

## 4. Gases ideales cuánticos: Gas de Bose-Einstein



# Contenido: Tema 04

- 4. Gases ideales cuánticos: Gas de Bose-Einstein
  - 4.1 Sistemas cuánticos ideales
  - 4.2 Gas de Bose-Einstein
  - 4.3 Condensado



# Contenido: Tema 04

## 4. Gases ideales cuánticos: Gas de Bose-Einstein

### 4.1 Sistemas cuánticos ideales

#### 4.2 Gas de Bose-Einstein

#### 4.3 Condensado



# Sistemas cuánticos ideales

## Fundamentos

Para sistemas cuánticos **ideales** y **no-interactuantes** el Hamiltoniano se puede describir como,

$$\hat{H}(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_N) = \sum_{i=1}^N \hat{h}(\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i),$$

con lo cual se puede obtener la función de partición **canónica**,

$$\begin{aligned} Z(T, V, N) &= \text{Tr}(e^{-\beta \hat{H}}), \\ &= \frac{1}{N!} \sum_{k_1 \dots k_N}^{S,A} \langle k_1 \dots k_N | e^{-\beta \hat{H}} | k_1 \dots k_N \rangle^{S,A}, \end{aligned}$$

y dependiendo del tipo de **base** de expansión, es la estadística que se obtiene:

- **Maxwell-Boltzmann**: usando un **producto de estados**.<sup>1</sup>
- **Bose-Einstein**: aplicando estados **simétricos**.
- **Fermi-Dirac**: utilizando estados **antisimétricos**.

<sup>1</sup>el factor de Gibbs  $1/N!$  se coloca expresamente.

# Sistemas cuánticos ideales

## Números de ocupación

Además, si se considera la **ocupación** de cada estado para cada partícula, es posible definir una nueva base de expansión,

$$|k\rangle \leftarrow \text{estado de una partícula } \forall k = 1, 2, \dots$$

$\{n_1, n_2 \dots\} \leftarrow \text{números de ocupación}$  de cada estado,

siendo, **bosones**:  $n_k = 0, 1 \dots N$ , **fermiones**:  $n_k = 0, 1$ .

Por tanto, se puede caracterizar al **estado total** del sistema como,

$$|k_1 \dots k_N\rangle^{S,A} \equiv |n_1, n_2 \dots\rangle^{S,A},$$

con lo cual es posible describir en la base de números de ocupación al sistema,

$$\hat{H} |n_1, n_2 \dots\rangle^{S,A} = E |n_1, n_2 \dots\rangle^{S,A} \quad \forall E = \sum_{k=1}^{\infty} n_k \epsilon_k,$$

$$\hat{N} |n_1, n_2 \dots\rangle^{S,A} = N |n_1, n_2 \dots\rangle^{S,A} \quad \forall N = \sum_{k=1}^{\infty} n_k.$$

# Sistemas cuánticos ideales

## Números de ocupación

Dado que el **número de ocupación** también es un observable, se puede definir el operador  $\hat{n}_k$ ,

$$\hat{n}_k |n_1, n_2 \dots n_k \dots\rangle^{S,A} = n_k |n_1, n_2 \dots n_k \dots\rangle^{S,A},$$

siendo  $n_k = \begin{cases} 0, 1, 2 \dots & \leftarrow \text{bosones}, \\ 0, 1 & \leftarrow \text{fermiones}, \end{cases}$

donde estos estados obedecen las condiciones de ortonormalización:

$${}^{S,A} \langle n'_1, n'_2 \dots | n_1, n_2 \dots \rangle^{S,A} = \delta_{n'_1 n_1} \delta_{n'_2 n_2} \dots$$

por tanto, la **matriz de densidad** para el ensamble **canónico** será:

$$\begin{aligned} {}^{S,A} \langle n'_1, n'_2 \dots | \hat{\rho} | n_1, n_2 \dots \rangle^{S,A} \\ = \frac{1}{Z(T, V, N)} {}^{S,A} \langle n'_1, n'_2 \dots | e^{-\beta \hat{H}} | n_1, n_2 \dots \rangle^{S,A}, \\ = \frac{1}{Z(T, V, N)} \exp \left[ -\beta \sum_{k=1}^{\infty} n_k \epsilon_k \right] \delta_{n'_1 n_1} \delta_{n'_2 n_2} \dots, \end{aligned}$$

# Sistemas cuánticos ideales

Números de ocupación

quedando la **función de partición** expresada como,

$$Z(T, V, N) = \sum'_{\{n_k\}} \exp \left[ -\beta \sum_{k=1}^{\infty} n_k \epsilon_k \right],$$

donde se tienen las siguientes consideraciones:

- $\sum'_{\{n_k\}}$  significa que se debe cumplir con la restricción de que  $N$  es **fijo**:  $\sum_{k=1}^{\infty} n_k = N$ .
- La sumatoria corre sobre todos los **sets permitidos**  $\{n_1, n_2 \dots\}$  de números de ocupación que cumplan con la condición anterior.

Para los elementos diagonales de la matriz de densidad, se tiene:

$$P_{\{n_k\}} = {}^{S,A} \langle n_1, n_2 \dots | \hat{\rho} | n_1, n_2 \dots \rangle^{S,A} = \frac{1}{Z(T, V, N)} \exp \left[ -\beta \sum_{k=1}^{\infty} n_k \epsilon_k \right],$$

lo cual representa la **probabilidad** de encontrar el set  $\{n_1, n_2 \dots\}$  en el sistema.

