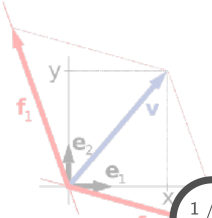
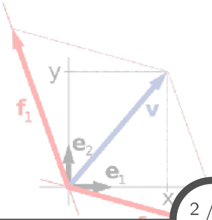
Contenido

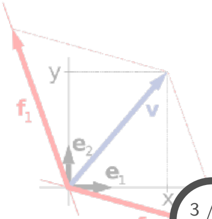
2. Operadores lineales



Contenido: Tema 02



Contenido: Tema 02



Mapeos, funciones

Definiciones

Se tienen dos sets arbitrarios (no vacíos) A y B tal que cada elemento $a \in A$ se le asigna un **único** elemento de B, llamado **imagen** de a.

La colección f de tales asignaciones se le conoce como **mapeo** de A a B, $f : A \rightarrow B$, donde:

- $A \Rightarrow$ **dominio** del mapeo.
- $B \Rightarrow$ set **objetivo** o **codomino**.
- $f(a) \Rightarrow$ elemento **único** de B al cual f asigna el elemento $a \in A$.

Para un mapeo $f : A \rightarrow B$ se observa lo siguiente:

- Si A' es un subset de $A \Rightarrow f(A')$ denota el set de **imágenes** de A'.
- Si B' es un subset de $B \Rightarrow f^{-1}(B')$ denota el set de elementos de A, cada uno de los cuales su **imagen** recide en B, entonces:

$$f(A') = \{f(a) : a \in A'\} \;\Rightarrow\; f(A') \text{ imagen de } A',$$

$$f^{-1}(B') = \{a \in A : f(a) \in B'\} \;\Rightarrow\; f^{-1}(B') \text{ imagen inversa de } B'.$$

En general $f(A)$ representa el **rango** de f, siendo el set de **todas** las imágenes $\forall\, a \in A$.

Sea V un espacio vectorial de polinomios $P(t)$ sobre el campo $\mathbb{R}$,

- La **derivada** define un mapeo $\mathbb{D} : V \to V$, en donde para cualquier polinomio $f(t) \in P(t)$ se tiene que $D(f) = df/dt$.
- La **integral** (evaluada de 0 a 1) define también un mapeo $\mathbb{J} : V \to \mathbb{R}$, en donde para cualquier polinomio $f(t) \in P(t)$ se tiene:

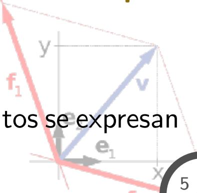
$$\mathbb{J}(f) = \int_0^1 f(t)dt.$$

Mapeos matriciales

Sea A una matriz $m \times n$ sobre el campo $K \Rightarrow A$ determina un **mapeo**:

$$F_A : K^n \to K^m \text{ mediante } F_A(u) = Au,$$

siendo K^n, K^m espacios vectoriales en donde sus elementos se expresan como vectores **columna**.



Mapeos, funciones

Composición de mapeos

Considerando dos mapeos $f : A \to B$, $g : B \to C \Rightarrow$ tales mapeos se pueden describir como,

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C.$$

Es posible, por tanto, definir la **composición** de f y g, dado como $g \circ f$, siendo el mapeo como sigue:

$$g \circ f : A \to C \;\; \Rightarrow \;\; (g \circ f)\,(a) \equiv g\,(f(a))\,,$$

es decir, primero se aplica f a $a \in A$ y luego se aplica g a $f(a) \in B$, para obtener $g\,(f(a)) \in C$.

Teorema: La **composición de mapeos** satisface la ley **asociativa**,

$$\text{sea } f : A \to B,\; g : B \to C,\; h : C \to D,$$
$$\Rightarrow h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Mapeos, funciones

Mapeos uno a uno (inyectivo), sobre (suprayectivo) y biyectivo

Uno a uno

También conocido como mapeo **inyectivo**, si para un mapeo $f : A \to B$ **diferentes** elementos de A tienen **distintas** imágenes,

$$\text{si } f(a) = f(a') \;\Rightarrow\; a = a'.$$

Sobre

O mapeo **suprayectivo**, si para un mapeo $f : A \to B$ cada $b \in B$ es la imagen de **al menos** un $a \in A$.

Correspondencia uno a uno

También llamado como mapeo **biyectivo**, si para un mapeo $f : A \to B$ f es tanto **uno a uno** como **sobre**.

