ESPACIOS VECTORIALES

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS

Curso Básico - Otoño 2020

Omar De la Peña-Seaman

Instituto de Física (IFUAP)

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP)

Curso: Espacios Vectoriales

Información General

Período de clases (18 sem.)

17 Agosto – 9 Diciembre 2020

Horario

Lunes, Miércoles: 10–12 hrs,
Jueves: 10–11 hrs.

Criterios de evaluación

- Tareas de cada tema: **40%**
- Exámenes: **60%**

Bibliografía

1. S. Lipschutz, *Linear Algebra*, 4th. edition (Mc Graw Hill, 2009).
2. S. Lang, *Linear Algebra*, 3rd. edition (Springer-Verlag, New York, 1987).
3. G.B. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, 7nd edition (Elsevier, 2013).
4. K.F. Riley, *Mathematical Methods for Physics and Engineering*, 3nd. edition (Cambridge University Press, 2006).
5. P. Dennery, *Mathematics for Physicists*, 1st. edition (Dover Publications, New York, 1996).

Curso Espacios Vectoriales

Contenido del curso

1. Espacios vectoriales (2 sem.)
2. Operadores lineales (4 sem.)
3. Producto interno, ortogonalidad (3 & $1/2$ sem.)
4. Eigenvalores y eingenvectores (2 & $1/2$ sem.)
5. Operadores y espacios (3 & $1/2$ sem.)
6. Tensores (2 & $1/2$ sem.)

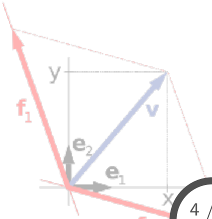
Fuente de consulta e información

Las sesiones de clase, tareas y exámenes estarán disponibles *on-line* al término de cada tema en la siguiente dirección:

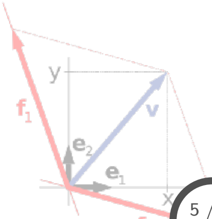
`http://www.ifuap.buap.mx/~oseaman/vector_spaces_2020.html`

Contenido

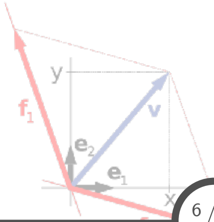
1. Espacios Vectoriales



Contenido: Tema 01



Contenido: Tema 01



Consideremos a V como un set, no vacío, asociado a un **campo de escalares** K y que posee **dos** operaciones,

- **Adición vectorial**

$$u, v \in V \;\; \Rightarrow \;\; u + v \in V,$$

- **Multiplicación escalar**

$$u \in V; \;\; k \in K \;\; \Rightarrow \;\; ku \in V,$$

a este set se le conoce como un **espacio vectorial**, sobre K, si cumple con los siguientes axiomas:

- **Asociativa**: $(u + v) + w = u + (v + w)$,
- **Elemento nulo**: $u + 0 = 0 + u = u, \;\; \forall \, u \in V$,
- **Elemento inverso** $u + (-u) = (-u) + u = 0, \;\; \forall \, u \in V$,
- **Conmutativa**: $u + v = v + u$.

Lo anterior representa la estructura **aditiva** del espacio V, lo cual se puede condensar expresando que V es un **grupo conmutativo bajo la adición**.

Campos y espacios vectoriales

Definiciones generales, ejemplos de espacios vectoriales

De manera adicional, para que V se considere un espacio vectorial, se debe cumplir también con lo siguiente,

- $k(u+v) = ku + kv \;\; \forall\; k \in K$,
- $(a+b)u = au + bu \;\; \forall\; a,b \in K$,
- $(ab)u = a(bu) \;\; \forall\; a,b \in K$,
- $1u = u \;\; \forall\; 1 \in K$, siendo 1 el **escalar unitario**.

Lo anterior se relaciona con la **acción** del campo K de escalares en el espacio vectorial V.

Espacio K^n

sea K un campo arbitrario $\Rightarrow K^n$ denota el set de todos los elementos de n entradas de K $\therefore K^n$ será un espacio vectorial sobre K, cuando:

- **Adición vectorial**: $(a_1, a_2 \ldots a_n) + (b_1, b_2 \ldots b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2 \ldots a_n + b_n)$.
- **Mult. escalar**: $k(a_1, a_2 \ldots a_n) = (ka_1, ka_2 \ldots ka_n)$.
- **Cero**: $0 = (0, 0 \ldots 0)$.
- **Negativo**: $-(a_1, a_2 \ldots a_n) = (-a_1, -a_2 \ldots - a_n)$.

