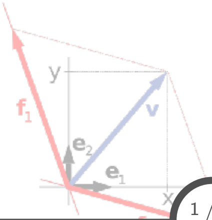
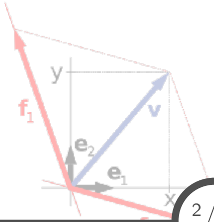
Contenido

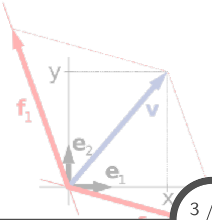
3. Producto interno, ortogonalidad



Contenido: Tema 03



Contenido: Tema 03



Producto interno

Definiciones

Sea V un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{R}$ **real** y supongamos que a cada **par** de vectores $u, v \in V$ se le asigna un **número real**, denotado como:

$$\langle u|v\rangle \quad \leftarrow \quad \textbf{producto interno} \text{ en } V.$$

Lo anterior debe satisfacer las siguientes condiciones,

$$\begin{aligned}
[I_1]\ (\textbf{lineal}) &: \ \langle au_1 + bu_2|v\rangle = a\langle u_1|v\rangle + b\langle u_2|v\rangle\,, \\
&: \ \langle u|cv_1 + dv_2\rangle = c\langle u|v_1\rangle + d\langle u|v_2\rangle\,, \\
[I_2]\ (\textbf{simétrico}) &: \ \langle u|v\rangle = \langle v|u\rangle\,, \\
[I_3]\ (\textbf{positivo}) &: \ \langle u|u\rangle \geq 0, \ \text{donde } \ \langle u|u\rangle = 0 \iff u = 0.
\end{aligned}$$

El espacio vectorial V en el que es posible definir el **producto interno** se le denomina **espacio vectorial de producto interno**.

Producto interno

Combinaciones lineales

Utilizando las condiciones de que el producto interno es **lineal** $[I_1]$ y **simétrico** $[I_2]$, es posible definirlo en **combinaciones lineales**,

$$\left\langle \sum_i a_i u_i \middle| \sum_j b_j v_j \right\rangle = \sum_{ij} a_i b_j \langle u_i | v_j \rangle \, ,$$

es decir, el prod. interno de combinaciones lineales de vectores es **igual** a la comb. lineal de los productos internos de dichos vectores.

Ejemplos

$$\begin{aligned}
\langle 3u_1 - 4u_2 | 2v_1 - 5v_2 + 6v_3 \rangle &= 6 \langle u_1 | v_1 \rangle - 15 \langle u_1 | v_2 \rangle + 18 \langle u_1 | v_3 \rangle + \dots \\
&\quad \dots - 8 \langle u_2 | v_1 \rangle + 20 \langle u_2 | v_2 \rangle - 24 \langle u_2 | v_3 \rangle \, , \\
\langle 2u - 5v | 4u + 6v \rangle &= 8 \langle u | u \rangle + 12 \langle u | v \rangle - 20 \langle v | u \rangle - 30 \langle v | v \rangle \, , \\
&= 8 \langle u | u \rangle - 8 \langle u | v \rangle - 30 \langle v | v \rangle \, ,
\end{aligned}$$

en donde se ha aplicado la propiedad de **simetría**: $\langle u | v \rangle = \langle v | u \rangle$.

Debido a la condición de que el producto interno es **positivo** $[I_3]$:

$$\langle u|u\rangle \geq 0 \ \ \forall \ \ u,$$

entonces su raíz cuadrada **existe**, por tanto se puede definir la **norma** del vector u como,

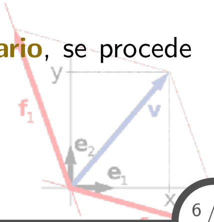
$$\|u\| = \sqrt{\langle u|u\rangle},$$
$$\|u\|^2 = \langle u|u\rangle \, .$$

Se observa que si se tiene $\|u\| = 1 \Rightarrow \langle u|u\rangle = 1$, por tanto:

- Al vector u se le llama **vector unitario**,
- Se dice que el vector u está **normalizado**.

