la sig. información:

$$\psi_n \leftarrow \text{orbitales,}$$

$$\epsilon_n \leftarrow \text{energía de } \psi_n,$$

por tanto, la forma general de la ecuación es:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\psi_n(x) = \epsilon_n\psi_n(x).$$

# Modelo del gas de Fermi

## Modelo del gas de electrones libres en una dimensión

De la ecuación anterior,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \psi_n(x) = \epsilon_n \psi_n(x).$$

se obtiene como solución,

$$\psi_n(x) = A \text{Sen} \left( \frac{n\pi}{L} x \right) = A \text{Sen} \left( \frac{2\pi}{\lambda_n} x \right),$$

donde  $\lambda_n = 2L/n \rightarrow L = n\lambda_n/2$ .

arrojando el **espectro de energía**,

$$\epsilon_n = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 n^2,$$

siendo la ocupación de cada nivel de energía de **máximo** dos electrones.

Cada  $e^-$  está caracterizado por los sig. **núm. cuánticos**,

$n \rightarrow$  principal,

$m_s = \pm 1/2 \rightarrow$  magnético.

Por ejemplo, para un sist. de 6  $e^-$  el estado base será:

$n$	$m_s$	Ocp.	$n$	Total $e^-$
1	$\uparrow$	1	1	1
1	$\downarrow$	2	2	2
2	$\uparrow$	1	3	3
2	$\downarrow$	2	4	4
3	$\uparrow$	1	5	5
3	$\downarrow$	2	6	6

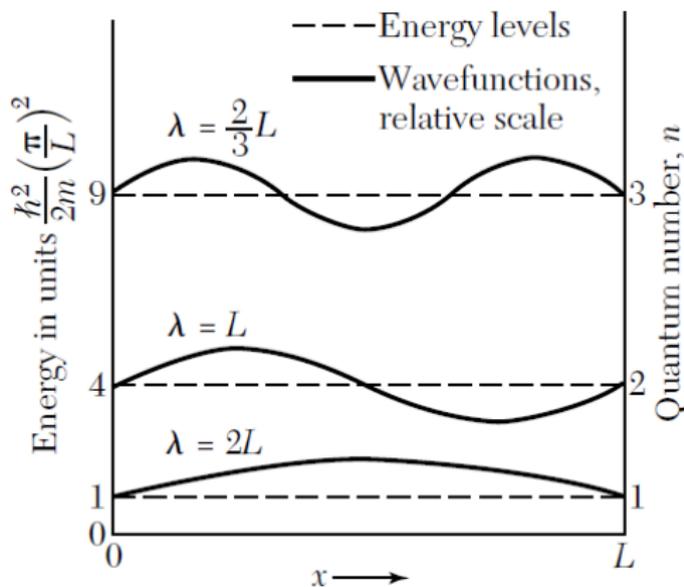
# Modelo del gas de Fermi

## Modelo del gas de electrones libres en una dimensión

Calculando los valores de energía para cada nivel,

$$E_n = \frac{\epsilon_n}{\hbar^2 \pi^2 / 2mL^2} = n^2,$$

$n$	$E_n$	$\lambda_n = 2L/n$
1	1	$2L$
2	4	$L$
3	9	$2L/3$
4	16	$L/2$



en donde  $E_1$  representa el estado de más **baja energía**, y  $\lambda_n$  la **longitud de onda** del orbital  $n$ .

# Modelo del gas de Fermi

Modelo del gas de electrones libres en una dimensión: Energía de Fermi

Denotando,

$n_F$  = nivel energético del **último** estado ocupado,

en donde se empiezan a poblar los niveles desde  $n = 1$  (siendo éste el nivel más bajo) hasta el total de  $N$  electrones, entonces  $2n_F = N$ .<sup>2</sup>

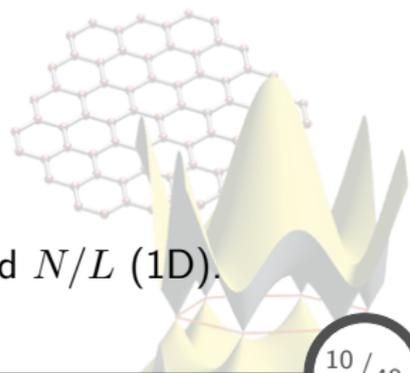
Por tanto, se define la **energía de Fermi**  $\epsilon_F$ , como la energía del **último** nivel ocupado ( $n_F$ ):

$$\begin{aligned}\epsilon_F &= \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 n_F^2, \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\pi N}{2L} \right)^2 \quad \forall T = 0.\end{aligned}$$

en donde se observa que  $\epsilon_F$  depende de la densidad  $N/L$  (1D).

---

<sup>2</sup>Considerando un número par de partículas  $N$ .



# Modelo del gas de Fermi

## Modelo del gas de electrones libres en una dimensión: Distribución Fermi-Dirac

Para tomar en cuenta los efectos de temperatura en la distribución de los niveles de energía, se considera la estadística de **Fermi-Dirac**, utilizando la siguiente función de distribución:

$$f(\epsilon) = \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)\beta} + 1} \quad \forall \quad \beta = \frac{1}{k_B T}.$$

**Distribución de Fermi-Dirac:** La probabilidad de que un orbital, a energía  $\epsilon$ , sea ocupado en un gas ideal de electrones en equilibrio térmico.

En tal distribución, se tienen las siguientes características:

### Potencial químico $\mu$

$$\text{si } f = 0.5 \Rightarrow \epsilon = \mu,$$
$$\lim_{T \rightarrow 0} \mu = \epsilon_F \quad \forall \quad \mu < \epsilon_F.$$

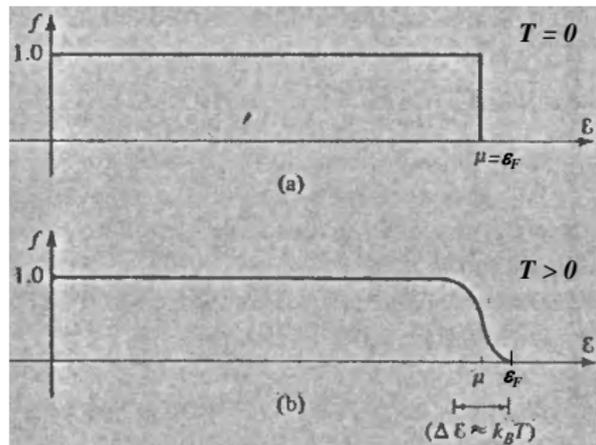
### Función de distribución

$$\lim_{T \rightarrow 0} f(\epsilon) = \begin{cases} 1 & \epsilon < \mu, \\ 0 & \epsilon > \mu. \end{cases}$$

# Modelo del gas de Fermi

Modelo del gas de electrones libres en una dimensión: Distribución Fermi-Dirac

Analizando el efecto de  $T$  en  $f(\epsilon)$ ,



se observa que **sólo** los electrones en un rango de energía  $\Delta \epsilon = k_B T$  podrán ser excitados.

Para cuantificar el efecto de  $T$ , se compara con la **temperatura de Fermi** de sistemas metálicos:

$$T_F = \frac{\epsilon_F}{k_B} \approx 10^4 \text{ K},$$

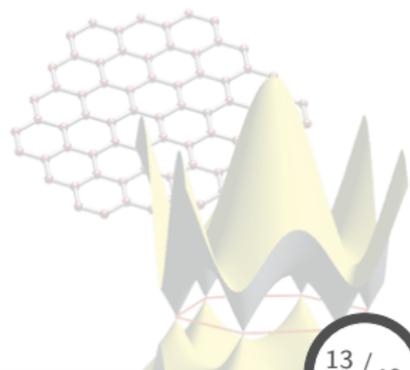
mientras que en condiciones de laboratorio se tiene  $T = 300 \text{ K}$ , por tanto el rango de energía de  $f(\epsilon)$  afectado por  $T$  es:

$$T_F \approx 10^4 \text{ K} \ \& \ T \approx 10^2 \text{ K},$$
$$\Rightarrow \Delta \epsilon / \epsilon_F = T / T_F = 10^{-2},$$

$\therefore$  sólo los  $e^-$  en el rango energía  $\epsilon \in 0.01 \epsilon_F$  serán **excitados**.