# Sistemas cuánticos ideales

## Números de ocupación

Para el caso del ensamble **macrocanónico** se tiene,

$$\begin{aligned} & {}^{S,A} \langle n'_1, n'_2 \dots | \hat{\rho} | n_1, n_2 \dots \rangle^{S,A} \\ &= \frac{1}{\Theta(T, V, \mu)} {}^{S,A} \langle n'_1, n'_2 \dots | e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})} | n_1, n_2 \dots \rangle^{S,A}, \\ &= \frac{1}{\Theta(T, V, \mu)} \exp \left[ -\beta \sum_{k=1}^{\infty} n_k (\epsilon_k - \mu) \right] \delta_{n'_1 n_1} \delta_{n'_2 n_2} \dots, \end{aligned}$$

con la **función de partición** expresada como,

$$\Theta(T, V, \mu) = \sum_{\{n_k\}} \exp \left[ -\beta \sum_{k=1}^{\infty} n_k (\epsilon_k - \mu) \right],$$

donde **no existe** la restricción en la suma de los números de ocupación, ya que  $N$  es variable. Finalmente, expresando la **probabilidad**,

$$\begin{aligned} P_{\{n_k\}} &= {}^{S,A} \langle n_1, n_2 \dots | \hat{\rho} | n_1, n_2 \dots \rangle^{S,A}, \\ &= \frac{1}{\Theta(T, V, \mu)} \exp \left[ -\beta \sum_{k=1}^{\infty} n_k (\epsilon_k - \mu) \right]. \end{aligned}$$

# Sistemas cuánticos ideales

## Números de ocupación: estadística de Maxwell-Boltzmann

Para poder aplicar el formalismo de números de ocupación a la estadística de **Maxwell-Boltzmann** (MB), se debe tomar en cuenta lo siguiente:

- El set  $\{n_1, n_2 \dots\}$  **no** determina de manera **única** la función producto  $|k_1 \dots k_N\rangle$ , ya que los  $n_k$  **no** contienen información acerca de cual partícula ocupa cual estado.
- Sin embargo, todos los estados-producto compatibles con el set  $\{n_1, n_2 \dots\}$  tienen la misma energía  $\therefore$  la misma **probabilidad**.

Por lo tanto, para contabilizar el número de estados, se considera:

- hay  $N!$  maneras de cambiar la **numeración** de las partículas,
- si se tienen  $n_k$  part. en el estado  $|k\rangle$ , entonces habrá  $n_k!$  permutaciones de part. en  $|k\rangle$ , que **no** arrojan un nuevo macroestado,

$$\therefore \text{cada set } \{n_1, n_2 \dots\} \text{ tiene un peso} = \frac{N!}{n_1! n_2! \dots},$$

debido a la **indistinguibilidad** de las partículas.

# Sistemas cuánticos ideales

Números de ocupación: estadística de Maxwell-Boltzmann

Utilizando la formulación anterior, con el factor de peso:

$$\begin{aligned} Z^{MB}(T, V, N) &= \frac{1}{N!} \sum'_{\{n_k\}} \frac{N!}{n_1! n_2! \dots} \exp \left[ -\beta \sum_{k=1}^{\infty} n_k \epsilon_k \right] \quad \forall \quad \sum_{k=1}^{\infty} n_k = N, \\ &= \frac{1}{N!} \sum_{n_1+n_2+\dots=N} \frac{N!}{n_1! n_2! \dots} \left( e^{-\beta \epsilon_1} \right)^{n_1} \left( e^{-\beta \epsilon_2} \right)^{n_2} \dots \\ &= \frac{1}{N!} \left[ e^{-\beta \epsilon_1} + e^{-\beta \epsilon_2} + \dots \right]^N = \frac{1}{N!} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\beta \epsilon_k} \right]^N \\ &= \frac{1}{N!} \left[ Z^{MB}(T, V, 1) \right]^N, \end{aligned}$$

donde se ha utilizado el teorema multinomial,

$$(x_1 + x_2 + \dots)^m = \sum_{k_1+k_2+\dots=m} \binom{m}{k_1, k_2, \dots} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots$$

# Sistemas cuánticos ideales

## Números de ocupación: descripción general

Para obtener una descripción general estadística para los tres esquemas (MB, BE, FD), se define el factor de peso en cada uno de ellos, para un set de números de ocupación:

$$g_{\{n_k\}}^{MB} = \frac{1}{n_1! n_2! \dots}, \quad g_{\{n_k\}}^{BE} = 1, \quad g_{\{n_k\}}^{FD} = \begin{cases} 1 & \text{si } n_k = 1 \text{ ó } 0, \\ 0 & \text{otro valor.} \end{cases}$$

Con lo cual se puede expresar la **función de partición** canónica y macrocanónica, de manera general:

$$Z(T, V, N) = \sum'_{\{n_k\}} g_{\{n_k\}} \exp \left[ -\beta \sum_{k=1}^{\infty} n_k \epsilon_k \right] \quad \forall \quad \sum_{k=1}^{\infty} n_k = N,$$

$$\Theta(T, V, \mu) = \sum_{\{n_k\}} g_{\{n_k\}} \exp \left[ -\beta \sum_{k=1}^{\infty} n_k (\epsilon_k - \mu) \right],$$

# Sistemas cuánticos ideales

Números de ocupación: descripción general

así como también se puede expresar la **probabilidad** de manera general para ambos ensambles,

$$P_{\{n_k\}}^{Can} = \frac{1}{Z} g_{\{n_k\}} \exp \left[ -\beta \sum_{k=1}^{\infty} n_k \epsilon_k \right],$$

$$P_{\{n_k\}}^{Macro} = \frac{1}{\Theta} g_{\{n_k\}} \exp \left[ -\beta \sum_{k=1}^{\infty} n_k (\epsilon_k - \mu) \right].$$

Las expresiones para la función de partición se pueden simplificar, pero sólo para el ensamble **macrocanónico**, ya que no se tiene la restricción de  $\sum_{k=1}^{\infty} n_k = N$  fijo, como en el ensamble **canónico**.