Identidad

Sea A un set no-vacío, el mapeo:

$$f : A \to A \text{ definido por } f(a) = a,$$

donde se le asigna a cada $a \in A$ a sí mismo, se le conoce como **mapeo identidad:**

$$\mathbb{1}_A,\ \mathbb{1},\ I \to\ \forall\, a \in A \text{ se tiene } \mathbb{1}_A(a) = a.$$

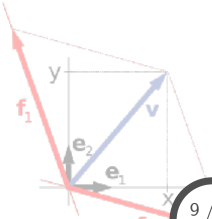
Inversa

Sea $f : A \to B$ entonces se le llama a $g : B \to A$ la **inversa** de f, expresada como f^{-1},

$$f \circ g = \mathbb{1}_B \quad ; \quad g \circ f = \mathbb{1}_A.$$

Se observa que para que exista el mapeo **inverso**, f debe ser un mapeo **correspondiente uno a uno** o **biyectivo**.

Contenido: Tema 02



Transformaciones lineales

Definición

Sean V y U espacios vectoriales sobre el mismo campo K. Un mapeo $F : V \rightarrow U$ se le denomina **mapeo** o **transformación lineal** si satisface lo siguiente:

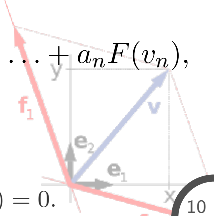
- $\forall$ vector $v, w \in V$, $F(v + w) = F(v) + F(w)$,
- $\forall$ escalar $k \in K$ y $v \in V$, $F(kv) = kF(v)$.

Es decir, el mapeo será **lineal** si presenta las dos operaciones básicas de un espacio vectorial.[1]

Con las condiciones anteriores, es posible definir de manera general una **transformación lineal**,

$$F(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n) = a_1 F(v_1) + a_2 F(v_2) + \ldots + a_n F(v_n),$$

en donde $a_i \in K$ y $v_i \in V$.



[1] Además del elemento cero, ya que haciendo $k = 0 \;\Rightarrow\; F(0) = 0$.

Transformaciones lineales

Mapeos especiales

Considerando el espacio vectorial $V = P(t)$ de polinomios sobre el campo $\mathbb{R}$, entonces para $u(t), v(t) \in P(t)$ y $k \in K$ se analiza:

Mapeo derivada Sea $\mathbb{D} : V \to V$ el mapeo **derivada**, entonces:

$$\frac{d}{dt}(u+v) = \frac{du}{dt} + \frac{dv}{dt}; \quad \frac{d}{dt}(kv) = k\frac{dv}{dt},$$
$$\therefore \ \mathbb{D}(u+v) = \mathbb{D}(u) + \mathbb{D}(v); \quad \mathbb{D}(kv) = k\mathbb{D}(v),$$

$\therefore$ el mapeo derivada es una **transformación lineal**.

Mapeo integral Sea $\mathbb{J} : V \to \mathbb{R}$ el mapeo **integral**,

$$\mathbb{J}\left(f(t)\right) = \int_0^1 f(t)dt \ \Rightarrow \ \int_0^1 kv(t)dt = k\int_0^1 v(t)dt,$$
$$\int_0^1 \left[u(t) + v(t)\right]dt = \int_0^1 u(t)dt + \int_0^1 v(t)dt,$$
$$\therefore \ \mathbb{J}(u+v) = \mathbb{J}(u) + \mathbb{J}(v); \quad \mathbb{J}(kv) = k\mathbb{J}(v),$$

es decir, el mapeo integral es una **transformación lineal**

Mapeo cero Sea $F : V \to U$ el mapeo que asigna el vector **cero** $0 \in U$ a **cada** vector $v \in V$, entonces $\forall\ u, w \in V$ y $k \in K$ se tiene:

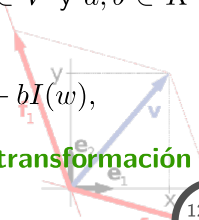
$$F(u+w) = 0 = 0 + 0 = F(u) + F(w),$$
$$F(ku) = 0 = k(0) = kF(u),$$

por tanto, el **mapeo cero** F es una **transformación lineal**.

Mapeo identidad Sea $I : V \to V$ en el cual cualquier vector v es mapeado a **sí mismo**, entonces $\forall\ u, w \in V$ y $a, b \in K$ se tiene:

$$I(av + bw) = av + bw = aI(v) + bI(w),$$

por tanto, el mapeo I representa una **transformación lineal**.