# Contenido: Tema 04

- 4. Modelo del gas de electrones libres
  - 4.1 Modelo del gas de Fermi
  - 4.2 Gas de electrones en tres dimensiones**
  - 4.3 Capacidad calorífica, conductividad eléctrica y térmica del gas de electrones
  - 4.4 Movimiento en campos magnéticos: Efecto Hall



# Gas de electrones en tres dimensiones

## Solución del sistema en 3D

Para el caso de un sistema en 3D:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \epsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}),$$

en donde los  $e^-$  están confinados en un cubo de arista  $L \therefore V = L^3$ .

La sol. propuesta es del tipo:

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = Ae^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}},$$

obteniendo la cte.  $A$  mediante las condiciones de **normalización**,

$$1 = \int_V \psi_{\mathbf{k}}^* \psi_{\mathbf{k}} d\mathbf{r},$$

$$\Rightarrow A = (1/V)^{1/2} = (1/L)^{3/2}.$$

Adicionalmente, los orbitales deben cumplir con las sig. condiciones de **frontera**:

$$\psi_{\mathbf{k}}(x, y, z) = \psi_{\mathbf{k}}(x + L, y, z),$$

$$\psi_{\mathbf{k}}(x, y, z) = \psi_{\mathbf{k}}(x, y + L, z),$$

$$\psi_{\mathbf{k}}(x, y, z) = \psi_{\mathbf{k}}(x, y, z + L),$$

lo cual arroja las siguientes relaciones para el vector  $\mathbf{k}$ ,

$$k_x = \frac{2n\pi}{L}, \quad k_y = \frac{2m\pi}{L}, \quad k_z = \frac{2l\pi}{L},$$

en donde  $n, m, l \in \mathbb{Z}$ .

# Gas de electrones en tres dimensiones

## Espectro de energía

Calculando ahora el espectro de energía,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \epsilon_{\mathbf{k}}\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}),$$

$$\forall \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}},$$

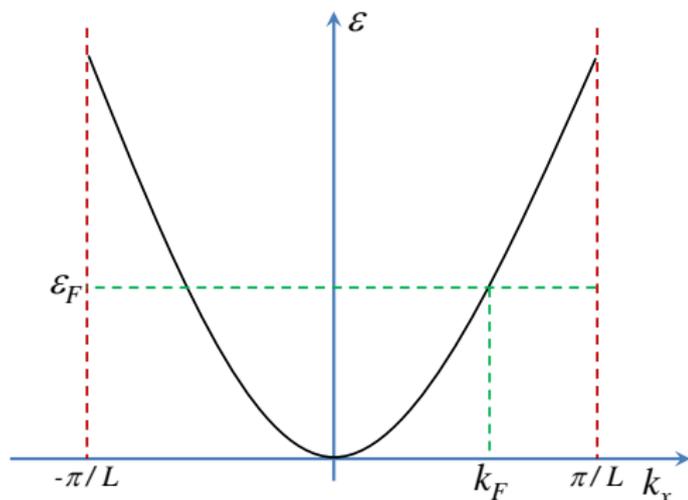
$$\Rightarrow \epsilon_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2}{2m}|\mathbf{k}|^2,$$

$$\epsilon_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2}{2m}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2),$$

en donde la **energía de Fermi** viene dada como,

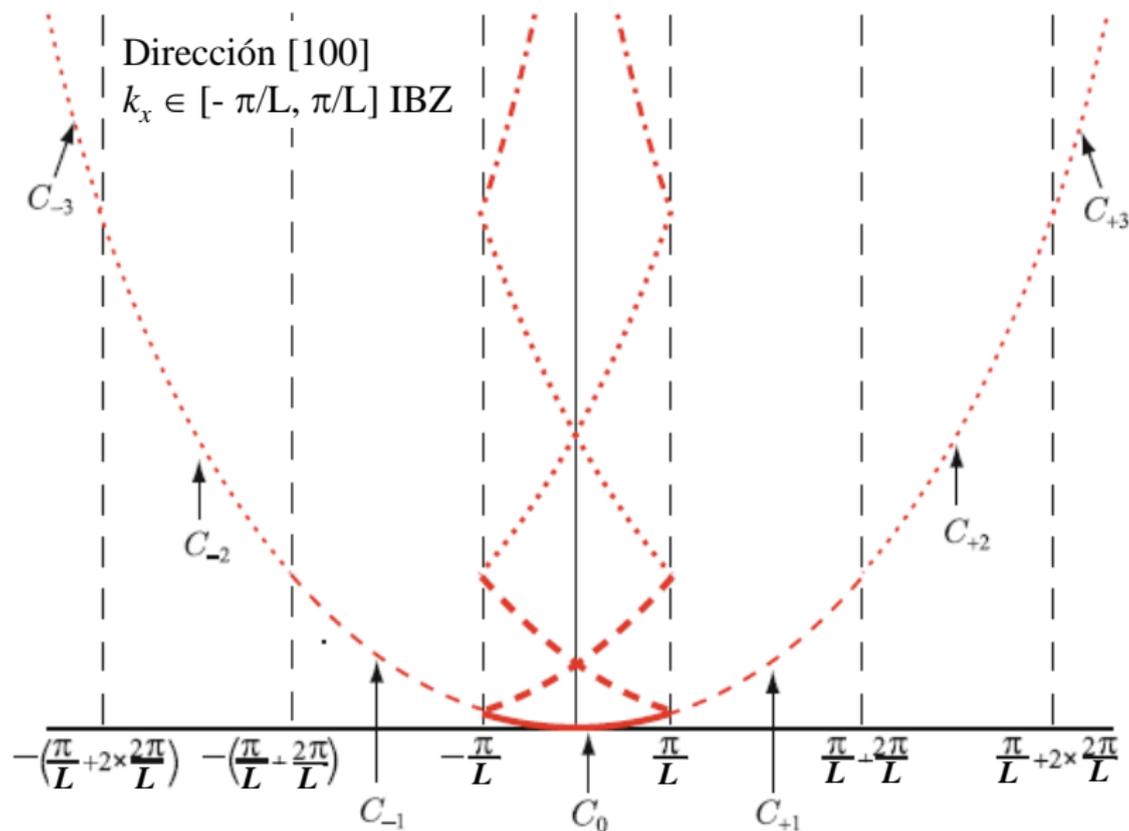
$$\epsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m}|\mathbf{k}_F|^2.$$

La ecuación anterior representa una relación en 4D, por lo que para analizarla se escogen **camino de alta simetría**, como por ejemplo la dirección  $k_x$  en la IBZ:  $k_x \in [-\pi/L, \pi/L]$ .



# Gas de electrones en tres dimensiones

Espectro de energía en esquema de zona extendida



# Gas de electrones en tres dimensiones

## Superficie de Fermi

Otra manera de representar la estructura electrónica es fijar el valor de la energía a la **energía de Fermi**  $\epsilon_F$ ,

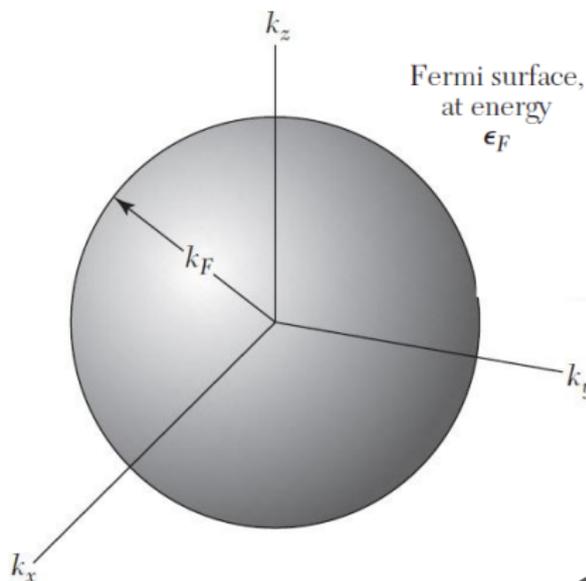
$$\epsilon_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \Rightarrow \epsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} |\mathbf{k}_F|^2,$$

La ec. anterior representa una superficie en el espacio 3D, conocida como **superficie de Fermi**, que para el caso del electrón libre, es una **esfera** con radio  $k_F$ ,

$$N = 2 \frac{\text{vol. esfera de Fermi}}{\text{vol. IBZ}},$$

$$= 2 \frac{4\pi k_F^3/3}{(2\pi/L)^3},$$

$$k_F = \left( 3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{1/3}.$$



# Gas de electrones en tres dimensiones

## Velocidad de Fermi

Para conocer el significado de  $\mathbf{k}$ , se aplica el **operador de momento**  $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$  al orbital  $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$  obtenido:

$$\hat{\mathbf{p}}\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = -i\hbar\nabla \left( \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right) = \hbar\mathbf{k} \left( \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right) = \hbar\mathbf{k}\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$$

por tanto,  $\hbar\mathbf{k}$  es el **eigenvalor** de  $\hat{\mathbf{p}}$ .