Analizando para la estadística de **Bose-Einstein**,

$$\Theta^{BE}(T, V, \mu) = \sum_{\{n_k\}} \exp \left[ -\beta \sum_{k=1}^{\infty} n_k (\epsilon_k - \mu) \right] \quad \forall \quad g_{\{n_k\}} = 1,$$

$$= \sum_{n_1, n_2, \dots = 0}^{\infty} \{ \exp [-\beta(\epsilon_1 - \mu)] \}^{n_1} \{ \exp [-\beta(\epsilon_2 - \mu)] \}^{n_2} \dots$$

# Sistemas cuánticos ideales

## Estadística cuántica

lo cual se reduce a lo siguiente,

$$\begin{aligned}\Theta^{BE}(T, V, \mu) &= \sum_{n_1, n_2, \dots = 0}^{\infty} \{\exp[-\beta(\epsilon_1 - \mu)]\}^{n_1} \{\exp[-\beta(\epsilon_2 - \mu)]\}^{n_2} \dots, \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{n_k=0}^{\infty} \{\exp[-\beta(\epsilon_k - \mu)]\}^{n_k}, \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \exp[-\beta(\epsilon_k - \mu)]} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \zeta e^{-\beta \epsilon_k}} \quad \forall \quad \zeta = e^{\beta \mu}.\end{aligned}$$

Para el caso de la estadística de **Fermi-Dirac**,

$$\begin{aligned}\Theta^{FD}(T, V, \mu) &= \sum_{\{n_k\}} \exp \left[ -\beta \sum_{k=1}^{\infty} n_k (\epsilon_k - \mu) \right] \quad \forall \quad g_{\{n_k\}} = 1, \\ &= \sum_{n_1, n_2, \dots = 0}^1 \{\exp[-\beta(\epsilon_1 - \mu)]\}^{n_1} \{\exp[-\beta(\epsilon_2 - \mu)]\}^{n_2} \dots,\end{aligned}$$

# Sistemas cuánticos ideales

## Estadística cuántica

lo cual se puede reducir aún más:

$$\begin{aligned}\Theta^{FD}(T, V, \mu) &= \sum_{n_1, n_2, \dots = 0}^1 \{\exp [-\beta(\epsilon_1 - \mu)]\}^{n_1} \{\exp [-\beta(\epsilon_2 - \mu)]\}^{n_2} \dots \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{n_k=0}^1 \{\exp [-\beta(\epsilon_k - \mu)]\}^{n_k} \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \{1 + \exp [-\beta(\epsilon_k - \mu)]\} = \prod_{k=1}^{\infty} \left\{1 + \zeta e^{-\beta \epsilon_k}\right\}.\end{aligned}$$

Finalmente para la estadística de **Maxwell-Botzmann**,

$$\begin{aligned}\Theta^{MB} &= \sum_{n_1, n_2, \dots = 0}^{\infty} \frac{1}{n_1! n_2! \dots} \{\exp [-\beta(\epsilon_1 - \mu)]\}^{n_1} \{\exp [-\beta(\epsilon_2 - \mu)]\}^{n_2} \dots \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{n_k=0}^{\infty} \frac{1}{n_k!} \{\exp [-\beta(\epsilon_k - \mu)]\}^{n_k} = \prod_{k=1}^{\infty} \exp \left[ \zeta e^{-\beta \epsilon_k} \right].\end{aligned}$$

# Sistemas cuánticos ideales

Estadística cuántica: gran potencial

Con la **función de partición** en la formulación cuántica, es posible obtener la descripción termodinámica mediante el **gran potencial**,

$$\Phi(T, V, \mu) = -k_B T \ln \Theta(T, V, \mu) = E - TS - \mu N = -pV,$$

por lo que se tiene para cada diferente estadística:

$$\Phi^{MB} = -k_B T \ln \left\{ \prod_{k=1}^{\infty} \exp \left[ \zeta e^{-\beta \epsilon_k} \right] \right\} = -k_B T \sum_{k=1}^{\infty} \zeta e^{-\beta \epsilon_k},$$

$$\Phi^{BE} = -k_B T \ln \left\{ \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \exp [\zeta e^{-\beta \epsilon_k}]} \right\} = k_B T \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left\{ 1 - \zeta e^{-\beta \epsilon_k} \right\},$$

$$\Phi^{FD} = -k_B T \ln \left\{ \prod_{k=1}^{\infty} \left[ 1 + \zeta e^{-\beta \epsilon_k} \right] \right\} = -k_B T \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left\{ 1 + \zeta e^{-\beta \epsilon_k} \right\},$$

donde la **fugacidad** viene dada como  $\zeta = e^{\beta \mu}$ .

# Sistemas cuánticos ideales

## Estadística cuántica: gran potencial

Las tres expresiones anteriores se pueden condensar en una sola:

$$\ln \Theta(T, V\mu) = \frac{pV}{k_B T} = \frac{1}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \ln [1 + a\zeta e^{-\beta\epsilon_k}],$$

donde:  $a = \begin{cases} +1 & \rightarrow \text{Fermi-Dirac (FD),} \\ 0 & \rightarrow \text{Maxwell-Boltzmann (MB),} \\ -1 & \rightarrow \text{Bose-Einstein (BE).} \end{cases}$

Definiendo la exp. general para el **valor esperado** en el macrocanónico,

$$\langle \hat{O} \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{O}) = \frac{\text{Tr} [\exp \{-\beta(\hat{H} - \mu\hat{N})\} \hat{O}]}{\text{Tr} [\exp \{-\beta(\hat{H} - \mu\hat{N})\}]},$$

$$= \frac{1}{\Theta} \sum_{\{n_k\}} g\{n_k\}^{S,A} \langle n_1, n_2 \dots | \exp \{-\beta(\hat{H} - \mu\hat{N})\} \hat{O} | n_1, n_2 \dots \rangle^{S,A}$$

$$= \frac{1}{\Theta} \sum_{\{n_k\}} g\{n_k\} \exp \left\{ -\beta \sum_{k=1}^{\infty} n_k (\epsilon_k - \mu) \right\} O(n_1, n_2 \dots).$$