Para **normalizar** un vector u obtener su **vector unitario**, se procede como sigue:

$$\hat{u} = \frac{1}{\|u\|} u.$$



Producto interno

Espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$

Considerando un espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, entonces el **producto punto** o **escalar** se define como,

$$u \cdot v = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n,$$
$$\forall\ u = (a_1, a_2, \ldots, a_n), \quad v = (b_1, b_2, \ldots, b_n),$$

lo cual determina el **producto interno** en $\mathbb{R}^n$.

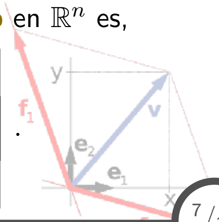
La **norma** $\|u\|$ para el vector u en este espacio vendrá dado como,

$$\|u\| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots a_n^2},$$

resultado que corresponde a la **distancia** o **longitud** del vector u.

La forma estándar de representar al **producto interno** en $\mathbb{R}^n$ es,

$$\langle u|v\rangle = u^T v = \begin{bmatrix} a_1, & a_2, & \ldots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$



Producto interno

Espacio de funciones $C[a,b]$ y espacio polinomial $P(t)$

$C[a,b]$ denota el espacio vectorial de todas las **funciones contínuas** en el intervalo cerrado $[a,b] = a \leq t \leq b$. Por tanto, definiendo el **producto interno** $\forall\ f(t), g(t) \in C[a,b]$:

$$\langle f|g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt.$$

Debido a que el espacio vectorial de todos los polinomios $P(t)$ es un **subespacio** de $C[a,b]$ $\Rightarrow$ la expresión anterior también representa el producto interno en $P(t)$.

Ejemplo

Se tiene $f(t) = 3t - 5$ y $g(t) = t^2$, entonces calculando $\langle f|g \rangle$:

$$\langle f|g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt = \int_0^1 (3t-5)t^2 dt$$
$$= \int_0^1 (3t^3 - 5t^2)dt = \left[(3/4)t^4 - (5/3)t^3\right]_0^1 = -11/12.$$

Producto interno

Espacio de matrices $\mathbb{M}_{m,n}$

Sea $\mathbb{M}_{m,n}$ el espacio vectorial de todas las **matrices** reales $m \times n \Rightarrow$ el **producto interno** definido en $\mathbb{M}_{m,n}$ estará dado por,

$$\langle A|B\rangle = \mathrm{tr}(A^T B) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij},$$

es decir, la suma de los productos de todas las entradas de A y B.

Ejemplo: Para $\mathbb{M}_{3,2}$, calcular $\langle A|B\rangle$, donde:

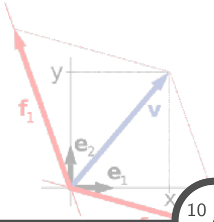
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}, \; A^T B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix},$$

$$A^T B = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21} + a_{31}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{21}b_{22} + a_{31}b_{32} \\ a_{12}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{32}b_{31} & a_{12}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{32}b_{32} \end{bmatrix},$$

$$\therefore \; \mathrm{tr}(A^T B) = a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21} + a_{31}b_{31} + a_{12}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{32}b_{32},$$

$$\mathrm{tr}(A^T B) = \sum_{i=1}^{3} \left[a_{i1}b_{i1} + a_{i2}b_{i2}\right] = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{2} a_{ij} b_{ij}.$$

Contenido: Tema 03



Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Definición

Teorema Para cualquiera vectores u, v en un espacio de producto interno V se tiene:

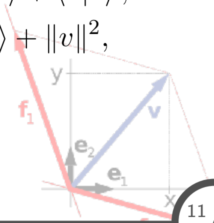
$$\langle u|v\rangle^2 \leq \langle u|u\rangle \langle v|v\rangle \quad \text{ó} \quad |\langle u|v\rangle| \leq \|u\|\|v\|,$$

lo que se conoce como la **desigualdad de Cauchy-Schwarz**.