Campos y espacios vectoriales

Ejemplos de espacios vectoriales

Espacio polinomial $P(t)$

Sea $P(t)$ un set de polinomios del tipo,

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_s t^s \quad \forall \quad s = 1, 2, \ldots,$$

y los coeficientes a_i pertenecen al campo K, $\Rightarrow$ $P(t)$ es un espacio vectorial en K, con las sig. operaciones:

- **Adición vectorial**: $p(t) + q(t) \in P(t)$.
- **Mult. escalar**: $kp(t) \in P(t)$.
- **Cero**: $a_i = 0 \quad \forall \quad i = 0, 1 \ldots s$.
- **Negativo**: $-p(t) = -a_0 - a_1 t - a_2 t^2 - \ldots - a_s t^s$.

Espacio polinomial $P_n(t)$

Sea $P_n(t)$ un set de polinomios $p(t)$ sobre K, en donde el grado de $p(t)$ es menor o igual a n,

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_s t^s \quad \forall \quad s \leq n,$$

y cumple con las operaciones definidas para el espacio $P(t)$.

Espacio matricial $M_{m,n}$

$M_{m,n}$, o simplemente M, denota un set de todas las matrices de $m \times n$ sobre un campo K, cumpliendo:

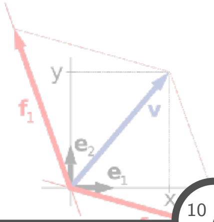
- **Adición**: $A_{m,n} + B_{m,n} \ \in M$.
- **Mult. escalar**: $kA_{m,n} \ \in M$.

Espacio de funciones $F(X)$

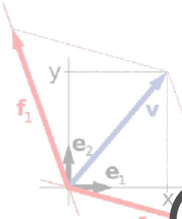
Sea X un set, no vacío, y K un campo arbitrario, entonces $F(X)$ denota el set de **todas** las funciones de X en K, y se considera un espacio vectorial si cumple:

- **Adición**: $f(x) + g(x) = (f+g)(x)$,
- **Mult. escalar**: $kf(x) = (kf)(x)$,
- **Cero**: $0(x) = 0$,
- **Negativo**: $-f(x) = (-f)(x)$,

en donde se tiene que $x \in X$.



Contenido: Tema 01



Combinaciones lineales y conjuntos de expansión

Definición

Sea V un espacio vectorial sobre el campo K, entonces un vector v en V será una **combinación lineal** de vectores $u_1, u_2 \ldots u_m$ en V, si existen **escalares** $a_1, a_2 \ldots a_m$ en K tal que:

$$v = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_m u_m.$$

De manera alterna, se puede considerar que v es una **combinación lineal** de $u_1, u_2 \ldots u_m$ en V, si existe una solución a la ecuación vectorial:

$$v = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \ldots + x_m u_m,$$

en donde el set $x_1, x_2 \ldots x_m$ son **escalares** en K desconocidos.

Obtener la combinación lineal de v en términos de $u_1, u_2 \ldots u_n$ en K^n es **equivalente** a resolver el sistema $Ax = B$ de ecs. lineales, en donde v es el vector B de ctes. y los $u_i' s$ son las columnas de la matriz de ctes. A.

Sea V un espacio vectorial sobre K, entonces se dice que los vectores $u_1, u_2 \ldots u_m$ **expanden** V o forman un **conjunto** o **set de expansión** de V, si cualquier $v \in V$ se puede expresar como una **combinación lineal**,

$$v = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_m u_m,$$

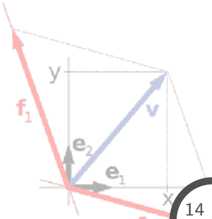
siendo los $\{a_i\}$ **escalares** pertenecientes a K.