# Sistemas cuánticos ideales

Valores esperados

Calculando el **valor esperado** del **número de partículas**,

$$\begin{aligned}\langle \hat{N} \rangle &= \frac{1}{\Theta} \sum_{\{n_k\}} g\{n_k\} \exp \left\{ -\beta \sum_{k=1}^{\infty} n_k (\epsilon_k - \mu) \right\} N(n_1, n_2 \dots), \\ &= \frac{1}{\Theta} \sum_{\{n_k\}} g\{n_k\} \exp \left\{ -\beta \sum_{k=1}^{\infty} n_k (\epsilon_k - \mu) \right\} \sum_{k=1}^{\infty} n_k, \\ &= \frac{1}{\Theta} \left[ \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \sum_{\{n_k\}} g\{n_k\} \exp \left\{ -\beta \sum_{k=1}^{\infty} n_k (\epsilon_k - \mu) \right\} \right]_{T,V}, \\ &= \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \Theta \Big|_{T,V} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\zeta^{-1} e^{\beta \epsilon_k} + a} \quad \forall \quad \zeta = e^{\beta \mu},\end{aligned}$$

en donde se ha utilizado la expresión general para el gran potencial,

$$-\frac{\Phi}{k_B T} = \ln \Theta = \frac{1}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left[ 1 + ae^{-\beta(\epsilon_k - \mu)} \right].$$

# Sistemas cuánticos ideales

## Valores esperados

Para el caso del **Hamiltoniano** se tiene:

$$\begin{aligned}\langle \hat{H} \rangle &= \frac{1}{\Theta} \sum_{\{n_k\}} g_{\{n_k\}} \exp \left\{ -\beta \sum_{k=1}^{\infty} n_k (\epsilon_k - \mu) \right\} E(n_1, n_2 \dots), \\ &= \frac{1}{\Theta} \sum_{\{n_k\}} g_{\{n_k\}} \exp \left\{ -\beta \sum_{k=1}^{\infty} n_k (\epsilon_k - \mu) \right\} \sum_{k=1}^{\infty} n_k \epsilon_k, \\ &= \frac{1}{\Theta} \sum_{\{n_k\}} g_{\{n_k\}} \exp \left\{ -\beta \sum_{k=1}^{\infty} n_k \epsilon_k \right\} \exp \left\{ \beta \mu \sum_{k=1}^{\infty} n_k \right\} \sum_{k=1}^{\infty} n_k \epsilon_k, \\ &= \frac{1}{\Theta} \left[ -\frac{\partial}{\partial \beta} \sum_{\{n_k\}} g_{\{n_k\}} \exp \left\{ -\beta \sum_{k=1}^{\infty} n_k \epsilon_k \right\} \zeta^N \right]_{\zeta, V} \quad \forall \quad \zeta = e^{\beta \mu}, \\ &= -\left. \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \Theta \right|_{\zeta, V} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon_k}{\zeta^{-1} e^{\beta \epsilon_k} + a},\end{aligned}$$

en donde se ha considerado a la fugacidad  $\zeta$  como constante en la derivación parcial.

# Sistemas cuánticos ideales

Valor esperado del número de ocupación

Analizando los resultados para  $\langle \hat{N} \rangle$  y  $\langle \hat{H} \rangle$ , se puede definir un **operador de número de ocupación** para el estado  $|k\rangle$  de una partícula,

$$\hat{n}_k |n_1, n_2 \dots\rangle = n_k |n_1, n_2 \dots\rangle,$$

$$\forall \quad \langle \hat{N} \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \hat{n}_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \hat{n}_k \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\zeta^{-1} e^{\beta \epsilon_k} + a},$$

$$\langle \hat{H} \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \hat{n}_k \epsilon_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \hat{n}_k \rangle \epsilon_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon_k}{\zeta^{-1} e^{\beta \epsilon_k} + a},$$

$$\therefore \quad \langle \hat{n}_k \rangle = \frac{1}{\zeta^{-1} e^{\beta \epsilon_k} + a} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} + a},$$

lo cual también se puede obtener de la exp. de valor esperado,

$$\langle \hat{n}_k \rangle = \frac{1}{\Theta} \sum_{\{n_k\}} g_{\{n_k\}} \exp \left\{ -\beta \sum_{k=1}^{\infty} n_k (\epsilon_k - \mu) \right\} n_k = -\frac{1}{\beta} \left. \frac{\partial}{\partial \epsilon_k} \ln \Theta \right|_{\zeta, V, \epsilon_{i \neq k}},$$

donde  $\epsilon_{i \neq k}$  significa que todas las demás energías se mantienen **cte.**

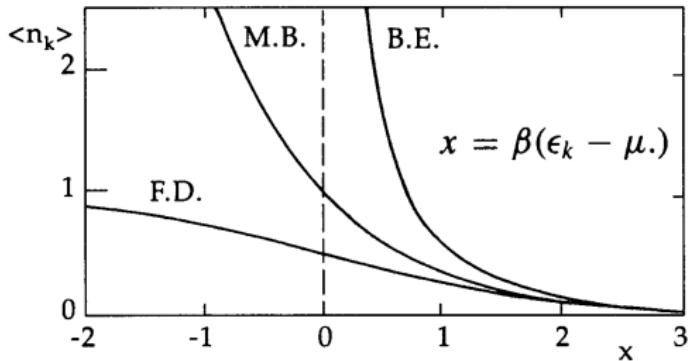
# Sistemas cuánticos ideales

## Comportamiento del número de ocupación

Analizando el comportamiento del **número de ocupación**  $\langle \hat{n}_k \rangle$  en las diferentes formulaciones:

$$\langle \hat{n}_k \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} + a},$$

$$\forall a = \begin{cases} +1 & \rightarrow \text{FD}, \\ 0 & \rightarrow \text{MB}, \\ -1 & \rightarrow \text{BE}, \end{cases}$$