Transformaciones lineales

Bases y matrices

Teorema Sean V y U dos espacios vectoriales sobre el campo K. Sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una **base** de V y $u_1, u_2, \ldots, u_n$ vectores **arbitrarios** en U, entonces existe una **única** transformación lineal $F : V \to U$ tal que:

$$F(v_1) = u_1; \quad F(v_2) = u_2; \; \ldots ; F(v_n) = u_n.$$

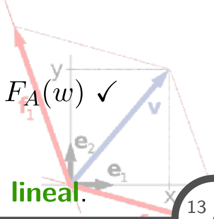
Matrices y transformaciones lineales

Sea A una matriz real de dimensión $m \times n$, donde A determina un mapeo por si misma,

$$F_A : K^n \to K^m \;\; \forall \;\; F_A(u) = Au,$$

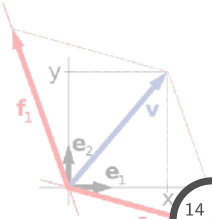
por tanto, analizando si el mapeo es lineal:

$$F_A(v + w) = A(v + w) = Av + Aw = F_A(v) + F_A(w) \checkmark$$
$$F_A(kv) = A(kv) = k(Av) = kF_A(v) \checkmark$$



por tanto, el mapeo **matricial** es una **transformación lineal**.

Contenido: Tema 02



Kernel e imagen de una transformación lineal

Definición

Sea $F : V \to U$ una **transformación lineal**, entonces se define:

Kernel de F Set de elementos en V que mapean en el **vector cero** de U,

$$\text{Ker}F = \{v \in V : F(v) = 0\}.$$

Imagen de F Set de puntos imagen en U,

$$\text{Im}F = \{u \in U : \exists\ v \in V\ \forall\ F(v) = u\}.$$

Teorema Sea $F : V \to U$ una transformación lineal, entonces el **kernel** de F es un **subespacio** de V, y la **imagen** de F es **subespacio** de U.

Con los teoremas vistos hasta ahora, se puede concluir que si el set $v_1, v_2, \ldots, v_m$ **expande** un espacio vectorial V, y si $F : V \to U$ es una **transformación lineal**, entonces el set $F(v_1), F(v_2), \ldots, F(v_m)$ **expande** ImF.

Considerando, por ejemplo, una matriz 3×4, y la base usual o estándar $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ del espacio K^4,

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix}; \; e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \; e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \; e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \; e_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Como A se puede considerar como una **transf. lineal**, entonces,

$F_A : K^4 \to K^3 \;\; \forall \;\; F_A(u) = Au,$ donde K^4, K^3 son vectores columna,

además, los vectores base estándar $\{e_i\}$ **expanden** el espacio K^4, por tanto, las imágenes Ae_1, Ae_2, Ae_3, Ae_4,

$$Ae_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}; \quad Ae_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}; \quad Ae_3 = \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix}; \quad Ae_4 = \begin{bmatrix} a_4 \\ b_4 \\ c_4 \end{bmatrix};$$

por su parte **expandirán** a la **imagen** de A.

Kernel e imagen de una transformación lineal

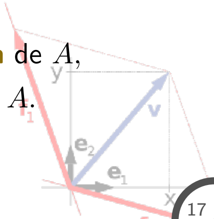
Mapeos matriciales

Por lo discutido anteriormente, se puede determinar que:

- La **imagen** de A vendrá representada por el **espacio columna** que forma A.
- El **kernel** de A consistirá de todos los vectores v tal que $Av = 0$, es decir, el kernel será el **espacio solución** de un sistema de ecuaciones **homogéneo**, lo que se conoce como **espacio nulo** de A.

De manera resumida, sea A cualquier matriz $m \times n$ sobre el campo K, y vista como una **transformación lineal**,

$$
\begin{aligned}
& F_A : K^n \to K^m, \\
\Rightarrow \;\; & \mathrm{Im}A = \mathrm{colsp}(A) \quad \leftarrow \quad \textbf{espacio columna} \text{ de } A, \\
& \mathrm{Ker}A = \mathrm{nullsp}(A) \quad \leftarrow \quad \textbf{espacio nulo} \text{ de } A.
\end{aligned}
$$



Kernel e imagen de una transformación lineal

Rango y nulidad

Sea $F : V \to U$ una transformación lineal, entonces definiendo:

Rango de F es la **dimensión** de la imagen de F,

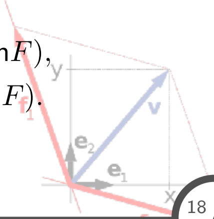
$$\text{rango}(F) = \dim(\text{Im}F).$$

Nulidad de F es la **dimensión** del kernel de F,

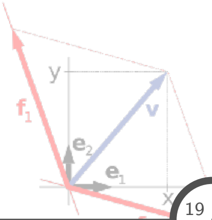
$$\text{nulidad}(F) = \dim(\text{Ker}F).$$

Teorema Sea V de dimensión finita, y $F : V \to U$ una transformación lineal, entonces:

$$\begin{aligned} \dim V &= \dim(\text{Ker}F) + \dim(\text{Im}F), \\ &= \text{nulidad}(F) + \text{rango}(F). \end{aligned}$$