Sin embargo, el eigenvalor de  $\hat{\mathbf{p}}$  es el **momento**  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ , entonces:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \hbar\mathbf{k} \quad \therefore \quad \mathbf{v} = \frac{\hbar}{m}\mathbf{k},$$

lo cual representa la **velocidad** del  $e^-$  en el orbital  $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ .

Ahora, para el caso del **vector de Fermi**  $\mathbf{k}_F$ , se obtiene la **velocidad de Fermi**,

$$v_F = \frac{\hbar}{m}k_F \quad \Rightarrow \quad v_F = \frac{\hbar}{m} \left( 3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{1/3} \quad \forall \quad k_F = \left( 3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{1/3}$$

# Gas de electrones en tres dimensiones

## Parámetros de metales al nivel de Fermi

Valency	Metal	Fermi wavevector, in $\text{cm}^{-1}$	Fermi velocity, in $\text{cm s}^{-1}$	Fermi energy, in eV	Fermi temperature $T_F = \epsilon_F/k_B$ , in deg K
1	Li	$1.11 \times 10^8$	$1.29 \times 10^8$	4.72	$5.48 \times 10^4$
	Na	0.92	1.07	3.23	3.75
	K	0.75	0.86	2.12	2.46
	Rb	0.70	0.81	1.85	2.15
	Cs	0.64	0.75	1.58	1.83
	Cu	1.36	1.57	7.00	8.12
	Ag	1.20	1.39	5.48	6.36
	Au	1.20	1.39	5.51	6.39
2	Be	1.93	2.23	14.14	16.41
	Mg	1.37	1.58	7.13	8.27
	Ca	1.11	1.28	4.68	5.43
	Sr	1.02	1.18	3.95	4.58
	Ba	0.98	1.13	3.65	4.24
	Zn	1.57	1.82	9.39	10.90
	Cd	1.40	1.62	7.46	8.66
3	Al	1.75	2.02	11.63	13.49
	Ga	1.65	1.91	10.35	12.01
	In	1.50	1.74	8.60	9.98
4	Pb	1.57	1.82	9.37	10.87
	Sn(w)	1.62	1.88	10.03	11.64

# Gas de electrones en tres dimensiones

## Densidad de estados

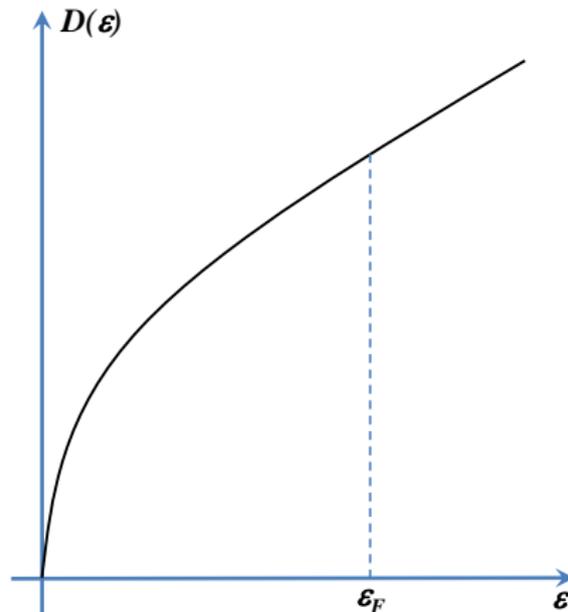
Calculando la **densidad de estados**  $D(\epsilon) = dn/d\epsilon$  para el gas de Fermi confinado en una esfera de radio  $k < k_F$ ,

$$\begin{aligned}n &= 2 \frac{\text{vol. esfera radio } k}{\text{vol. IBZ}}, \\&= 2 \frac{4\pi k^3/3}{(2\pi/L)^3} = \frac{V k^3}{3\pi^2}, \\&= \frac{V}{3\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \epsilon \right)^{3/2},\end{aligned}$$

en donde  $\epsilon = \hbar^2 k^2 / 2m$ .

Por tanto, la densidad de estados para el gas de Fermi es:

$$D(\epsilon) = \frac{V}{2\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \epsilon^{1/2}.$$



# Gas de electrones en tres dimensiones

## Densidad de estados: Efecto de temperatura

Considerando los efectos de la temperatura en  $D(\epsilon)$  mediante la función de distribución de **Fermi-Dirac**,

$$D(\epsilon) \rightarrow D(\epsilon)f(\epsilon) \quad \forall T > 0,$$

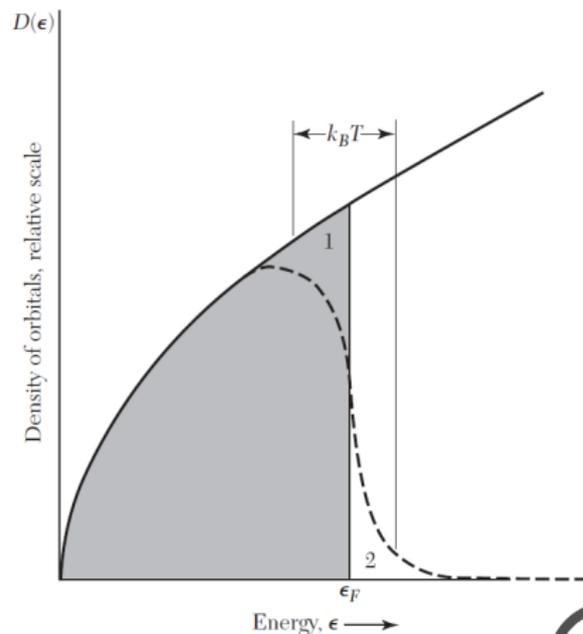
en donde,

$$f(\epsilon) = \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)\beta} + 1} \quad \forall \beta = \frac{1}{k_B T},$$

cumplíndose,

$$N = \int_0^{\epsilon_F} D(\epsilon) d\epsilon \quad \forall T = 0,$$

$$N = \int_0^{\infty} D(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon \quad \forall T > 0.$$



# Gas de electrones en tres dimensiones

## Potencial químico

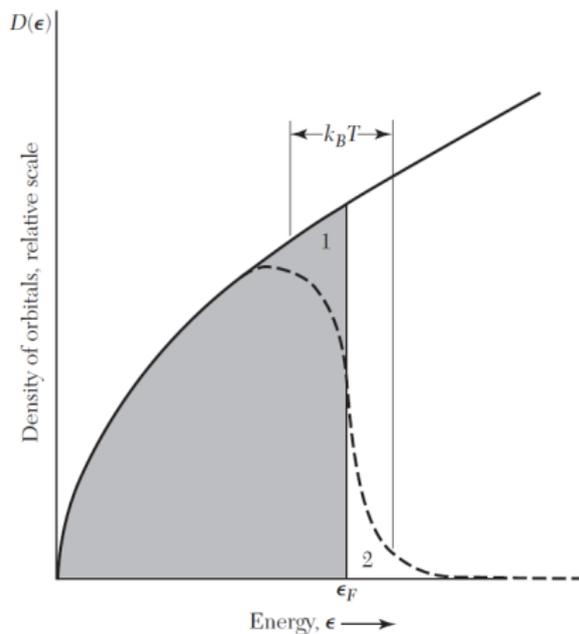
Obteniendo una expresión del **potencial químico** ( $T > 0$ ) en función de  $T$  y las propiedades intrínsecas del sistema,<sup>3</sup>

$$N = \int_0^{\infty} D(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon,$$

$$\forall f(\epsilon) = \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)\beta} + 1},$$

en donde se considera que  $\forall T$ ,  $T \ll T_F$ ,  $D(\epsilon)_{T=0} \sim D(\epsilon)_{T>0}$ , siendo que existen pequeñas diferencias en un rango  $k_B T$ , vecindad de  $\mu$ , por tanto:

$$D(\epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{d^n D(\epsilon)}{d\epsilon^n} \right|_{\mu} \frac{(\epsilon - \mu)^n}{n!}.$$



<sup>3</sup>Como la energía o temperatura de Fermi.