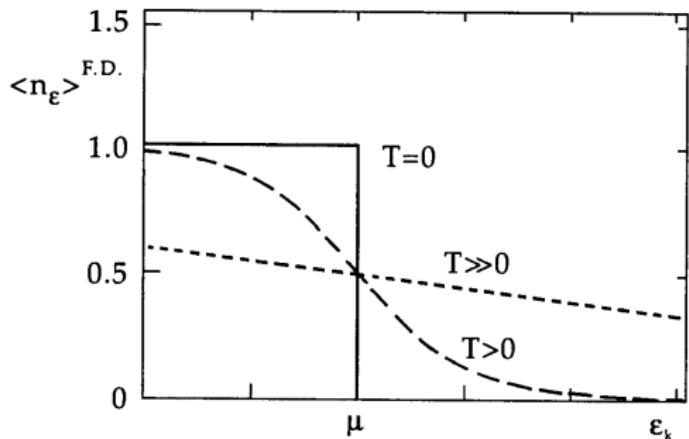
- $x \gg 1 \Rightarrow \langle \hat{n}_k \rangle \approx e^{-x}$ , por tanto, los tres esquemas dan números de ocupación **idénticos**.
- **BE**:  $x \rightarrow 0 \Rightarrow \langle \hat{n}_k \rangle \rightarrow \infty$ , lo cual no tiene sentido **físico**, por lo que se requiere:  $\mu < \min\{\epsilon_k\}$ , donde  $\mu$  se determina para un **número de partículas** dado:

$$N = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} + a}.$$

# Sistemas cuánticos ideales

## Comportamiento del número de ocupación

Analizando ahora el comportamiento del caso **FD** para dif. temp.  $T$ ,



$$\langle \hat{n}_k \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} + 1},$$

- $T = 0 \Rightarrow \beta \rightarrow \infty$ ,

$$\langle \hat{n}_k \rangle_{\epsilon_k > \mu} \rightarrow 0,$$

$$\langle \hat{n}_k \rangle_{\epsilon_k < \mu} \rightarrow 1,$$

ocurriendo la **discontinuidad** en  $\mu = \epsilon_F$ , que representa a la energía del **último** estado ocupado.

- $T > 0$ ,  
más fermiones son excitados a **niveles mayores** en energía, modificando la distribución.

# Contenido: Tema 04

- 4. Gases ideales cuánticos: Gas de Bose-Einstein
  - 4.1 Sistemas cuánticos ideales
  - 4.2 Gas de Bose-Einstein**
  - 4.3 Condensado



# Gas de Bose-Einstein

## Fundamentos

Recordando que los efectos cuánticos en la estadística son observados cuando **no** se cumple con la siguiente condición:

$$n\lambda^3 = \frac{N}{V}\lambda^3 = \frac{N}{V} \left( \frac{h^2}{2\pi m k_B T} \right)^{3/2} \ll 1,$$

lo cual involucra,

- **bajas** densidades:  $N/V \ll 1$ ,
- **altas** temperaturas:  $1/k_B T \ll 1$ .

Por tanto, en tal caso es posible estudiar la influencia de los efectos cuánticos en **gases ideales**, y en particular para la estadística de **Bose-Einstein**,

$$\Theta(T, V, \mu) = \prod_k \frac{1}{1 - \zeta e^{-\beta\epsilon_k}} \quad \forall \quad \zeta = e^{\beta\mu},$$

$$\Phi(T, V, \mu) = -k_B T \ln \Theta(T, V, \mu) = k_B T \sum_k \ln \left\{ 1 - \zeta e^{-\beta\epsilon_k} \right\}.$$

# Gas de Bose-Einstein

## Fundamentos

En donde el **potencial químico** (o la fugacidad) se obtiene del **número de partículas** del sistema,

$$N = \sum_k \langle n_k \rangle = \sum_k \frac{1}{\zeta^{-1} e^{\beta \epsilon_k} - 1} \quad \forall \quad \mu \leq \min \{ \epsilon_k \},$$

si se considera que el **menor** nivel de energía corresponde a  $\epsilon_k = 0$ , entonces:

$$\mu \leq 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \zeta \leq 1.$$

Para analizar el efecto del rango de valores permitidos para el **potencial químico**, se observa la expresión de  $N$ ,

$$N = \sum_k \frac{1}{\zeta^{-1} e^{\beta \epsilon_k} - 1},$$

en donde se considera que el vol.  $V$  es muy grande, por tanto:

$$\sum_k \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} = \frac{V}{(2\pi)^3} \int k^2 dk d\Omega.$$

# Gas de Bose-Einstein

## Fundamentos

Considerando al gas como **ideal**, entonces  $\epsilon_k = \hbar^2 k^2 / 2m$ :

$$\sum_k \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int k^2 dk d\Omega = \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \int \epsilon^{1/2} d\epsilon,$$

lo cual representa el número de estados en el espacio fase de una partícula, por tanto puede ser relacionado con la **densidad de estados**,

$$g(\epsilon) = \frac{\partial \Sigma}{\partial \epsilon} = \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \epsilon^{1/2},$$

obteniendo así,

$$\sum_k \rightarrow \int g(\epsilon) d\epsilon.$$

Analizando el resultado anterior, se observa:

$$\text{si } \epsilon = 0 \Rightarrow g(0) = 0 \Rightarrow \int \rightarrow 0 \therefore N = 0 !!$$