Contenido: Tema 02



Transformaciones lineales singulares y no−singulares

Definición

Sea $F : V \rightarrow U$ una transformación lineal, la cual cumple con la condición $F(0) = 0$.[2]

- Se dice que la transformación es **singular** si la **imagen** de algún vector diferente de cero es **cero**,

$$\forall \;\; v \neq 0 \;\; F(v) = 0.$$

- Se le considera a la transformación F **no-singular** si el vector cero es el **único** cuya imagen es **cero**, es decir:

$$\text{Ker} F = \{0\}.$$

Teorema Sea $F : V \rightarrow U$ una transformación lineal **no-singular**, entonce la imagen de cualquier set **linealmente independiente** (base) será también un set **linealmente independiente**.

[2]Ya que es parte de la definición de transformación lineal.

Transformaciones lineales singulares y no−singulares

Isomorfismo

Considerando un mapeo o transformación lineal **uno a uno** $F : V \to U$, entonces solamente el vector cero de V mapea al elemento cero de U, por tanto F es **no-singular**.

Tal condición se mantiene en el sentido inverso: una transformación lineal F **no-singular** será un mapeo **uno a uno**.

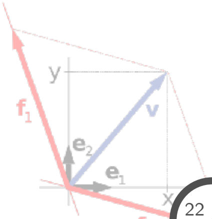
El análisis anterior también se aplica a transformaciones lineales que son **correspondientes uno a uno**, mapeos que se conocen también como **isomorfismos**, siendo los espacios vectoriales V y U (sobre K) llamados **isomórficos**, $V \cong U$.

Teorema Sea $F : V \to U$ una transformación lineal, con V de dimensión finita y $\dim V = \dim U$, entonces:

$$F \text{ es un } \textbf{isomorfismo} \iff F \text{ es } \textbf{no-singular},$$

donde un isomorfismo con tales características tendrá transformación **inversa** F^{-1}.

Contenido: Tema 02



Álgebra de operadores lineales

Operaciones de transformaciones lineales

Es posible combinar transformaciones lineales de diferentes maneras para obtener **nuevas** transformaciones lineales.
Consideremos las transformaciones lineales F y G sobre el campo K,

$$F : V \to U \;\; \& \;\; G : V \to U,$$

entonces, la **suma** $F + G$ y el **producto por escalar** $kF \; \forall \; k \in K$ definidos como mapeos $V \to U$,

$$(F + G)(v) \equiv F(v) + G(v) \;\; \& \;\; (kF)(v) \equiv kF(v),$$

también son transformaciones **lineales**.

Teorema Sean V y U espacios vectoriales sobre el campo K, entonces la **colección** de **todas** las transformaciones lineales de $V \to U$ que tengan las operaciones de **suma** y **producto por escalar** formará un **espacio vectorial** sobre K.

Álgebra de operadores lineales

Operaciones de transformaciones lineales

El espacio vectorial formado por las transformaciones lineales antes mencionadas se denota como,

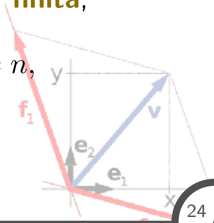
$$\textbf{homomorfismo} \;\rightarrow\; \mathrm{Hom}(V, U),$$

en donde el elemento cero de $\mathrm{Hom}(V, U)$ es el **mapeo cero** de $V \rightarrow U$, denotado por $\mathbf{0}$ y definido como,

$$\mathbf{0}(v) = 0 \;\; \forall \;\; v \in V.$$

Teorema Suponiendo que V y U tienen dimensión **finita**,

$$\begin{aligned} &\mathrm{dim} V = m \;\; \& \;\; \mathrm{dim} U = n, \\ \Rightarrow \; &\mathrm{dim}\left[\mathrm{Hom}(V, U)\right] = mn. \end{aligned}$$



Álgebra de operadores lineales

Composición de transformaciones lineales

Considerando que V, U y W son espacios vectoriales sobre el campo K, donde $F : V \to U$ y $G : U \to W$ son transformaciones lineales, entonces lo siguiente,

$$V \xrightarrow{F} U \xrightarrow{G} W,$$

se puede definir como la **función composición** $G \circ F$, lo cual representa el mapeo lineal desde V hasta W, expresado como:

$$(G \circ F)(v) = G\left(F(v)\right) \quad \forall \quad v \in V.$$

Resumiendo las operaciones entre transformaciones lineales, para los espacios vectoriales V, U y W,

$$\begin{aligned} & F : V \to U; \quad F' : V \to U; \quad G : U \to W; \quad G' : U \to W; \\ \Rightarrow\ & G \circ (F + F') = G \circ F + G \circ F', \\ & (G + G') \circ F = G \circ F + G' \circ F, \\ & k(G \circ F) = (kG) \circ F = G \circ (kF). \end{aligned}$$