Demostración

Considerando para cualquier $t \in \mathbb{R}$ y $u, v \in V$, entonces calculando $\langle tu+v|tu+v\rangle$,

$$\begin{aligned} \langle tu+v|tu+v\rangle &= t^2 \langle u|u\rangle + 2t \langle u|v\rangle + \langle v|v\rangle\,, \\ &= t^2\|u\|^2 + 2t \langle u|v\rangle + \|v\|^2, \\ \text{pero} \;\; \langle tu+v|tu+v\rangle &= \|tu+v\|^2 \geq 0, \\ \therefore \quad t^2\|u\|^2 + 2t \langle u|v\rangle + \|v\|^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

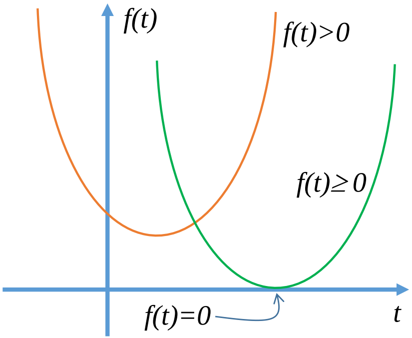


Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Definición

Lo anterior se puede considerar como una ecuación cuadrática en t,

$$
\begin{aligned}
&t^2\|u\|^2 + 2t\,\langle u|v\rangle + \|v\|^2 \geq 0,\\
&f(t) = at^2 + bt + c \geq 0,\\
&\forall\ \ a = \|u\|^2,\ \ b = 2\,\langle u|v\rangle\,,\ \ c = \|v\|^2,
\end{aligned}
$$



Debido a que $f(t) \geq 0$, sólo se tienen **dos** opciones:

- $f(t)$ sólo tiene **una** solución real $\Rightarrow f(t) = 0$,
- $f(t)$ **no** tiene solución real en absoluto.

Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Definición

Analizando las posibles soluciones de $f(t)$,

$$f(t) = at^2 + bt + c,$$

$$\forall \;\; t = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

Si sólo se tiene **una solución**, $f(t) = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0$,

$$4\langle u|v\rangle^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2 = 0,$$

$$\langle u|v\rangle^2 = \|u\|^2\|v\|^2,$$

$$\langle u|v\rangle^2 = \langle u|u\rangle\langle v|v\rangle,$$

ó $|\langle u|v\rangle| = \|u\|\|v\|$.

Si **no** tiene soluciones **reales**, $f(t) > 0 \Rightarrow b^2 - 4ac < 0$.

$$4\langle u|v\rangle^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2 < 0,$$

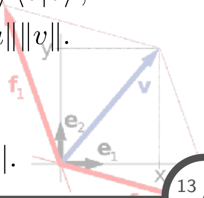
$$\langle u|v\rangle^2 < \|u\|^2\|v\|^2,$$

$$\langle u|v\rangle^2 < \langle u|u\rangle\langle v|v\rangle,$$

ó $|\langle u|v\rangle| < \|u\|\|v\|$.

Uniendo ambas condiciones, se tiene finalmente,

$$\langle u|v\rangle^2 \leq \langle u|u\rangle\langle v|v\rangle \quad \text{ó} \quad |\langle u|v\rangle| \leq \|u\|\|v\|.$$



Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Descripción en diferentes espacios vectoriales

Espacio Euclidiano

$$u = (a_1, a_2, \ldots, a_n),\ u = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \ \Rightarrow \ (u \cdot v)^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2,$$

$$\therefore (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)$$

Espacio de funciones $P(t)$

$$f(t), g(t) \in P(t) \ \Rightarrow \ \langle f|g \rangle^2 \leq \|f\|^2 \|g\|^2,$$

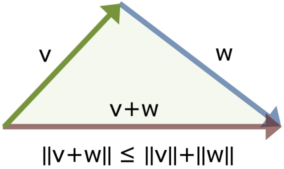
$$\therefore \ \left[\int_0^1 f(t) g(t) dt \right]^2 \leq \int_0^1 f(t)^2 dt \int_0^1 g(t)^2 dt.$$

Teorema Sea V un espacio vectorial de producto interno $\Rightarrow$ la **norma** en V satisface las siguientes propiedades:

$[N_1] : \|v\| \geq 0;\ \|v\| = 0 \leftrightarrow v = 0.$

$[N_2] : \|kv\| = |k| \|v\| \quad \forall \quad k \in \mathbb{R}.$

$[N_3] : \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|.$



Desigualdad de Cauchy-Schwarz

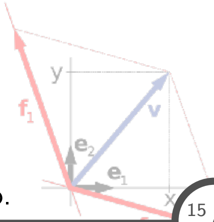
Ángulo entre vectores

Para vectores $u, v \neq 0$ pertenecientes a un espacio vectorial de producto interno V se tiene que el **ángulo** θ entre u y v se define como:

$$\text{Cos}\theta = \frac{\langle u|v\rangle}{\|u\|\|v\|}.$$

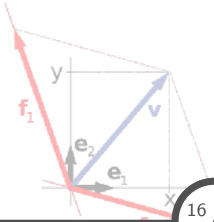
Para analizar el rango de valores posibles de θ, se utiliza la **desigualdad de Cauchy-Schwarz**,

$$\begin{aligned} &|\langle u|v\rangle| \leq \|u\|\|v\|, \\ \Rightarrow\ & -\|u\|\|v\| \leq \langle u|v\rangle \leq \|u\|\|v\|, \\ \therefore\ & -1 \leq \frac{\langle u|v\rangle}{\|u\|\|v\|} \leq 1, \\ \therefore\ & -1 \leq \text{Cos}\theta \leq 1 \\ \Rightarrow\ & 0 \leq \theta \leq \pi, \end{aligned}$$



es decir, el ángulo no podrá pasar de π ni ser negativo.

Contenido: Tema 03



Bases ortogonales

Definición

Sea V un espacio vectorial de producto interno, los vectores $u, v \in V$ serán **ortogonales** si:

$$\langle u|v\rangle = 0,$$

propiedad que es **simétrica**: $\langle u|v\rangle = \langle v|u\rangle = 0$.

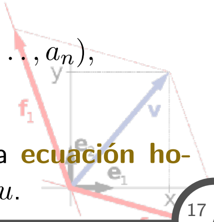
Observaciones

- $\langle 0|u\rangle = \langle u|0\rangle = 0$, por tanto el vector cero es ortogonal a **todo** $u \in V$.
- Si $\langle u|v\rangle = 0 \;\Rightarrow\;$ Cos$\theta = 0 \;\Rightarrow\; \theta = \pi/2$.
- Un vector w es **ortogonal** a u en $\mathbb{R}$, con:

$$w = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad u = (a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

$$\text{si} \quad \langle w|u\rangle = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0,$$

es decir, w y u serán ortogonales si satisfacen una **ecuación homogénea**, cuyos coeficientes son los elementos de u.



Bases ortogonales

Complementos ortogonales

Sea S un subset de vectores en el espacio vectorial de producto interno V, entonces el **complemento ortogonal** de S, denotado como $S^{\perp}$, consiste en los vectores de V que son ortogonales a **cada vector** $u \in S$,

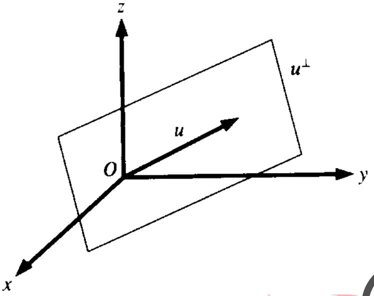
$$S^{\perp} = \{v \in V \ : \ \langle v|u\rangle = 0 \ \forall \ u \in S\}.$$

En particular para **un vector** específico $u \in V$, se puede definir:

$$u^{\perp} = \{v \in V \ : \ \langle v|u\rangle = 0\},$$

es decir, $u^{\perp}$ consiste de **todos** los vectores en V que son **ortogonales** a **un vector** dado u.

Suponiendo $u \neq 0$ en $\mathbb{R}^3$, entonces $u^{\perp}$ representa el **plano** en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen O y es **perpendicular** al vector u.



Bases ortogonales

Complementos ortogonales

Analizando $S^{\perp}$ se observa lo siguiente:

- $0 \in S^{\perp}$ ya que $\langle 0|u\rangle = 0 \ \forall \ u \in V$.
- Si $v, w \in S^{\perp} \Rightarrow$ construyendo una **combinación lineal** con $a, b \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$\langle av + bw|u\rangle = a\,\langle v|u\rangle + b\,\langle w|u\rangle \ = 0 \quad \therefore \ av + bw \in S^{\perp}.$$

Las condiciones anteriores representan la definición de un **subespacio** de V cuando S es un subset del espacio vectorial de producto interno V.