# Gas de Bose-Einstein

## Estado base

El resultado anterior no muestra la física de un **gas de Bose**, en el cual se puede tener en el **estado base** desde 1 partícula hasta un condensado, por tanto, debe ser incluido el **estado base** explícitamente en la expresión integral,

$$\Phi(T, V, \mu) = k_B T \sum_k \ln \{1 - \zeta e^{-\beta \epsilon_k}\} \Rightarrow \Phi_0 = k_B T \ln(1 - \zeta),$$

$$N(T, V, \mu) = \sum_k \frac{1}{\zeta^{-1} e^{\beta \epsilon_k} - 1} \Rightarrow N_0 = \frac{1}{\zeta^{-1} - 1} = \frac{\zeta}{1 - \zeta},$$

por lo que se tendrá para las expresiones integrales,

$$\begin{aligned} \Phi(T, V, \mu) &= k_B T \int g(\epsilon) \ln \{1 - \zeta e^{-\beta \epsilon_k}\} d\epsilon + k_B T \ln(1 - \zeta), \\ &= -\frac{4\pi V}{3h^3} (2m)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{3/2}}{\zeta^{-1} e^{\beta \epsilon} - 1} d\epsilon + \frac{1}{\beta} \ln(1 - \zeta), \end{aligned}$$

# Gas de Bose-Einstein

## Estado base

así como también para el número de partículas,

$$\begin{aligned} N(T, V, \mu) &= \int g(\epsilon) \frac{1}{\zeta^{-1} e^{\beta\epsilon} - 1} d\epsilon + \frac{\zeta}{1 - \zeta}, \\ &= \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{1/2}}{\zeta^{-1} e^{\beta\epsilon} - 1} d\epsilon + \frac{\zeta}{1 - \zeta}, \end{aligned}$$

analizando el resultado anterior:

- El primer término representa el número de partículas en los niveles **excitados**,  $N_\epsilon$ .
- El segundo término es la contribución del **estado base** ( $\epsilon = 0$ ),  $N_0$ , al número total de partículas.

Ambas expresiones se pueden reducir usando las siguientes transformaciones,

$$\beta\epsilon = x, \quad \lambda = \left( \frac{h^2}{2\pi m k_B T} \right)^{1/2}.$$

# Gas de Bose-Einstein

## Funciones de Bose-Einstein

Para el caso del **gran potencial**,

$$\begin{aligned}\Phi(T, V, \mu) &= -\frac{4\pi V}{3h^3}(2m)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{3/2}}{\zeta^{-1}e^{\beta\epsilon} - 1} d\epsilon + \frac{1}{\beta} \ln(1 - \zeta), \\ &= -\frac{4V}{3\beta\sqrt{\pi}\lambda^3} \int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{\zeta^{-1}e^x - 1} dx + \frac{1}{\beta} \ln(1 - \zeta),\end{aligned}$$

mientras que para el **número de partículas**,

$$\begin{aligned}N(T, V, \mu) &= \frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{3/2} \int_0^\infty \frac{e^{1/2}}{\zeta^{-1}e^{\beta\epsilon} - 1} d\epsilon + \frac{\zeta}{1 - \zeta}, \\ &= \frac{2V}{\sqrt{\pi}\lambda^3} \int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{\zeta^{-1}e^x - 1} + \frac{\zeta}{1 - \zeta},\end{aligned}$$

observando lo anterior, se definen las funciones de **Bose-Einstein**,

$$g_r(\zeta) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^\infty \frac{x^{r-1}}{\zeta^{-1}e^x - 1} dx \quad \forall \quad 0 \leq \zeta \leq 1, \quad r \in \mathbb{R},$$

# Gas de Bose-Einstein

## Funciones de Bose-Einstein

por tanto, aplicando para los casos requeridos,

$$\Phi : r = \frac{5}{2} \Rightarrow g_{5/2}(\zeta) = \frac{1}{\Gamma(5/2)} \int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{\zeta^{-1}e^x - 1} dx \quad \forall \quad \Gamma(5/2) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi},$$

$$N : r = \frac{3}{2} \Rightarrow g_{3/2}(\zeta) = \frac{1}{\Gamma(3/2)} \int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{\zeta^{-1}e^x - 1} dx \quad \forall \quad \Gamma(3/2) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

con las expresiones anteriores, las definiciones de  $\Phi$  y  $N$  quedan como,

$$\Phi(T, V, \mu) = -\frac{4V}{3\beta\sqrt{\pi}\lambda^3} \int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{\zeta^{-1}e^x - 1} dx + \frac{1}{\beta} \ln(1 - \zeta),$$

$$\therefore \Phi(T, V, \mu) = -\frac{V}{\beta\lambda^3} g_{5/2}(\zeta) + \frac{1}{\beta} \ln(1 - \zeta),$$

$$N(T, V, \mu) = \frac{2V}{\sqrt{\pi}\lambda^3} \int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{\zeta^{-1}e^x - 1} dx + \frac{\zeta}{1 - \zeta},$$

$$\therefore N(T, V, \mu) = \frac{V}{\lambda^3} g_{3/2}(\zeta) + \frac{\zeta}{1 - \zeta}.$$

# Gas de Bose-Einstein

## Funciones de Bose-Einstein

Analizando con detalle la integral de la función de **Bose-Einstein**,

$$g_r(\zeta) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^\infty \frac{x^{r-1}}{\zeta^{-1}e^x - 1} dx \quad \forall \quad 0 \leq \zeta \leq 1,$$

en particular el denominador del integrando,

$$\frac{1}{\zeta^{-1}e^x - 1} = \frac{\zeta e^{-x}}{1 - \zeta e^{-x}} = \zeta e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} (\zeta e^{-x})^k = \sum_{k=1}^{\infty} (\zeta e^{-x})^k,$$

lo cual se sustituye en la expresión integral, y haciendo  $y = xk$ :

$$\begin{aligned} g_r(\zeta) &= \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^\infty dx \ x^{r-1} \sum_{k=1}^{\infty} \zeta^k e^{-xk} = \frac{1}{\Gamma(r)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta^k}{k^r} \int_0^\infty dy e^{-y} y^{r-1}, \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta^k}{k^r} \quad \forall \quad 0 \leq \zeta \leq 1, \end{aligned}$$

en donde se identifica a la integral como la **función Gamma**  $\Gamma(r)$ .