Álgebra de operadores lineales

Álgebra $A(V)$ de operadores lineales

Sea V un espacio vectorial sobre el campo K y considerando el caso de transformaciones lineales del espacio V a sí mismo,

$$F : V \to V,$$

a estas transformaciones se les conoce como **operadores lineales** en V y se les denota como,

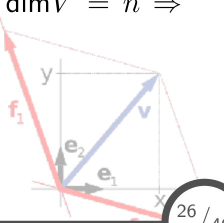
$$\mathrm{Hom}(V, V) \to A(V),$$

lo cual representa al espacio formado por **todas** las transformaciones posibles.

- Como $A(V)$ es un espacio vectorial sobre K, y la $\dim V = n \Rightarrow \dim A(V) = n^2$.
- Para cualquier mapeo $F,\ G \in A(V)$ se tiene,

$$G \circ F = GF \ \ \exists \ \ \& \ \ GF \in A(V),$$

  lo cual define la **multiplicación** en $A(V)$.



Álgebra de operadores lineales

Álgebra $A(V)$ de operadores lineales, polinomios

Para que $A(V)$ sea considerado un espacio vectorial sobre K, en el cual la operación de **multiplicación** esté definida, se debe cumplir lo siguiente cuando $F, G, H \in A(V)$ y $k \in K$:

$$F(G+H) = FG + FH, \quad (G+H)F = GF + HF,$$
$$k(GF) = (kG)F = G(kF),$$
$$(FG)H = F(GH) \;\Leftarrow\; \text{cuando se cumple, se dice que es } \textbf{asociativa}.$$

Observando que el mapeo **identidad** $I : V \to V$ pertenece a $A(V)$, además de que $\forall$ operador lineal $F \in A(V)$ se tiene:

$$FI = IF = F,$$

por tanto se pueden definir las **potencias** de F como sigue,

$$F^0 = I, \; F^2 = F \circ F, \; F^3 = F^2 \circ F = F \circ F \circ F, \ldots$$

con lo cual es posible formar el operador lineal $p(F)$ como:

$$p(F) = a_0 I + a_1 F + a_2 F^2 + \ldots + a_s F^s.$$

Álgebra de operadores lineales

Matrices cuadradas y operadores lineales

Sea $M = M_{n,n}$ el espacio vectorial de **todas** las matrices cuadradas $n \times n$ sobre K, entonces:

- **Cualquier** matriz $A \in M$ definirá una transformación lineal $F_A : K^n \to K^n \;\; \forall \;\; F_A = Au$.
- Debido a que el mapeo es de K^n a sí mismo, entonces A es un **operador lineal**.

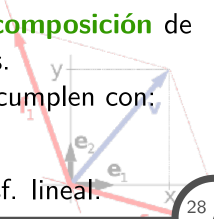
Suponiendo $A, B \in M$, entonces el producto $AB \in M$. Por tanto aplicando como transformación lineal a $u \in K^n$,

$$
\begin{aligned}
F_{AB}(u) &= (AB)u = A(Bu) = A\left(F_B(u)\right), \\
&= F_A\left(F_B(u)\right) = \left(F_A \circ F_B\right)(u),
\end{aligned}
$$

es decir, el **producto** de matrices AB representa la **composición** de A y B considerándolos como transformaciones lineales.

Adicionalmente, los elementos el espacio vectorial M cumplen con:

$$
\begin{aligned}
A + B &\leftarrow \text{ suma de transformaciones lineales,} \\
kA &\leftarrow \text{ producto por un escalar de la transf. lineal.}
\end{aligned}
$$



Álgebra de operadores lineales

Operadores invertibles en $A(V)$

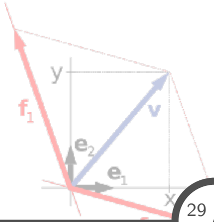
Sea $F : V \to V$ un operador lineal, se dice que F es **invertible**, o que posee **inversa** si **existe** $F^{-1} \in A(V)$ tal que,

$$FF^{-1} = F^{-1}F = I.$$

Además, para que F (considerado como mapeo) sea **invertible**, debía ser un mapeo **correspondiente uno a uno**, con lo cual se asegura que F^{-1} también sea una **transformación lineal**.