# Gas de electrones en tres dimensiones

## Potencial químico: Expansión de Sommerfeld

Sustituyendo la expresión propuesta de  $D(\epsilon)$  en la integral de  $N$ , se obtiene la **expansión de Sommerfeld**,

$$N = \int_0^\mu D(\epsilon) d\epsilon + \sum_{n=1}^{\infty} (k_B T)^{2n} a_n \left| \frac{d^{2n-1} D(\epsilon)}{d\epsilon^{2n-1}} \right|_\mu,^4$$
$$N = \int_0^\mu D(\epsilon) d\epsilon + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \left| \frac{dD(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_\mu + \dots$$
$$\dots + \frac{7\pi^4}{360} (k_B T)^4 \left| \frac{d^3 D(\epsilon)}{d\epsilon^3} \right|_\mu + O\left(\frac{k_B T}{\mu}\right)^6.$$

Para el caso en que  $T \ll T_F$ ,<sup>5</sup> el número de partículas puede ser aproximado hasta términos de  $T^2$ ,

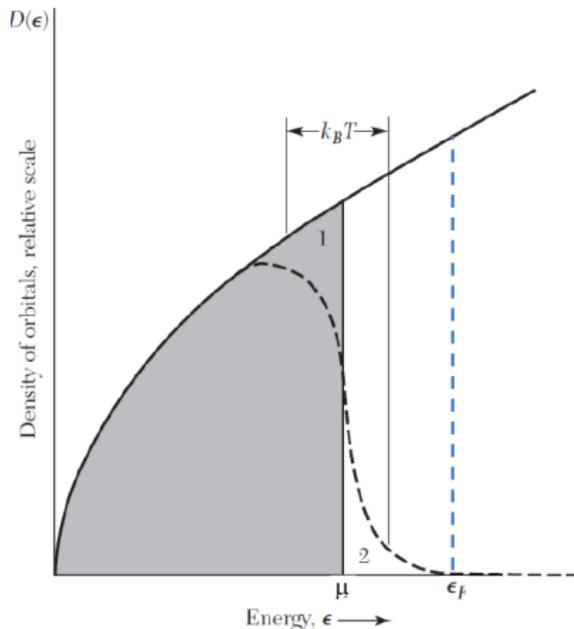
$$N = \int_0^\mu D(\epsilon) d\epsilon + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \left| \frac{dD(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_\mu + O\left(\frac{k_B T}{\mu}\right)^4.$$

<sup>4</sup>En donde  $a_n$  son ctes. dimensionales del orden de la unidad.

<sup>5</sup>Situación que siempre se cumple en los metales.

# Gas de electrones en tres dimensiones

## Potencial químico: Expansión de Sommerfeld



Debido a que  $D(\epsilon)_{T=0} \sim D(\epsilon)_{T>0}$ , es posible aprox. la integral:

$$\int_0^{\mu} D(\epsilon) d\epsilon \approx \int_0^{\epsilon_F} D(\epsilon) d\epsilon + \dots \\ \dots + (\mu - \epsilon_F) D(\epsilon_F),$$

$\therefore$  sust. en la expresión de  $N$ ,

$$N = \int_0^{\mu} D(\epsilon) d\epsilon + \dots \\ \dots + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 D'(\epsilon_F),$$

$$\Rightarrow N = \int_0^{\epsilon_F} D(\epsilon) d\epsilon + (\mu - \epsilon_F) D(\epsilon_F) + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 D'(\epsilon_F).$$

# Gas de electrones en tres dimensiones

Potencial químico: Expansión de Sommerfeld

De la expresión anterior,

$$N = \int_0^{\epsilon_F} D(\epsilon) d\epsilon + (\mu - \epsilon_F) D(\epsilon_F) + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 D'(\epsilon_F),$$
$$\Rightarrow \mu = \epsilon_F - \frac{\pi^2}{6} (K_B T)^2 \frac{D'(\epsilon_F)}{D(\epsilon_F)},$$

en donde para el modelo del gas de Fermi se tiene:

$$D(\epsilon) = \frac{V}{2\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \epsilon^{1/2} \quad \rightarrow \quad D'(\epsilon) = \frac{V}{4\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \epsilon^{-1/2},$$

por tanto, para el potencial químico,

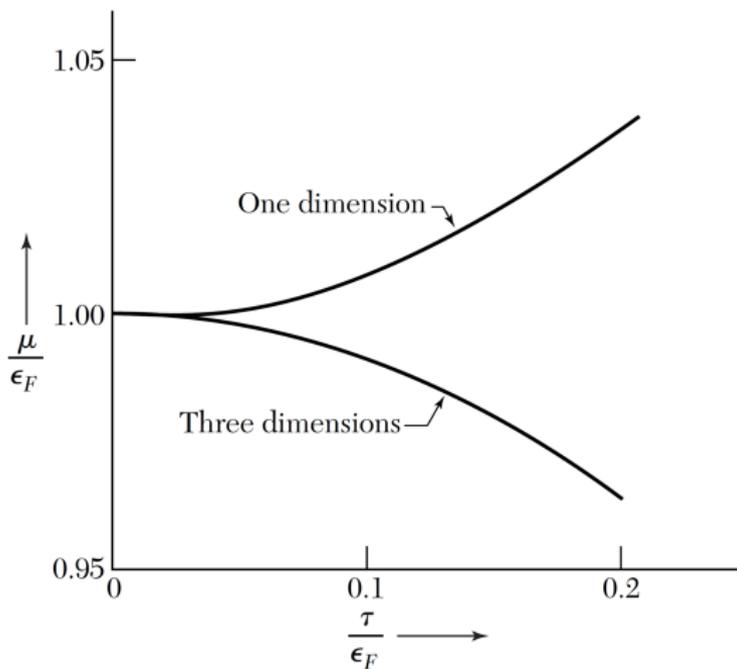
$$\mu = \epsilon_F - \frac{\pi^2}{6} (K_B T)^2 \frac{1}{2\epsilon_F} = \epsilon_F \left[ 1 - \frac{\pi^2}{3} \left( \frac{k_B T}{2\epsilon_F} \right)^2 \right],$$

lo cual corresponde a un corrimiento de 0.01% a  $T = 300$  K.

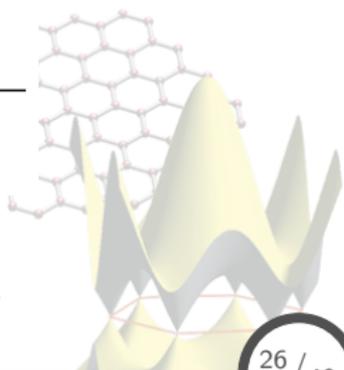
<sup>6</sup>Siendo:  $N = \int_0^{\epsilon_F} D(\epsilon) d\epsilon$ .

# Gas de electrones en tres dimensiones

Potencial químico: Evolución respecto a  $T$

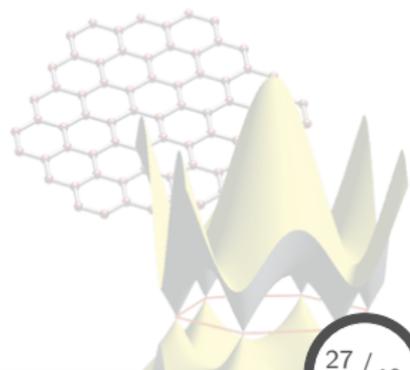


$$\mu = \epsilon_F \left[ 1 - \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{\tau}{\epsilon_F} \right)^2 \right] \quad \forall \quad \tau = k_B T.$$



# Contenido: Tema 04

- 4. Modelo del gas de electrones libres
  - 4.1 Modelo del gas de Fermi
  - 4.2 Gas de electrones en tres dimensiones
  - 4.3 Capacidad calorífica, conductividad eléctrica y térmica del gas de electrones
  - 4.4 Movimiento en campos magnéticos: Efecto Hall



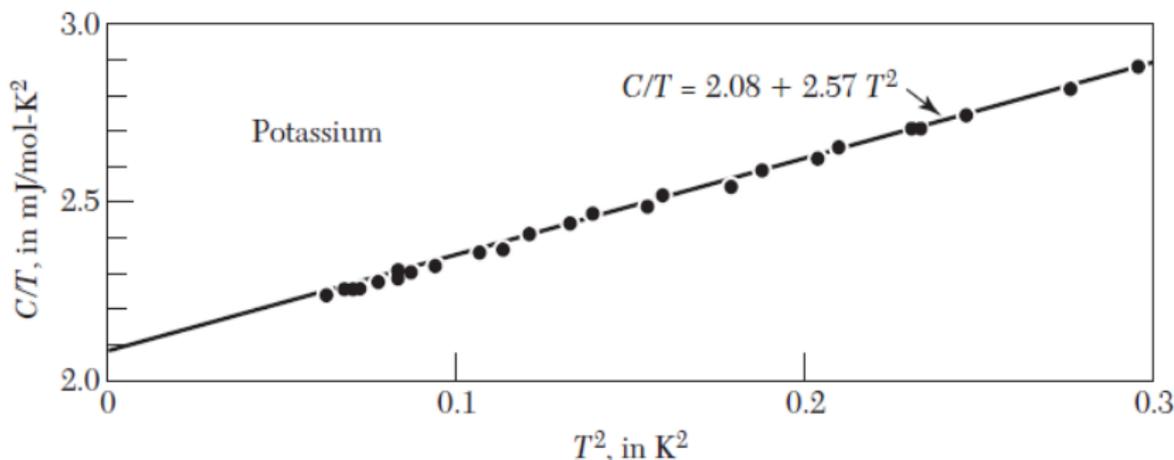
# Capacidad calorífica del gas de electrones

## Observaciones experimentales

A temperaturas muy por debajo de la temp. de Debye o de Fermi, el **calor específico** de los metales se puede expresar como:

$$C = C_{el} + C_{red} = \gamma T + AT^3,$$

en donde  $\gamma$ , el **parámetro de Sommerfeld**, y  $A$  son cantidades que caracterizan al metal.