# Gas de Bose-Einstein

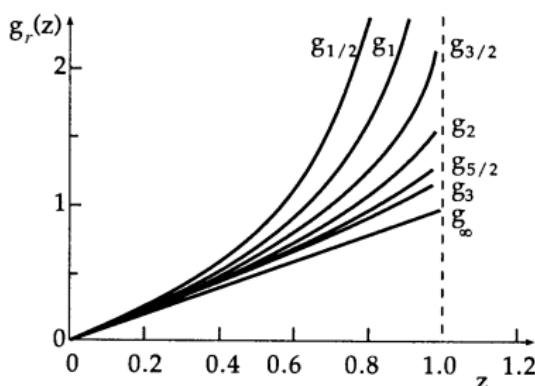
## Funciones de Bose-Einstein

Analizando el comportamiento de la función  $g_r(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} \zeta^k/k^r$ :

- En el caso de  $\zeta = 1$ ,

$$g_r(1) = \sum_{k=1}^{\infty} 1/k^r = \mathcal{Z}(r),$$

donde  $\mathcal{Z}(r)$  es la función **Zeta de Riemann**, y converge sólo para  $r > 1$ .



- Es monótonamente **creciente** en  $\zeta$ .
- Es monótonamente **decreciente** en  $r$ .
- $g_r(0) = 0 \quad \forall \quad r$ .
- $\lim_{r \rightarrow \infty} g_r(\zeta) \approx \zeta$ .
- $\lim_{\zeta \rightarrow 0} g_r(\zeta) \approx \zeta$ .



# Contenido: Tema 04

- 4. Gases ideales cuánticos: Gas de Bose-Einstein
  - 4.1 Sistemas cuánticos ideales
  - 4.2 Gas de Bose-Einstein
  - 4.3 Condensado



# Condensado

## Número de partículas

De la relación del **número de partículas** se puede determinar la **fugacidad** o el **potencial químico**,

$$N = N_\epsilon + N_0 = \frac{V}{\lambda^3} g_{3/2}(\zeta) + \frac{\zeta}{1 - \zeta},$$

$N_\epsilon \rightarrow$  númer. partículas en estados **excitados**,

$N_0 \rightarrow$  númer. partículas en el estado **base**.

Analizando  $N_\epsilon$ , se observa que para una temperatura y volumen dados se tiene un **máximo de partículas** en estados excitados,

$$N_\epsilon^{MAX} = \frac{V}{\lambda^3} g_{3/2}(1) = \frac{V}{\lambda^3} \mathcal{Z}(3/2) \propto VT^{3/2} \quad \forall \quad \lambda = \left( \frac{h^2}{2\pi m k_B T} \right)^{1/2},$$

lo cual indica que **no** puede haber más partículas que  $N_\epsilon^{MAX}$  en estados **excitados**.

# Gas de Bose-Einstein

## Número de partículas

Considerando el siguiente límite,

$$N \rightarrow \infty \quad \& \quad V \rightarrow \infty \quad \forall \quad N/V = \text{cte.},$$

$$\therefore \quad N = N_\epsilon + N_0 \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{N_\epsilon}{N} + \frac{N_0}{N},$$

por lo que se tiene para el rango de valores de  $\zeta$ ,

- $\zeta < 1 \ (\mu < 0)$

$$N_0 = \frac{\zeta}{1 - \zeta} \ll N \quad \Rightarrow \quad \frac{N_0}{N} \rightarrow 0,$$

$$\therefore \quad N \approx N_\epsilon < N_\epsilon^{MAX}.$$

- $\zeta = 1 \ (\mu = 0)$

$$N_\epsilon = N_\epsilon^{MAX} < N \quad \Rightarrow \quad \frac{N_0}{N} = 1 - \frac{N_\epsilon^{MAX}}{N},$$

es decir, el estado excitado no puede contener a todas las partículas, por lo que es favorable para el sistema llenar al **estado base** ( $\epsilon = 0$ ) con el **exceso de partículas**.

# Condensado

## Fenómeno del condensado de Bose-Einstein

Resumiendo el análisis anterior,

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty, \\ V \rightarrow \infty}} = \begin{cases} N_\epsilon/N = 1, & N_0/N \rightarrow 0 \quad \forall \zeta < 1, \\ N_\epsilon^{MAX}/N + N_0/N = 1 & \forall \zeta = 1, \end{cases}$$

donde  $N_\epsilon^{MAX} = (V/\lambda^3)\mathcal{Z}(3/2)$ , siendo este comportamiento conocido como el fenómeno de **condensación de Bose**.

Considerando **fijas** las var.  $N$ ,  $V$ , y  $T$ , se pueden tener dos casos:

### Sin condensado

$$N < N_\epsilon^{MAX} = (V/\lambda^3)\mathcal{Z}(3/2), \\ \therefore N\lambda^3/V < \mathcal{Z}(3/2),$$

donde  $\zeta < 1$ , y se obtiene de:

$$N = (V/\lambda^3)g_{3/2}(\zeta),$$

siendo  $N_0/N \rightarrow 0$ .

### Condensado

$$N > N_\epsilon^{MAX} = (V/\lambda^3)\mathcal{Z}(3/2), \\ \therefore N_0 = N - (V/\lambda^3)\mathcal{Z}(3/2),$$

donde  $\zeta = 1$ , siendo el número de estados excitados insuficientes para contener a todas las partículas del sistema.