Observaciones

Supongamos que el set $u_1, u_2 \ldots u_m$ expande V:

1. Para cualquier $w \in V$, el set $w, u_1, u_2 \ldots u_m$ **también** expande V.
2. Si u_k es una combinación lineal de **algunos** de los elementos del set, $\Rightarrow$ el set **sin** u_k representa un **set de expansión**.
3. Si uno de los elementos del set es el **vector cero** $\Rightarrow$ el set sin el cero también **expande** a V.

Contenido: Tema 01



Subespacios

Definición, intersección de subespacios

Sea V un espacio vectorial sobre el campo K, y sea W un **subconjunto** de $V \Rightarrow W$ será un **subespacio** de V si se cumple:

- El vector cero pertenece a W,
- $\forall \;\; u, v \in W$; $a, b \in K$, la combinación lineal $au + bv \in W$,

es decir, que W sea un subconjunto **cerrado**.

Intersección de subespacios

La intersección de dos (o más) subespacios de V también representa un **subespacio** de V,

$$\begin{aligned} &\text{sean } \; U \;\&\; W \text{ dos subespacios de } V, \\ &\Rightarrow \; 0 \in U; \; 0 \in W \;\; \therefore \;\; 0 \in U \cap W, \\ &u, v \in U \cap W \quad \rightarrow \quad u, v \in U \;\&\; u, v \in W, \end{aligned}$$

por tanto, el subconjunto **intersección** $U \cap W$ será un **subespacio** del espacio vectorial V.

Considerando un sistema $AX = B$ de ecuaciones lineales en n incógnitas, formando el vector X, y donde la matriz A y el vector B son conocidos, por ejemplo,

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3, \\ x - y + 3z &= 1, \\ 2x + 2y - 8z &= 5, \end{aligned}$$

expresándolo en forma matricial se tiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix},$$

entonces **cada solución** u que se encuentra para $X = (x, y, z)$ se puede **considerar** como un vector en K^n.

Subespacios

Espacio solución de un sistema homgéneo

Suponiendo ahora que el sistema es **homogéneo**, es decir: $AX = 0$, y considerando el conjunto de soluciones posibles como W.
Debido a que se tiene un sistema homogéneo, se cumple:

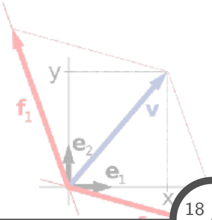
$$A0 = 0 \Rightarrow \; 0 \in W.$$

Además, supondiendo que $u, v \in W$, entonces u y v son soluciones de $AX = 0$, por tanto:

$$\begin{aligned} Au = 0, \quad Av = 0 \Rightarrow \; A(au + bv) = 0 \;\; \forall \;\; a, b \in K, \\ \therefore \quad au + bv \in W, \end{aligned}$$

es decir, el conjunto de soluciones W de un sistema homogéneo $AX = 0$ forma un **subespacio vectorial** de K^n.

Contenido: Tema 01



Dependencia e independencia lineal

Definiciones

Sea V un espacio vectorial en K, entonces se dice que los vectores $v_1, v_2 \ldots v_m$ en V son **linealmente dependientes** si existen escalares $a_1, a_2 \ldots a_m$ en K, **no todos cero**, tal que:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_m v_m = 0,$$

al no obtenerse lo anterior, se dice entonces que los vectores serán **linealmente independientes**.

Otra forma de expresar la independencia lineal, es la siguiente:
Se tiene la ecuación vectorial,

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_m v_m = 0 \;\; \forall \;\; x_i \rightarrow \text{escalares desconocidos},$$

si la única solución es $x_i = 0 \;\; \forall \;\; i \Rightarrow$ los vectores $v_1, v_2 \ldots v_m$ son **linealmente independientes**.