Recordando, además, que si se tiene un sistema **homogéneo** $m \times n$,

$$AX = 0 \ \ \forall \ \ A = [a_{ij}] \ \& \ X = [x_i],$$

entonces el subespacio solución W representa el **kernel** del mapeo lineal $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Es decir,

$$AX = 0 \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \therefore\; a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0, \\ \vdots \qquad &\ \ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0, \end{aligned}$$

por tanto, se puede considerar **cada** vector solución $w = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ como **ortogonal** a cada fila de la matriz A, con lo cual, el subespacio W será el **complemento ortogonal** del espacio de filas de A.

Bases ortogonales

Sets y bases ortogonales

Considerando un **set** $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$ de vectores, diferentes de cero, en un espacio vectorial de producto interno V, entonces S será:

- **Ortogonal**, si cada par de vectores en S son **ortogonales**,

$$\langle u_i | u_j \rangle = 0 \ \ \forall \ \ i \neq j.$$

- **Ortonormal**, si S es ortogonal, y cada vector en S es **unitario**,

$$\langle u_i | u_j \rangle = \begin{cases} 0, & \forall \ \ i \neq j, \\ 1, & \forall \ \ i = j. \end{cases}$$

Teorema Si S es un set **ortogonal** de vectores diferentes de cero $\Rightarrow$ el set es **linealmente independiente**.

Teorema Suponga que $\{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$ es un set **ortogonal** de vectores $\Rightarrow$ se cumple,

$$\|u_1 + u_2 + \ldots + u_r\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + \ldots + \|u_r\|^2.$$

Bases ortogonales

Sets y bases ortogonales: ejemplos

Espacio Euclidiano: Se tiene la **base estándar** en $\mathbb{R}^n$,

$$E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\} = \{(1,0,\ldots,0), (0,1,\ldots,0), \ldots, (0,0,\ldots,1)\},$$

analizando la condición de **ortonormalidad**,

$$\langle e_i | e_j \rangle = \begin{cases} 0, & \forall \;\; i \neq j, \\ 1, & \forall \;\; i = j, \end{cases}$$

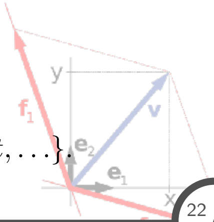
por tanto, se observa que E es una base **ortonormal**.

Espacio de Funciones: Sea $V = C[-\pi, \pi]$ el espacio vectorial de funciones contínuas en el intervalo $[-\pi, \pi]$ con el producto interno:

$$\langle f | g \rangle = \int_0^1 f(t) g(t) dt,$$

entonces, un ejemplo de set **ortogonal** en V es:

$$\{1, \text{Cos}t, \text{Cos}2t, \text{Cos}3t, \ldots, \text{Sen}t, \text{Sen}2t, \text{Sen}3t, \ldots\}.$$



Bases ortogonales

Coeficientes de Fourier, proyecciones

Teorema Sea $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ un **set ortogonal** de V, y como es **linealmente independiente** $\Rightarrow$ forma una **base**. Por tanto, $\forall\ v \in V$ se tiene:

$$v = \frac{\langle u_1|v\rangle}{\langle u_1|u_1\rangle}u_1 + \frac{\langle u_2|v\rangle}{\langle u_2|u_2\rangle}u_2 + \dots + \frac{\langle u_n|v\rangle}{\langle u_n|u_n\rangle}u_n,$$

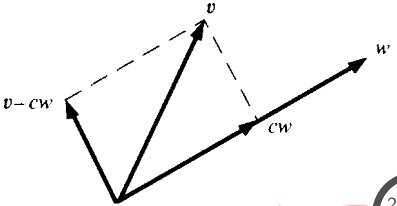
en donde el escalar $k_i = \langle u_i|v\rangle / \langle u_i|u_i\rangle$ se le conoce como el **coeficiente de Fourier** de v respecto a u_i.

Sea V un espacio de producto interno y donde $v, w \in V$, ambos diferentes de cero. La **proyección** de v sobre w será el múltiplo cw tal que $v' = v - cw$ es **ortogonal** a w:

$$\langle w|v - cw\rangle = 0,$$

$$\Rightarrow\ \langle w|v\rangle - c\,\langle w|w\rangle = 0,$$

$$\therefore\ c = \frac{\langle w|v\rangle}{\langle w|w\rangle}.$$



Bases ortogonales

Coeficientes de Fourier, proyecciones

Por tanto, la **proyección** de v sobre w se define como:

$$\mathrm{proj}(w,v) = cw = \frac{\langle w|v\rangle}{\langle w|w\rangle} w,$$

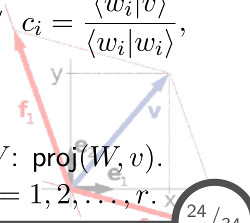
en donde el escalar c será **único**, y representa el **coeficiente de Fourier** de v respecto a w, es decir, la **componente** de v en w.