# Condensado

## Fenómeno del condensado de Bose-Einstein

Por tanto, se tiene que la **transición** entre tener o no un condensado ocurre cuando:

$$\frac{N\lambda^3}{V} = \mathcal{Z}(3/2) = g_{3/2}(\zeta = 1),$$

donde:  $\lambda = \left( \frac{\hbar^2}{2m\pi k_B T} \right)^{1/2}$ ,

- Para **bajas densidades** ( $N/V$  pequeño) y **altas temperaturas** ( $\lambda$  pequeño) se tiene suficiente energía térmica para excitar a casi todas las partículas a  $\epsilon > 0$ , por lo que **no hay condensado**.
- Para **altas densidades** ( $N/V$  grande) y **bajas temperaturas** ( $\lambda$  grande) se tiene un sistema cuántico en donde la correlación positiva de los bosones se hace evidente, induciendo al **condensado**.

# Condensado

Dependencia con la temperatura

Dado que el punto de **transición** entre tener o no un **condensado** viene dado por,

$$\frac{N\lambda^3}{V} = \mathcal{Z}(3/2) = g_{3/2}(1),$$

entonces es posible definir una **temperatura crítica** ( $T_c$ ) por debajo de la cual el condensado **existe**:

$$N = N_\epsilon^{MAX}(T_c) = \frac{V}{\lambda^3(T_c)} \mathcal{Z}(3/2) \Rightarrow k_B T_c = \left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} \frac{h^2}{2\pi m [\mathcal{Z}(3/2)]^{2/3}}$$

$$\text{Si } T < T_c \Rightarrow N_\epsilon = N_\epsilon^{MAX}(T) = \frac{V}{\lambda^3(T)} \mathcal{Z}(3/2),$$

$$\therefore \frac{N_\epsilon(T)}{N} = \frac{\lambda^3(T_c)}{\lambda^3(T)} = \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} \quad \forall \quad \lambda = \left[\frac{h^2}{2\pi m k_B T}\right]^{1/2},$$

$$\Rightarrow \frac{N_0}{N} = 1 - \frac{N_\epsilon}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}.$$

# Condensado

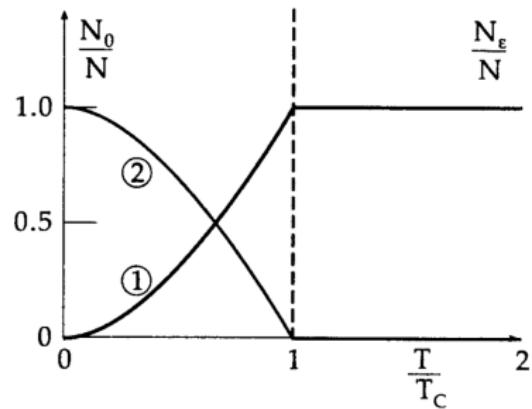
## Dependencia con la temperatura

$$\text{Si } T > T_c \Rightarrow \frac{N_\epsilon}{N} = 1, \quad \frac{N_0}{N} = 0.$$

Resumiendo los res. obtenidos,

$$\frac{N_\epsilon}{N} = \begin{cases} 1 & \rightarrow T \geq T_c \\ (T/T_c)^{3/2} & \rightarrow T < T_c, \end{cases}$$

$$\frac{N_0}{N} = \begin{cases} 0 & \rightarrow T \geq T_c \\ 1 - (T/T_c)^{3/2} & \rightarrow T < T_c, \end{cases}$$



Analizando en la vecindad del **punto crítico**,

$$T < T_c \rightarrow N_\epsilon/N = (T/T_c)^{3/2} = [1 - (T_c - T)/T_c]^{3/2},$$
$$\Rightarrow N_\epsilon/N \approx 1 - (3/2)(T_c - T)/T_c \quad \therefore \quad N_0/N \approx (3/2)(T_c - T)/T_c.$$

# Condensado

## Dependencia con la temperatura

De la expresión del número de partículas obtenida anteriormente,

$$N = \frac{V}{\lambda^3} g_{3/2}(\zeta) + \frac{\zeta}{1 - \zeta},$$
$$\therefore \frac{N}{V} \lambda^3 = g_{3/2}(\zeta) + \frac{\lambda^3}{V} \left( \frac{\zeta}{1 - \zeta} \right),$$

analizando el **límite clásico**:

- **Bajas** densidades:  $N/V \ll 1 \quad \forall \quad V \rightarrow \infty$ ,
- **Altas** temperaturas:  $\lambda \ll 1$ ,

por tanto, de la expresión anterior,

$$\frac{N}{V} \lambda^3 \ll 1 \Rightarrow g_{3/2}(\zeta) \approx \zeta, \quad \forall \quad g_r(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta^k}{k^r} \quad \& \quad \zeta \ll 1,$$
$$\therefore N = e^{\beta \mu} \frac{V}{\lambda^3} \quad \Leftarrow \quad \text{resultado clásico.}$$

# Condensado

## Dependencia con la temperatura

Analizando el comportamiento de  $\zeta$  en función de la temperatura:

$$T < T_c \Rightarrow N > N_{\epsilon}^{MAX} = \frac{V}{\lambda^3} \mathcal{Z}(3/2) \therefore \frac{V}{N\lambda^3} < \mathcal{Z}(3/2)^{-1} \quad \forall \quad \zeta \approx 1,$$
$$T > T_c \Rightarrow N < N_{\epsilon}^{MAX} = \frac{V}{\lambda^3} \mathcal{Z}(3/2) \therefore \frac{V}{N\lambda^3} > \mathcal{Z}(3/2)^{-1},$$
$$\Rightarrow g_{3/2}(\zeta) = \frac{N}{V} \lambda^3 \quad \forall \quad \zeta < 1.$$