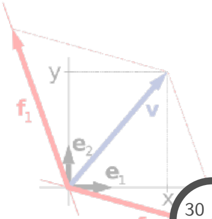
Teorema Sea F un **operador lineal**[3] que aplica a un espacio vectorial V de dimensión finita, entonces las condiciones siguientes son **equivalentes**,

- F es **no-singular**: $\text{Ker}F = \{0\}$.
- F es un mapeo **uno a uno**.
- F es un mapeo **sobre**.
- F es **invertible**.



[3] El dominio y el codominio son el mismo.

Contenido: Tema 02



Representación matricial de un operador lineal

Vector de coordenadas

Considerando una base $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ que corresp. a un espacio vectorial V sobre $K \Rightarrow$ cualquier $v \in V$ se puede expresar como:

$$v = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n,$$

con lo cual se define el **vector de coordenadas** de v relativo a S,

$$[v]_S = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Ejemplo

Sea $S = \{u_1, u_2, u_3\}$, con:

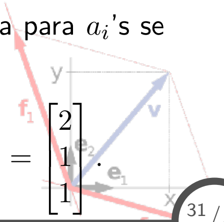
$$u_1 = (1,0,0),\ u_2 = (1,1,0),$$
$$u_3 = (1,1,1),$$

expresando $v = (4,2,1)$ como combinación lineal de S,

$$\Rightarrow \ v = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3,$$
$$(4,2,1) = a_1(1,0,0) + a_2(1,1,0) + \ldots$$
$$\ldots + a_3(1,1,1),$$

resolviendo el sistema para a_i's se tiene:

$$\therefore \ [v]_S = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$



Representación matricial de un operador lineal

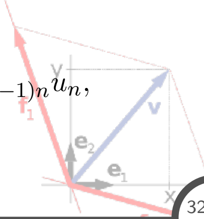
Definición de representación matricial

Aplicando el mismo concepto a los **operadores lineales**, se considera a T como el operador que aplica al espacio vectorial V y $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ una base de V, entonces se tiene que los vectores:

$$T(u_1),\ T(u_2), \ldots, T(u_n),$$

también pertenecen a V, siendo cada uno de ellos una **combinación lineal** de los vectores base en S,

$$\begin{aligned} T(u_1) &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \ldots + a_{1n}u_n, \\ T(u_2) &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{2n}u_n, \\ &\vdots \\ T(u_{n-1}) &= a_{(n-1)1}u_1 + a_{(n-1)2}u_2 + \ldots + a_{(n-1)n}u_n, \\ T(u_n) &= a_{n1}u_1 + a_{n2}u_2 + \ldots + a_{nn}u_n. \end{aligned}$$



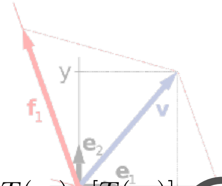
Lo anterior se puede expresar de manera compacta en forma matricial,

$$\begin{bmatrix} T(u_1) \\ T(u_2) \\ \vdots \\ T(u_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}.$$

La **transpuesta** de la matriz anterior se le denota como $m_S(T)$ o $[T]_S$ y se le conoce como la **representación matricial** de T relativa a S, o simplemente como **la matriz T en la base S**,

$$m_S(T) = [T]_S = \left[[T(u_1)]_S, [T(u_2)]_S, \dots, [T(u_n)]_S\right],$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$



siendo las **columnas** de $[T]_S$ los **vectores coord.** de $T(u_i)$: $[T(u_i)]_S$

Representación matricial de un operador lineal

Propiedades de las representaciones matriciales

Teorema Sea $T : V \to V$ un operador lineal, y sea S una base (finita) de $V \Rightarrow$ para **cualquier** vector $v \in V$ se tiene:

$$[T]_S[v]_S = [T(v)]_S,$$

indicando que la **acción** del operador en un vector v se preserva en su representación matricial.

Teorema Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre K, y sea S una base de V, así como también $\mathcal{M}$ el álgebra de matrices $n \times n$ sobre K, entonces, el mapeo:

$$m : A(V) \to \mathcal{M} \;\; \forall \;\; m(T) = [T]_S,$$

representa un **isomorfismo**, es decir, para cualquier F, $G \in A(V)$ y $k \in K$, se cumple:

(i) $m(F+G) = m(F) + m(G)$ ó $[F+G] = [F] + [G]$,

(ii) $m(kF) = km(F)$ ó $[kF] = k[F]$,

(iii) m es un mapeo **correspondiente uno a uno**.