# Capacidad calorífica del gas de electrones

## Resultados clásicos

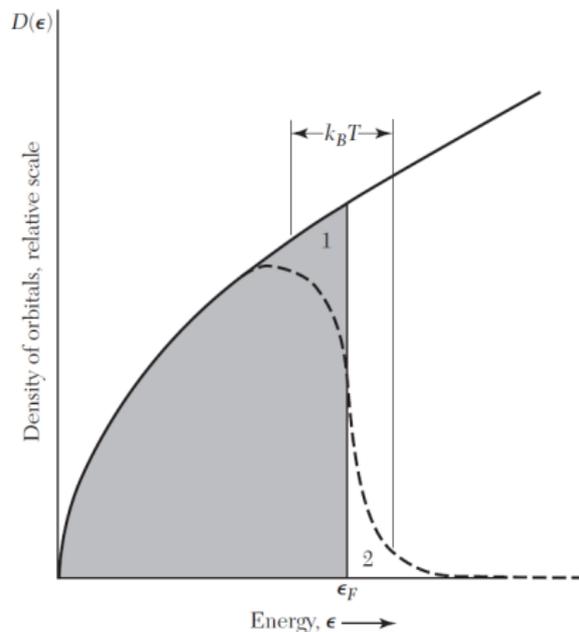
Considerando al **gas de electrones libres** como  $N$  partículas clásicas, el **calor específico** es  $C_{el}^{clas} = 3Nk_B/2$ , sin embargo, comparando con las observaciones experimentales:

- $C_{el} \propto T$  para temperaturas bajas ( $T < T_F$ ).
- $C_{el}^{exp} \leq 0.01 C_{el}^{clas}$ .

Para salvar tal discrepancia con el exp., se debe tomar en cuenta la naturaleza fermiónica de los  $e^-$ :

$N_e$  = num. de  $e^-$  en un rango de energía  $k_B T$  en la vecindad de  $\epsilon_F$  excitados térmicamente,

$$\frac{N_e}{N} = \frac{k_B T}{k_B T_F} \Rightarrow N_e = N \frac{T}{T_F}.$$



# Capacidad calorífica del gas de electrones

## Análisis cualitativo del calor específico

Si se considera que cada  $e^-$  posee aprox. una energía  $k_B T$ , entonces la energía total será,

$$U \sim N_e k_B T = \left( N \frac{T}{T_F} \right) k_B T,$$

por tanto, el **calor específico** vendrá dado como,

$$C_{el} = \frac{\partial U}{\partial T} = 2Nk_B \frac{T}{T_F}.$$

Comparando el resultado recién obtenido con las observaciones experimentales,

- $C_{el} \propto T, \forall T < T_F$ : tal relación lineal es obtenida.
- $C_{el}^{exp} \leq 0.01 C_{el}^{clas}$ :

$$C_{el}^{clas} = \frac{3}{2} N k_B \quad \& \quad C_{el}^{quan} = 2Nk_B \frac{T}{T_F},$$
$$\Rightarrow C_{el}^{quan} \propto C_{el}^{clas} \frac{T}{T_F} = C_{el}^{clas} \frac{10^2}{10^4} = 0.01 C_{el}^{clas} = C_{el}^{exp}.$$

# Capacidad calorífica del gas de electrones

## Análisis cuantitativo del calor específico

Calculando primero la **energía electrónica** del gas de Fermi:

$$T = 0 : U(0) = \int_0^{\epsilon_F} \epsilon D(\epsilon) d\epsilon,$$

$$T > 0 : U(T) = \int_0^{\infty} \epsilon D(\epsilon) f(\epsilon, T) d\epsilon,$$

analizando con lo anterior el **cambio de energía** debido a la temperatura:  $\Delta U = U(T) - U(0)$ ,

$$\begin{aligned} \Delta U &= \int_0^{\infty} \epsilon D(\epsilon) f(\epsilon, T) d\epsilon - \int_0^{\epsilon_F} \epsilon D(\epsilon) d\epsilon, \\ &= \int_0^{\epsilon_F} \epsilon D(\epsilon) f(\epsilon, T) d\epsilon - \int_0^{\epsilon_F} \epsilon D(\epsilon) d\epsilon + \int_{\epsilon_F}^{\infty} \epsilon D(\epsilon) f(\epsilon, T) d\epsilon, \\ &= - \int_0^{\epsilon_F} \epsilon D(\epsilon) [1 - f(\epsilon, T)] d\epsilon + \int_{\epsilon_F}^{\infty} \epsilon D(\epsilon) f(\epsilon, T) d\epsilon. \end{aligned}$$

# Capacidad calorífica del gas de electrones

## Análisis cuantitativo del calor específico

Por otro lado, se sabe:

$$N = \int_0^{\epsilon_F} D(\epsilon) d\epsilon = \int_0^{\infty} D(\epsilon) f(\epsilon, T) d\epsilon = \left[ \int_0^{\epsilon_F} + \int_{\epsilon_F}^{\infty} \right] D(\epsilon) f(\epsilon, T) d\epsilon,$$

multiplicando por  $\epsilon_F$  ambas expresiones,

$$\int_0^{\epsilon_F} \epsilon_F D(\epsilon) d\epsilon = \left[ \int_0^{\epsilon_F} + \int_{\epsilon_F}^{\infty} \right] \epsilon_F D(\epsilon) f(\epsilon, T) d\epsilon,$$
$$\Rightarrow - \int_{\epsilon_F}^{\infty} \epsilon_F D(\epsilon) f(\epsilon, T) d\epsilon + \int_0^{\epsilon_F} \epsilon_F D(\epsilon) [1 - f(\epsilon, T)] d\epsilon = 0.$$

Relacionando la expresión anterior con  $\Delta U$ , se tiene:

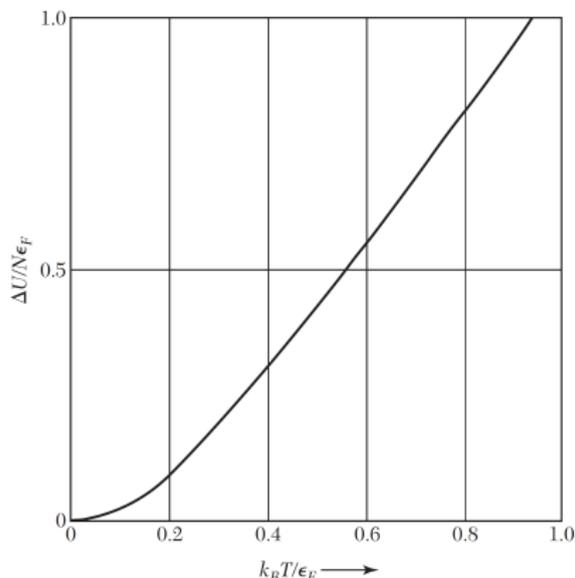
$$\Delta U = - \int_0^{\epsilon_F} \epsilon D(\epsilon) [1 - f(\epsilon, T)] d\epsilon + \int_{\epsilon_F}^{\infty} \epsilon D(\epsilon) f(\epsilon, T) d\epsilon,$$
$$\Delta U = \int_0^{\epsilon_F} (\epsilon_F - \epsilon) D(\epsilon) [1 - f(\epsilon, T)] d\epsilon + \int_{\epsilon_F}^{\infty} (\epsilon - \epsilon_F) D(\epsilon) f(\epsilon, T) d\epsilon.$$