Teorema Suponiendo que $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_r\}$ forma un set ortogonal de vectores diferentes de cero en V y que $v \in V$ $\Rightarrow$ se puede definir:

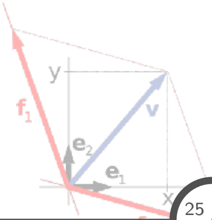
$$\begin{aligned} v' &= v - \mathrm{proj}(W,v), \\ &= v - (c_1w_1 + c_2w_2 + \ldots + c_rw_r) \quad \forall \quad c_i = \frac{\langle w_i|v\rangle}{\langle w_i|w_i\rangle}, \end{aligned}$$

siendo,

- v' **ortogonal** a $w_1, w_2, \ldots, w_r$.
- $c_1w_1 + c_2w_2 + \ldots + c_rw_r$ la **proyección** de v en W: $\mathrm{proj}(W,v)$.
- c_i los **coefientes de Fourier** de v sobre los w_i $\forall$ $i = 1, 2, \ldots, r$.



Contenido: Tema 03



Ortogonalización de Gram-Schmidt

Definición

Sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una **base** de un espacio vectorial de producto interno $V \Rightarrow$ es posible utilizar esta base para construir una **base ortogonal** $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ de la siguiente manera,

$$
\begin{aligned}
w_1 &= v_1, \\
w_2 &= v_2 - \frac{\langle w_1 | v_2 \rangle}{\langle w_1 | w_1 \rangle} w_1, \\
w_3 &= v_3 - \frac{\langle w_1 | v_3 \rangle}{\langle w_1 | w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle w_2 | v_3 \rangle}{\langle w_2 | w_2 \rangle} w_2, \\
\vdots \quad &\vdots \\
w_n &= v_n - \frac{\langle w_1 | v_n \rangle}{\langle w_1 | w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle w_2 | v_n \rangle}{\langle w_2 | w_2 \rangle} w_2 - \ldots - \frac{\langle w_{n-1} | v_n \rangle}{\langle w_{n-1} | w_{n-1} \rangle} w_{n-1},
\end{aligned}
$$

es decir, para $k = 2, 3, \ldots, n$ es posible definir,

$$
w_k = v_k - c_{1k} w_1 - c_{2k} w_2 - \ldots - c_{k-1,k} w_{k-1} \quad \forall \quad c_{ik} = \frac{\langle w_i | v_k \rangle}{\langle w_i | w_i \rangle},
$$

Ortogonalización de Gram-Schmidt

Observaciones

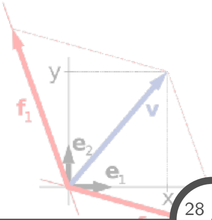
- El c_{ik} es la **componente** de v_k sobre w_i.
- Cada w_k es **ortogonal** a sus w's predecesores, por tanto el set $\{w_1, w_2, \ldots, w_r\}$ forma una **base ortogonal** en V.
- Normalizando cada w_i se obtiene una **base ortonormal** en V.
- El formalismo anterior se conoce como el **proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt**.
- Cada vector w_k es una **combinación lineal** de v_k y los w's prededentes, por tanto w_k también es una comb. lineal de $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.
- Debido a que tomar el múltiplo de un vector **no afecta** la prop. de ortogonalidad $\Rightarrow$ se pueden eliminar los coeficientes fraccionarios a un w_k para luego aplicarlo en la obtención de w_{k+1}.