Representación matricial de un operador lineal

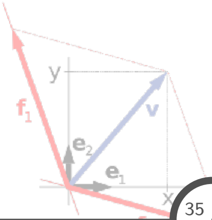
Propiedades de las representaciones matriciales

Teorema Para cualquier operador lineal $F,\ G \in A(V)$ se tiene,

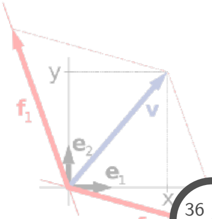
$$m(G \circ F) = m(G)m(F),$$
$$\text{ó}\ \ [G \circ F] = [G][F].$$

Teorema La representación matricial de cualquier matriz cuadrada $n \times n$ sobre el campo K relativa a la base **estándar** E de K^n será ella misma:

$$[A]_E = A.$$



Contenido: Tema 02



Cambio de bases, similaridad

Cambio de bases

Definiendo,

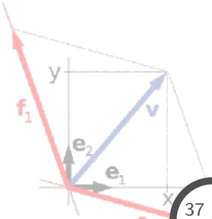
- $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ como **una** base del espacio vectorial V,
- $S' = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ como **otra** base del mismo espacio.

Siendo S una **base**, entonces cualquier $v_i \in S'$ puede ser representado de manera **única** como una combinación lineal de los vectores en S,

$$
\begin{aligned}
v_1 &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \ldots + a_{1n}u_n, \\
v_2 &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{2n}u_n, \\
&\vdots \\
v_n &= a_{n1}u_1 + a_{n2}u_2 + \ldots + a_{nn}u_n,
\end{aligned}
$$

lo cual se puede expresar de forma matricial,

$$
\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}.
$$



Cambio de bases, similaridad

Cambio de bases, observaciones

La **transpuesta** de la matriz de coeficientes anteriormente expuesta se expresa como P, donde:

$$P = A^T \;\; \forall \;\; p_{ij} = a_{ji},$$

y se le conoce como la **matriz de cambio de base** o **matriz de transición** de la base S (*old*) a la base S' (*new*).

Observaciones de la **matriz de cambio de base**:

(i) P se puede ver como una matriz cuyas columnas son los **vectores de coordenadas** de los $v_i \in S'$, relativos a la base S:

$$P = \left[[v_1]_S, [v_2]_S, \ldots, [v_n]_S \right].$$

(ii) Se puede definir la **matriz de cambio de base** Q desde la base S' (*new*) a la base S (*old*), considerando a Q como una matriz cuyas columnas son los **vectores de coordenadas** de los $u_i \in S$, relativos a la base S':

$$Q = \left[[u_1]_{S'}, [u_2]_{S'}, \ldots, [u_n]_{S'} \right].$$

Cambio de bases, similaridad

Cambio de bases, observaciones

(iii) Debido a que los vectores base en $S' = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ son **linealmente independientes**, tanto P como Q son **invertibles**, cumpliéndose además:

$$Q = P^{-1},$$

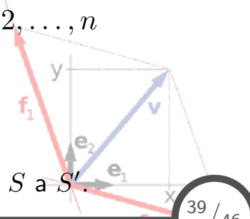
siendo P y Q matrices de **cambio de base**.

(iv) Suponiendo que $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ es una base del espacio vectorial V, y $P = [p_{ij}]$ es **cualquier** matriz **no-singular**, entonces los n vectores,

$$v_i = p_{1i}u_1 + p_{2i}u_2 + \ldots + p_{ni}u_n \ \ \forall \ \ i = 1, 2, \ldots, n$$

que corresponden a las columnas de P:

- Son linealmente **independientes**,
- Forman una nueva **base** S' del espacio V,
- $\therefore P$ representa la **matriz de cambio de base** desde S a S'.



Cambio de bases, similaridad

Aplicaciones de la matriz de cambio de base

Teorema Sea P una matriz de cambio de base desde S hasta S' en el espacio vectorial $V \Rightarrow$ para cualquier vector $v \in V$ se tiene,

$$P[v]_{S'} = [v]_S \quad \& \quad P^{-1}[v]_S = [v]_{S'}$$

es decir, multiplicando las coordenadas de v en la base S por P^{-1} se obtienen las coordenadas de v en la nueva base S'.

Demostración

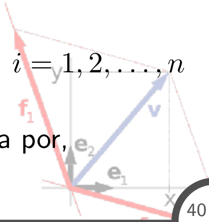
Suponiendo dos diferentes bases en un mismo espacio vectorial V,

$$S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}, \quad S' = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\},$$

$$\Rightarrow \; w_i = a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + \ldots + a_{in}u_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_j \quad \forall \; i = 1, 2, \ldots, n$$

en donde la matriz de **cambio de base** P vendrá dada por,

$$P = [p_{ij}] = [a_{ij}]^T.$$



Cambio de bases, similaridad

Aplicaciones de la matriz de cambio de base

Considerando ahora a un vector $v \in V$, y expresándolo en términos de la base S',

$$v = k_1 w_1 + k_2 w_2 + \ldots + k_n w_n = \sum_{i=1}^{n} k_i w_i,$$

siendo su **vector de coordenadas** $[v]_{S'}$,

$$[v]_{S'} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}.$$

Regresando a la expresión para v, sustituyendo los vectores w_i por su descripción en términos de los vectores u_i,

$$v = \sum_{i=1}^{n} k_i w_i = \sum_{i=1}^{n} k_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j \right),$$

$$\Rightarrow \; v = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} k_i \right) u_j = \sum_{j=1}^{n} \left(a_{1j} k_1 + a_{2j} k_2 + \ldots + a_{nj} k_n \right) u_j.$$