# Capacidad calorífica del gas de electrones

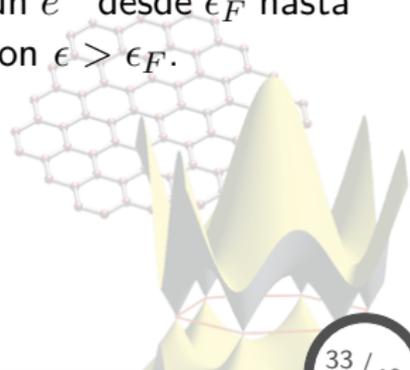
## Análisis cuantitativo del calor específico

Del cambio de energía:

$$\Delta U = \int_0^{\epsilon_F} (\epsilon_F - \epsilon) D(\epsilon) [1 - f(\epsilon, T)] d\epsilon + \int_{\epsilon_F}^{\infty} (\epsilon - \epsilon_F) D(\epsilon) f(\epsilon, T) d\epsilon,$$



- **1<sup>a</sup> integral:** Energía necesaria para llevar un  $e^-$  hasta  $\epsilon_F$  desde un orbital con  $\epsilon < \epsilon_F$ .
- **2<sup>a</sup> integral:** Energía necesaria para llevar un  $e^-$  desde  $\epsilon_F$  hasta un orbital con  $\epsilon > \epsilon_F$ .



# Capacidad calorífica del gas de electrones

## Análisis cuantitativo del calor específico

De la expresión obtenida anteriormente:

$$\Delta U = \int_0^{\epsilon_F} (\epsilon_F - \epsilon) D(\epsilon) [1 - f(\epsilon, T)] d\epsilon + \int_{\epsilon_F}^{\infty} (\epsilon - \epsilon_F) D(\epsilon) f(\epsilon, T) d\epsilon,$$

es posible calcular el **calor específico**  $C_{el}$ ,

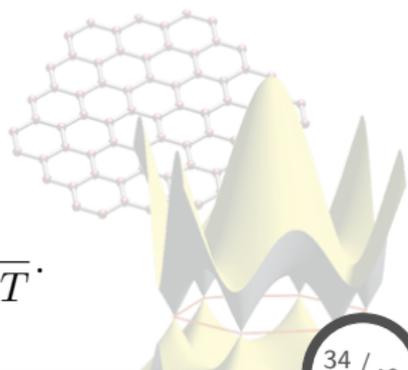
$$C_{el} = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T} (U_0 + \Delta U) = \frac{\partial \Delta U}{\partial T},$$

$$\therefore C_{el} = - \int_0^{\epsilon_F} (\epsilon_F - \epsilon) D(\epsilon) \frac{\partial f}{\partial T} d\epsilon + \int_{\epsilon_F}^{\infty} (\epsilon - \epsilon_F) D(\epsilon) \frac{\partial f}{\partial T} d\epsilon,$$

$$C_{el} = \int_0^{\infty} (\epsilon - \epsilon_F) D(\epsilon) \frac{\partial f}{\partial T} d\epsilon,$$

siendo  $f(\epsilon, T)$  la distribución **Fermi-Dirac**:

$$f(\epsilon, T) = \frac{1}{e^{(\epsilon - \mu)\beta} + 1} \quad \forall \quad \beta = \frac{1}{k_B T}.$$



# Capacidad calorífica del gas de electrones

## Análisis cuantitativo del calor específico

Recordando la **expansión de Sommerfeld** para una función  $H(\epsilon)$  que varía ligeramente,

$$\int_0^{\infty} H(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon = \int_0^{\mu} H(\epsilon) d\epsilon + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \left. \frac{\partial H}{\partial \epsilon} \right|_{\mu},$$

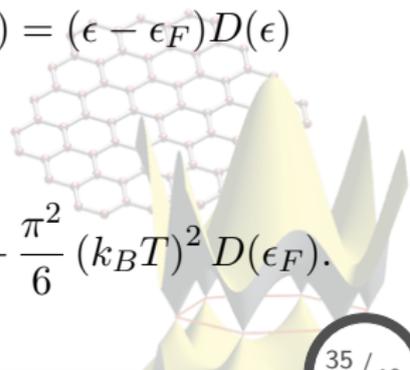
en donde:  $\int_0^{\mu} H(\epsilon) d\epsilon \approx \int_0^{\epsilon_F} H(\epsilon) d\epsilon + (\mu - \epsilon_F) H(\epsilon_F),$

siendo para este caso,

$$C_{el} = \frac{\partial}{\partial T} \int_0^{\infty} (\epsilon - \epsilon_F) D(\epsilon) f(\epsilon, T) d\epsilon \Rightarrow H(\epsilon) = (\epsilon - \epsilon_F) D(\epsilon)$$

por tanto, aplicando:

$$\int_0^{\infty} (\epsilon - \epsilon_F) D(\epsilon) f(\epsilon, T) d\epsilon \approx \int_0^{\epsilon_F} (\epsilon - \epsilon_F) D(\epsilon) d\epsilon + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 D(\epsilon_F).$$



# Capacidad calorífica del gas de electrones

## Constante de Sommerfeld

Calculando  $C_{el}$ :

$$\begin{aligned} C_{el} &= \frac{\partial}{\partial T} \int_0^{\infty} (\epsilon - \epsilon_F) D(\epsilon) f(\epsilon, T) d\epsilon, \\ &= \frac{\partial}{\partial T} \left[ \int_0^{\epsilon_F} (\epsilon - \epsilon_F) D(\epsilon) d\epsilon + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 D(\epsilon_F) \right] = \frac{\pi^2}{3} k_B^2 T D(\epsilon_F), \end{aligned}$$

siendo que para el gas de Fermi,

$$D(\epsilon) = \frac{V}{2\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \epsilon^{1/2} \quad \forall \quad N = \frac{V}{3\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \epsilon^{3/2} \Rightarrow D(\epsilon) = \frac{3N}{2\epsilon},$$

por tanto,

$$\frac{C_{el}}{T} = \frac{\pi^2 N k_B}{2T_F} = \gamma \quad \forall \quad \epsilon_F = k_B T_F$$

obteniendo así una expresión para el **parámetro de Sommerfeld**.

# Capacidad calorífica del gas de electrones

## Constante de Sommerfeld

**Table 2** Experimental and free electron values of electronic heat capacity constant  $\gamma$  of metals

(From compilations kindly furnished by N. Phillips and N. Pearlman. The thermal effective mass is defined by Eq. (38).)

Li	Be											B	C	N
1.63	0.17													
0.749	0.500													
2.18	0.34													
Na	Mg											Al	Si	P
1.38	1.3											1.35		
1.094	0.992											0.912		
1.26	1.3											1.48		
Observed $\gamma$ in $\text{mJ mol}^{-1} \text{K}^{-2}$ .														
Calculated free electron $\gamma$ in $\text{mJ mol}^{-1} \text{K}^{-2}$ .														
$m_{\text{th}}/m = (\text{observed } \gamma)/(\text{free electron } \gamma)$ .														
K	Ca	Sc	Ti	V	Cr	Mn( $\gamma$ )	Fe	Co	Ni	Cu	Zn	Ga	Ge	As
2.08	2.9	10.7	3.35	9.26	1.40	9.20	4.98	4.73	7.02	0.695	0.64	0.596		0.19
1.668	1.511									0.505	0.753	1.025		
1.25	1.9									1.38	0.85	0.58		
Rb	Sr	Y	Zr	Nb	Mo	Tc	Ru	Rh	Pd	Ag	Cd	In	Sn <sup>(w)</sup>	Sb
2.41	3.6	10.2	2.80	7.79	2.0	—	3.3	4.9	9.42	0.646	0.688	1.69	1.78	0.11
1.911	1.790									0.645	0.948	1.233	1.410	
1.26	2.0									1.00	0.73	1.37	1.26	
Cs	Ba	La	Hf	Ta	W	Re	Os	Ir	Pt	Au	Hg( $\alpha$ )	Tl	Pb	Bi
3.20	2.7	10.	2.16	5.9	1.3	2.3	2.4	3.1	6.8	0.729	1.79	1.47	2.98	0.008
2.238	1.937									0.642	0.952	1.29	1.509	
1.43	1.4									1.14	1.88	1.14	1.97	

# Conductividad eléctrica y ley de Ohm

## Cálculo de la conductividad eléctrica

En un campo electromagnético, la fuerza que es ejercida en un electrón de carga  $-e$  es:

$$\mathbf{F} = -e [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}],$$

por Newton, para un gas de Fermi, esa fuerza está dada como:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad \forall \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v} = \hbar\mathbf{k},$$

por tanto,

$$\begin{aligned} \hbar \frac{d\mathbf{k}}{dt} &= -e\mathbf{E} \quad \forall \quad \mathbf{B} = 0, \\ \Rightarrow d\mathbf{k} &= -\frac{e}{\hbar} \mathbf{E} dt, \end{aligned}$$

integrando la ec. anterior, y considerando  $\mathbf{E} \neq \mathbf{E}(t)$ ,

$$\int_{\mathbf{k}(0)}^{\mathbf{k}(t)} d\mathbf{k} = -\frac{e}{\hbar} \mathbf{E} \int_0^t dt,$$

$$\Rightarrow \mathbf{k}(t) - \mathbf{k}(0) = \Delta\mathbf{k} = -\frac{e}{\hbar} \mathbf{E} t,$$

en donde la expresión de  $\Delta\mathbf{k}$  refleja la naturaleza de un proceso de **dispersión** de electrones.