Dependencia e independencia lineal

Observaciones

- Si un vector del set es **cero**, $v_i = 0$, entonces el conjunto será **linealmente dependiente**,

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_m v_m = 0,$$
$$\therefore \quad a_1(0) + (0)v_2 + \ldots + (0)v_m = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0 \ \checkmark$$

- Si $v \neq 0 \Rightarrow$ él por si mismo es **linealmente independiente**,

$$kv = 0, \quad \text{pero } v \neq 0 \quad \Rightarrow \quad k = 0.$$

- Si dos vectores del set son **iguales**, o uno es **múltiplo escalar** de otro, entonces el set es **linealmente dependiente**,

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_m v_m = 0,$$
$$\Rightarrow \ (a_1 k + a_2) v_2 + \ldots + a_m v_m = 0 \ \text{ donde: } v_1 = k v_2,$$
$$\text{si } a_i = 0 \ \forall \ i \neq 1, 2 \ \Rightarrow \ (a_1 k + a_2) v_2 = 0 \ \forall \ a_1, a_2 \neq 0 \ \checkmark$$

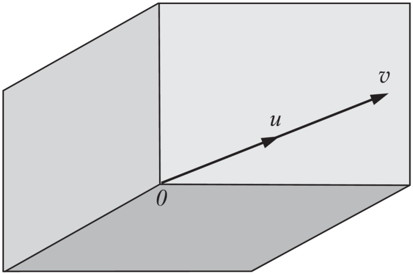
- Si un set de vectores S es **linealmente independiente** $\Rightarrow$ cualquier **subset** de S también lo es.

Dependencia e independencia lineal

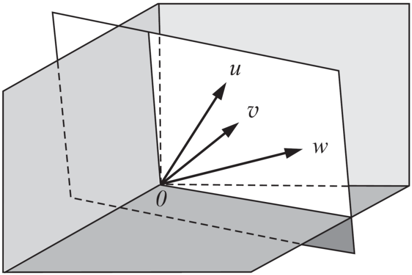
Dependencia lineal en $\mathbb{R}^3$

La **dependencia lineal** en $\mathbb{R}^3$ se puede describir gráficamente.

Cualquiera **dos** vectores u y v en $\mathbb{R}^3$ son **linealmente dependientes** $\Leftrightarrow$ descansan sobre la **misma línea** que pasa por el orígen.



Cualquiera **tres** vectores u, v y w en $\mathbb{R}^3$ son **linealmente dependientes** $\Leftrightarrow$ descansan sobre el **mismo plano** que pasa por el orígen.



Se tiene un set de vectores $v_1, v_2 \ldots v_m$, y suponiendo que v_i es una **combinación lineal** de los demás:

$$v_i = a_1 v_1 + \ldots + a_{i-1} v_{i-1} + a_{i+1} v_{i+1} + \ldots + a_m v_m,$$

entonces, añadiendo $-v_i$ a ambos lados se tiene,

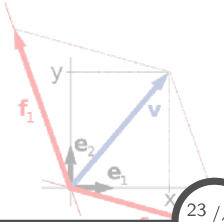
$$0 = a_1 v_1 + \ldots + a_{i-1} v_{i-1} - v_i + a_{i+1} v_{i+1} + \ldots + a_m v_m,$$

donde el coeficiente de v_i es diferente de **cero**, entonces los vectores serán **linealmente dependientes**.

Por tanto, se puede concluir que un set de vectores $v_1, v_2 \ldots v_m$ será **linealmente dependiente** $\Leftrightarrow$ al menos **uno** de ellos es una **combinación lineal** de los demás.

Otra manera de verlo, es que un set de vectores será **linealmente independiente** si **ninguno** de ellos es una **combinación lineal** de los demás.

Contenido: Tema 01



Bases y dimensiones

Definición y ejemplos de bases

Un set $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ de vectores es una **base** de V, si cada $v \in V$ se puede expresar de manera **única** como una **combinación lineal** de los vectores base.

Teorema Sea V un espacio vectorial tal que una base tiene m elementos y otra base tiene n elementos $\Rightarrow \quad m = n$. Por tanto V es $n-$**dimensional**, lo cual se expresa como dim$V = n$.

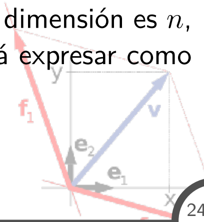
Espacio vectorial K^n

tenemos la siguiente **base**[1]

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0); \quad e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0) \; \ldots \; e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1);$$

la cual se conoce como base **usual** o **estándar**, y cuya dimensión es n, $\therefore$ cualquier vector $u = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in K^n$ se podrá expresar como una **combinación lineal** de $\{e_i\}$,

$$v = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots + a_n e_n.$$



[1] Siendo por tanto linealmente independiente.