Cambio de bases, similaridad

Aplicaciones de la matriz de cambio de base

La obtenido anteriormente,

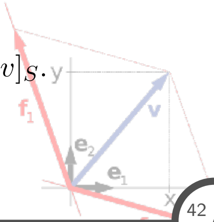
$$v = \sum_{j=1}^{n} \left(a_{1j}k_1 + a_{2j}k_2 + \ldots + a_{nj}k_n \right) u_j,$$

representa la expresión de v en la base S, siendo el **coeficiente** del $j-$ésimo vector u_j:

$$a_{1j}k_1 + a_{2j}k_2 + \ldots + a_{nj}k_n,$$

lo cual puede ser obtenido observando a la matriz P y el vector $[v]_{S'}$,

$$P[v]_{S'} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1j} & a_{2j} & \ldots & a_{nj} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} = [v]_S.$$



Cambio de bases, similaridad

Aplicaciones de la matriz de cambio de base

De lo anterior se obtiene,

$$P[v]_{S'} = [v]_S,$$

de donde se puede deducir la **transformación de vectores** desde una base S (*old*) a otra base S' (*new*),

$$P^{-1}[v]_S = P^{-1}\left(P[v]_{S'}\right) = [v]_{S'}.$$

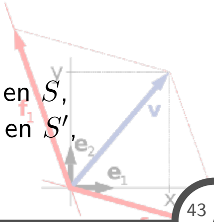
Teorema Sea P la **matriz de cambio de base** desde S hasta S' en el esp. vectorial V $\Rightarrow$ para cualquier operador lineal T en V se tiene:

$$[T]_{S'} = P^{-1}[T]_S P,$$

es decir, si:

- A es la representación matricial de T en S,
- B es la representación matricial de T en S',

$$\Rightarrow \quad B = P^{-1}AP.$$



Demostración

Sea $v \in V$, en donde se cumple que,

$$P[v]_{S'} = [v]_S,$$

aplicando el siguiente operador a ambos lados: $P^{-1}[T]_S$,

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \left(P^{-1}[T]_S\right) P[v]_{S'} &= \left(P^{-1}[T]_S\right)[v]_S, \\
&= P^{-1}\left([T]_S[v]_S\right), \\
&= P^{-1}[T(v)]_S, \\
&= [T(v)]_{S'}, \\
&= [T]_{S'}[v]_{S'},
\end{aligned}$$

a ambos lados se tienen dos operadores que aplican al mismo vector de coordenadas, $[v]_{S'}$, por tanto, los operadores son **iguales**,

$$\therefore \quad P^{-1}[T]_S P = [T]_{S'}.$$

Cambio de bases, similaridad

Similaridad

Suponiendo que A y B son matrices cuadradas, para las cuales existe una **matriz invertible** P tal que,

$$B = P^{-1}AP,$$

entonces se establece:

- B es **similar** a A, ó también,
- B se obtiene de A mediante una **transformación de similaridad**.

Teorema Dos matrices representan al **mismo** operador lineal $\iff$ las matrices son **similares**.

Es decir, **todas** las representaciones matriciales de un operador lineal T forman un grupo de equivalencia de matrices **similares**.

Teorema Sea A la representación matricial de un operador lineal T, entonces T es **diagonalizable** $\iff$ **existe** una matriz invertible P^{-1} tal que $P^{-1}AP$ sea una matriz **diagonal**.

Es decir, T será **diagonalizable** $\iff$ su representación matricial se puede diagonalizar mediante una **transformación de similaridad**.

Suponiendo que f es una función en matrices cuadradas que asigna el **mismo valor** a matrices **similares**,

$$f(A) = f(B) \;\; \forall \;\; B = P^{-1}AP,$$

entonces f induce una función en operadores lineales que se **hereda** de manera directa a las representaciones matriciales de tal operador,

$$f(T) = f\left([T]_S\right),$$
$$\forall \;\; T = \text{operador lineal}, \;\; S = \text{una base del espacio vectorial.}$$

Ejemplos de funciones que aplican a matrices:

- **Determinante**: $\det(A)$,
- **Traza**: $\mathrm{tr}(A)$.