Además, se tiene para  $\Delta\mathbf{k}$ :

$$\hbar\Delta\mathbf{k} = m\Delta\mathbf{v},$$

$$\Rightarrow \Delta\mathbf{v} = -\frac{e}{m} \mathbf{E} t.$$

# Conductividad eléctrica y ley de Ohm

## Conductividad eléctrica y Ley de Ohm

La cantidad  $\Delta \mathbf{v}$  se puede relacionar con el cambio de velocidad que sufre un  $e^-$  entre dos colisiones, caracterizadas por:

$\tau \rightarrow$  **tiempo de relajación**,

$l \rightarrow$  **recorrido libre medio**,

tales efectos dispersivos tienen su origen en:

- Imperfecciones de la red.
- Impurezas.
- Fonones.

Considerando que,

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}(\tau) - \mathbf{v}(0),$$

$$\Rightarrow \mathbf{v} = -\frac{e}{m} \mathbf{E} \tau \quad \forall \quad \mathbf{v}(0) = 0.$$

Ahora, por otro lado, la **densidad de corriente** se define como,

$$\mathbf{J} = Nq\mathbf{v},$$

$$\Rightarrow \mathbf{J} = \left( \frac{Ne^2\tau}{m} \right) \mathbf{E},$$

lo cual corresponde a la **ley de Ohm**:  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ , en donde  $\sigma$  representa la **conductividad eléctrica** del sistema:

$$\sigma = \frac{Ne^2\tau}{m}.$$

# Conductividad eléctrica y ley de Ohm

## Resistividad eléctrica

La **resistividad eléctrica** se define:

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \Rightarrow \rho = \frac{m}{Ne^2\tau},$$

teniendo diferentes contribuciones,

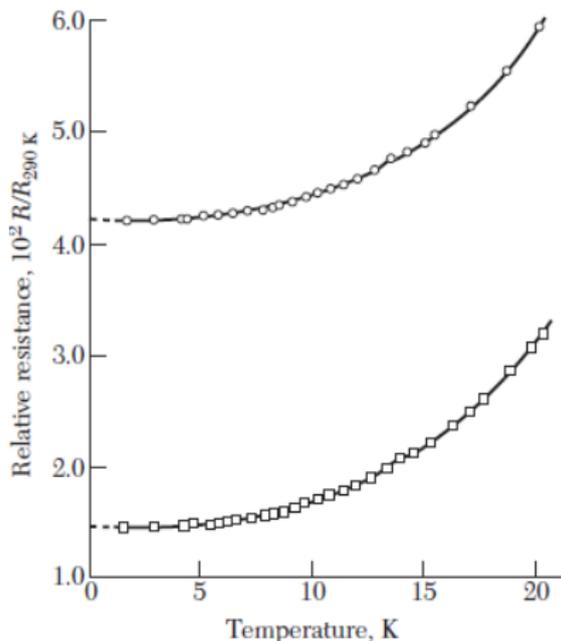
$$\rho = \rho_i + \rho_L,$$

$\rho_i$ : Dispersión debida a **imperfecciones** en la red,

$\rho_L$ : Dispersión debida a **fonones** térmicos.

Analizando los diferentes límites de  $T$ , se tiene:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \rho = \rho_i(0) \leftarrow \text{res. residual},$$



si  $T > \theta_D \Rightarrow \rho \propto T$ ,

por tanto en ese rango  $\rho_L$  es dominante.

# Conductividad eléctrica y ley de Ohm

## Datos de conductividad y resistividad eléctrica

**Table 3 Electrical conductivity and resistivity of metals at 295 K**  
(Resistivity values as given by G. T. Meaden, *Electrical resistance of metals*, Plenum, 1965; residual resistivities have been subtracted.)

Li	Be											B	C	N	O	F	Ne	
1.07	3.08																	
9.32	3.25																	
Na	Mg											Al	Si	P	S	Cl	Ar	
2.11	2.33	Conductivity in units of $10^5$ (ohm-cm) <sup>-1</sup> .										3.65						
4.75	4.30	Resistivity in units of $10^{-8}$ ohm-cm.										2.74						
K	Ca	Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn	Ga	Ge	As	Se	Br	Kr	
1.39	2.78	0.21	0.23	0.50	0.78	0.072	1.02	1.72	1.43	5.88	1.69	0.67						
7.19	3.6	46.8	43.1	19.9	12.9	139.	9.8	5.8	7.0	1.70	5.92	14.85						
Rb	Sr	Y	Zr	Nb	Mo	Tc	Ru	Rh	Pd	Ag	Cd	In	Sn <sup>(w)</sup>	Sb	Te	I	Xe	
0.80	0.47	0.17	0.24	0.69	1.89	~0.7	1.35	2.08	0.95	6.21	1.38	1.14	0.91	0.24				
12.5	21.5	58.5	42.4	14.5	5.3	~14.	7.4	4.8	10.5	1.61	7.27	8.75	11.0	41.3				
Cs	Ba	La	Hf	Ta	W	Re	Os	Ir	Pt	Au	Hg <sup>(iq)</sup>	Tl	Pb	Bi	Po	At	Rn	
0.50	0.26	0.13	0.33	0.76	1.89	0.54	1.10	1.96	0.96	4.55	0.10	0.61	0.48	0.086	0.22			
20.0	39.	79.	30.6	13.1	5.3	18.6	9.1	5.1	10.4	2.20	95.9	16.4	21.0	116.	46.			
Fr	Ra	Ac	Ce	Pr	Nd	Pm	Sm	Eu	Gd	Tb	Dy	Ho	Er	Tm	Yb	Lu		
			0.12	0.15	0.17		0.10	0.11	0.070	0.090	0.11	0.13	0.12	0.16	0.38	0.19		
			81.	67.	59.		99.	89.	134.	111.	90.0	77.7	81.	62.	26.4	53.		
			Th	Pa	U	Np	Pu	Am	Cm	Bk	Cf	Es	Fm	Md	No	Lr		
			0.66		0.39	0.085	0.070											
			15.2		25.7	118.	143.											

# Conductividad térmica

## Conductividad térmica del gas de electrones

De la teoría cinética de gases, se tiene que la **conductividad térmica** de un gas de partículas desplazándose a una vel.  $v$ , con un camino libre medio  $l$  es,

$$K = \frac{1}{3}Cvl \quad \forall \quad C = \text{calor específico,}$$

aplicando para el **gas de electrones libres** se tiene:

$$C_{el} = \frac{\pi^2}{3}k_B^2D(\epsilon_F)T \quad \forall \quad D(\epsilon_F) = \frac{3N}{2\epsilon_F} \quad \& \quad \epsilon_F = \frac{1}{2}mv_F^2,$$

por tanto, la conductividad térmica del **gas de electrones** es:

$$K_{el} = \left( \frac{\pi^2}{3m} N k_B^2 \tau \right) T \Rightarrow K_{el} \propto T.$$

Comparando con la **conductividad térmica fonónica**, se tiene:

- $K_{el} > K_{phon}$  en metales puros ( $\forall T$ ),
- $K_{el} \approx K_{phon}$  en metales impuros o aleaciones desordenadas.