Bases y dimensiones

Ejemplos de bases

Espacio vectorial $M = M_{r,s}$

La base **estándar** de $M_{2,3}$ estará formada por las seis matrices:

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$
$$E_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$
$$E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad E_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

En general, en el espacio vectorial $M_{r,s}$, la matriz E_{ij} tendrá sólo un elemento $e_{ij} = 1$ y cero para todos los demás.
Por tanto, todas las matrices que cumplan con lo anterior formarán la base **estándar** y su **dimensión** será dim$M_{r,s} = r \cdot s$.

Bases y dimensiones

Ejemplos de bases

Espacio vectorial $P_n(t)$

El set $S = \{1, t, t^2 \ldots t^n\}$ de $n+1$ polinomios representa una **base** de $P_n(t)$, y su **dimensión** será:

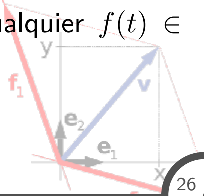
$$\text{dim}P_n(t) = n + 1.$$

La razón es que cualquier polinomio $f(t)$ de grado $\leq n$ se puede expresar como una combinación lineal de las potencias de t, las cuales son **linealmente independientes**.

Espacio vectorial $P(t)$

Al tener todos los polinomios posibles dentro del espacio, entonces el set $S = \{1, t, t^2, t^3 \ldots\}$ es **infinito**, con lo cual sus elementos son **linealmente independientes** y pueden expandir a cualquier $f(t) \in P(t)$, siendo su dimensión:

$$\text{dim}P(t) = \infty.$$



Teorema I

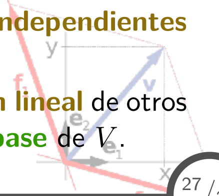
Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n:

- Un conjunto de $n+1$ vectores cualesquiera será linealmente **dependiente**.
- Cualquier set $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ de n elementos linealmente **independientes** será una **base** de V.
- Cualquier set $T = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ que **expanda** a V será una **base** de V.

Teorema II

Supongamos que el set S expande al espacio vectorial V:

- Cualquier **máximo** número de vectores linealmente **independientes** en S forman una **base** de V.
- Si se eliminan de S cada vector que sea **combinación lineal** de otros vectores en S, entonces el set remanente será una **base** de V.



Bases y dimensiones

Teoremas de bases

Teorema III

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, y sea $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$ un set de vectores linealmente **independientes** en V, entonces S es **parte** de una base de $V \Leftrightarrow\ r < \text{dim}V$, por lo que S podrá extenderse a ser una **base** de V.

Ejemplos

- Se tienen cuatro vectores en $\mathbb{R}^4$, con dim$\mathbb{R}^4 = 4$:

$$(1,1,1,1),\ (0,1,1,1),\ (0,0,1,1),\ (0,0,0,1),$$

  al ser linealmente **independientes** y del mismo número de elementos que la dimensión del espacio, entonces son una **base** de $\mathbb{R}^4$.

- El set de polinomios en $P_n(t)$, con dim$P_n(t) = n + 1$:

$$1,\ t-1,\ (t-1)^2, \ldots, (t-1)^n,$$

  como ningún polinomio del set es combinación lineal de los otros elementos $\Rightarrow$ son linealmente **independientes**. Además posee $n+1$ elementos, por tanto forma una **base** de $P_n(t)$.

Bases y dimensiones

Subespacios

Sea W un **subespacio** de un espacio vectorial V de dim$V = n$, entonces se tiene que:

$$\text{dim}W \leq n,$$
$$\text{si dim}W = n \quad \Rightarrow \quad W = V.$$

Se tiene un espacio vectorial K^n, y se selecciona un set de vectores $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_r\} \; \forall \; r \leq \dim K^n = n$. Para encontrar de S la **base** del subespacio W de K^n, se realiza el siguiente procedimiento:

(1) Formar una matriz M cuyas **columnas** sean dadas por los vectores del set S.

(2) Reducir la matriz M a su forma **escalonada**.

(3) Para cada columna C_k en la matriz reducida **sin pivote** se elimina el u_k asociado del set S.

(4) Tomar los vectores remanentes del set S, los cuales corresponderán a las columnas **con pivote**, esos vectores formarán la **base**.