# Conductividad térmica

## Conductividad térmica del gas de electrones

Comparando las diferentes conductividades en un gas de electrones (eléctrica y térmica) se llega a la **ley de Wiedemann-Franz**:

$$\frac{K}{\sigma} = \frac{\pi^2 N k_B^2 \tau T / 3m}{N e^2 \tau / m} = \frac{1}{3} \left( \frac{\pi k_B}{e} \right)^2 T,$$

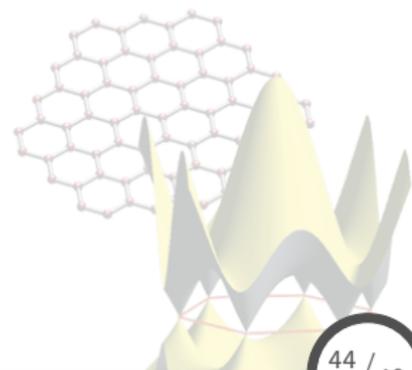
teniendo el **número de Lorentz**, el cual es independiente del material:

$$\Rightarrow L = \frac{K}{\sigma T} = \frac{1}{3} \left( \frac{\pi k_B}{e} \right)^2 \approx 2.45 \times 10^{-8} \text{ watt-ohm/K}^2.$$

$L \times 10^8 \text{ watt-ohm/deg}^2$			$L \times 10^8 \text{ watt-ohm/deg}^2$		
Metal	0°C	100°C	Metal	0°C	100°C
Ag	2.31	2.37	Pb	2.47	2.56
Au	2.35	2.40	Pt	2.51	2.60
Cd	2.42	2.43	Su	2.52	2.49
Cu	2.23	2.33	W	3.04	3.20
Mo	2.61	2.79	Zn	2.31	2.33

# Contenido: Tema 04

- 4. Modelo del gas de electrones libres
  - 4.1 Modelo del gas de Fermi
  - 4.2 Gas de electrones en tres dimensiones
  - 4.3 Capacidad calorífica, conductividad eléctrica y térmica del gas de electrones
  - 4.4 Movimiento en campos magnéticos: Efecto Hall



# Movimiento en campos magnéticos: Efecto Hall

## Electrones en presencia de campos magnéticos

Para una partícula de masa  $m$  y carga  $q = -e$ , la ecuación de movimiento estará dada por:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} + \alpha\mathbf{v} = m \left( \frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau} \right) \mathbf{v},$$

siendo  $\alpha = m/\tau$  un término de **fricción** con origen en las colisiones de los electrones con imperfecciones o fonones.

Ahora, considerando que el movimiento del sistema en presencia de un campo magnético uniforme  $\mathbf{B}$ ,

$$\mathbf{F} = -e [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}],$$

por tanto, la ec. de movimiento quedará como:

$$m \left( \frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau} \right) \mathbf{v} = -e [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}].$$

Considerando que los campos y la velocidad vienen dados por:

$$\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z), \quad \mathbf{B} = (0, 0, B), \\ \mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z),$$

entonces,

$$m \left( \partial_t + \tau^{-1} \right) v_x = -e (E_x + v_y B), \\ m \left( \partial_t + \tau^{-1} \right) v_y = -e (E_y - v_x B), \\ m \left( \partial_t + \tau^{-1} \right) v_z = -e E_z.$$

# Movimiento en campos magnéticos: Efecto Hall

## Electrones en presencia de campos magnéticos

Para el caso particular de un **campo eléctrico estático**, se tendrá un estado estacionario  $\therefore \mathbf{v} = \text{cte}$ ,

$$v_x = -\frac{e\tau}{m}E_x - \omega_c\tau v_y,$$

$$v_y = -\frac{e\tau}{m}E_y + \omega_c\tau v_x,$$

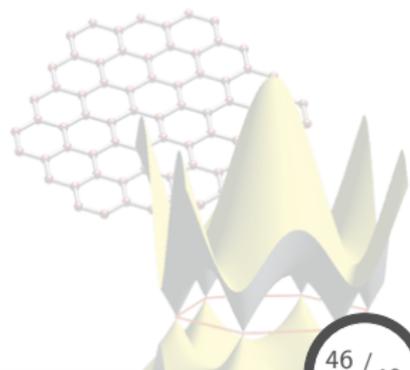
$$v_z = -\frac{e\tau}{m}E_z,$$

en donde  $\omega_c = eB/m$  representa la **frecuencia de ciclotrón**.

Resolviendo el sistema anterior para  $v_x$  y  $v_y$ :

$$v_x = -\left(\frac{e\tau}{m}\right) \frac{E_x - \omega_c\tau E_y}{1 + \omega_c^2\tau^2},$$

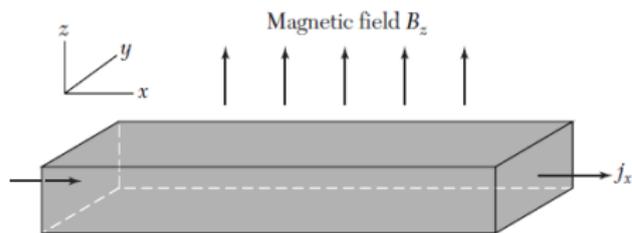
$$v_y = -\left(\frac{e\tau}{m}\right) \frac{E_y + \omega_c\tau E_x}{1 + \omega_c^2\tau^2}.$$



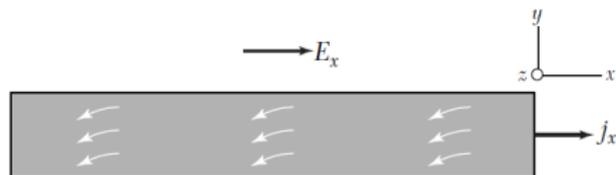
# Movimiento en campos magnéticos: Efecto Hall

## Campo Hall

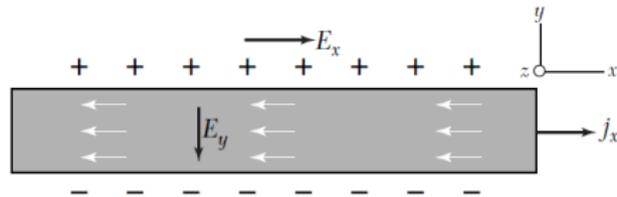
Considerando una barra infinita con flujo de electrones en  $\hat{i}$ , entonces existirá  $\mathbf{J} = j_x \hat{i}$ ,



debido a  $\mathbf{B}$  (vía Lorentz) se tendrá una desviación en la trayectoria de los electrones:



Alcanzando el **est. estacionario** ( $t \gg 0$ ), no habrá tal deflexión,



y al no tener donde fluir los  $e^-$  en  $\hat{j} \Rightarrow v_y = 0$ , por tanto de las ecs. de movimiento se obtiene:

$$E_y = -\omega_c \tau E_x = -\frac{eB\tau}{m} E_x,$$

es decir, la contribución de Lorentz se **contraresta** por un campo  $E_y$ , conocido como **campo de Hall**.

# Movimiento en campos magnéticos: Efecto Hall

## Coefficiente Hall

Relacionando ambos campos, se define el **coeficiente Hall**,

$$\mathbf{E}_{\text{Hall}} = -R_H(\mathbf{J} \times \mathbf{B}) \Rightarrow R_H = \frac{E_y}{j_x B} \quad \forall \quad j_x = nqv_x,$$

y recordando que  $q = -e$ ,  $v_x = (-e\tau/m)E_x$  con  $E_y$  como el **campo Hall**, entonces se tiene:

$$R_H = -\frac{1}{ne}.$$

Observaciones del coeficiente Hall:

- $n$  y  $R_H$  son **inversamente** proporcionales.
- Es muy útil para medir la **concentración** de portadores de carga.

El signo del coeficiente Hall tiene un significado físico:

- $R_H < 0 \Rightarrow$  el portador es un **electrón**.
- $R_H > 0 \Rightarrow$  el portador es un **hueco**.

# Movimiento en campos magnéticos: Efecto Hall

## Coeficiente Hall

Table 4 Comparison of observed Hall coefficients with free electron theory

Metal	Method	Experimental $R_H$ , in $10^{-24}$ CGS units	Assumed carriers per atom	Calculated $-1/nec$ , in $10^{-24}$ CGS units
Li	conv.	-1.89	1 electron	-1.48
Na	helicon	-2.619	1 electron	-2.603
	conv.	-2.3		
K	helicon	-4.946	1 electron	-4.944
	conv.	-4.7		
Rb	conv.	-5.6	1 electron	-6.04
Cu	conv.	-0.6	1 electron	-0.82
Ag	conv.	-1.0	1 electron	-1.19
Au	conv.	-0.8	1 electron	-1.18
Be	conv.	+2.7	—	—
Mg	conv.	-0.92	—	—
Al	helicon	+1.136	1 hole	+1.135
In	helicon	+1.774	1 hole	+1.780
As	conv.	+50.	—	—
Sb	conv.	-22.	—	—
Bi	conv.	-6000.	—	—