Teorema Sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una **base** del espacio $V \Rightarrow$ existe una **base ortonormal** $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ de V tal que la matriz de **cambio de base** de $\{v_i\}$ a $\{u_i\}$ es **triangular**,

$$u_k = a_{k1}v_1 + a_{k2}v_2 + \ldots + a_{kk}v_k \quad \forall \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Contenido: Tema 03

3. Producto interno, ortogonalidad
3.1 Producto interno
3.2 Desigualdad de Cauchy-Schwarz
3.3 Bases ortogonales
3.4 Ortogonalización de Gram-Schmidt
3.5 Matrices ortogonales y espacios complejos



Matrices ortogonales y espacios complejos

Definición

Una matriz real P es **ortogonal** si y solo si:

- Es **no-singular**.[1]
- $P^{-1} = P^T \Rightarrow PP^T = P^TP = \mathbb{1}$.

Teorema Sea P una matriz real, entonces las siguientes aseveraciones son equivalentes:

(i) P es **ortogonal**.

(ii) Las **filas** de P forman un set **ortonormal**.

(iii) Las **columnas** de P forman un set **ortonormal**.

Ejemplos

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix},$$

Se observa que las **filas** de la matriz P son **ortonormales**,

$$\langle f_i | f_j \rangle = 0 \;\; \forall \;\; i \neq j,$$
$$\langle f_i | f_j \rangle = 1 \;\; \forall \;\; i = j,$$

por tanto, P es una matriz **ortogonal**.

[1] Es decir, tiene **inversa**.

Matrices ortogonales y espacios complejos

Propiedades

Se tiene,

$$P = \begin{bmatrix} \text{Cos}\theta & \text{Sen}\theta \\ -\text{Sen}\theta & \text{Cos}\theta \end{bmatrix},$$

$$\langle c_i | c_j \rangle = 0 \quad \forall \quad i \neq j,$$
$$\langle c_i | c_j \rangle = 1 \quad \forall \quad i = j,$$

$\Rightarrow$ se observa que las **columnas** de P forman un set **ortonormal**, por tanto, P representa una matriz **ortogonal**.

Teorema Suponiendo que $E = \{e_i\}$ y $E' = \{e'_i\}$ son dos bases **ortonormales** de V, y sea P la matriz de **cambio de base** de E a E' $\Rightarrow$ la matriz P es **ortogonal**.

Teorema Sea $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ una base **ortonormal** de un espacio vectorial de producto interno V y $P = [a_{ij}]$ una matriz **ortogonal** $\Rightarrow$ los siguientes n vectores forman una base **ortonormal** de V,

$$e'_i = a_{1i}e_1 + a_{2i}e_2 + \ldots + a_{ni}e_n \quad \forall \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Matrices ortogonales y espacios complejos

Representación matricial del producto interno

Sea V un esp. vectorial de producto interno con una base $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \Rightarrow$ la matriz $A = [a_{ij}]\ \forall\ a_{ij} = \langle u_i | u_j \rangle$ es la **representación matricial del producto interno** en V, relativa a S.

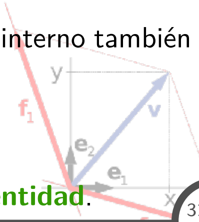
Ejemplo

Se tiene la base $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ en $\mathcal{R}^3$, con $u_1 = (1,1,0)$, $u_2 = (1,2,3)$, y $u_3 = (1,3,5)$ $\therefore$ la matriz A estará dada como:

$$A = \begin{bmatrix} \langle u_1|u_1\rangle & \langle u_1|u_2\rangle & \langle u_1|u_3\rangle \\ \langle u_2|u_1\rangle & \langle u_2|u_2\rangle & \langle u_2|u_3\rangle \\ \langle u_3|u_1\rangle & \langle u_3|u_2\rangle & \langle u_3|u_3\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 14 & 22 \\ 4 & 22 & 35 \end{bmatrix}.$$

Observaciones

- A es **simétrica**: $A = A^T$, debido a que el producto interno también lo es: $\langle u_i|u_j\rangle = \langle u_j|u_i\rangle$.
- A depende del **producto interno** y de la **base**.
- Si S es una base **ortogonal** $\Rightarrow$ A es **diagonal**.
- Si S es una base **ortonormal** $\Rightarrow$ A es la matriz **identidad**.



Matrices ortogonales y espacios complejos

Representación matricial del producto interno

Teorema Sea A la representación matricial de un producto interno relativo a la base S de V $\Rightarrow$ para cualquiera vectores $u, v \in V$ se tiene,

$$\langle u|v\rangle = [u]_S^T A[v]_S,$$

en donde $[u]_S$ y $[v]_S$ denotan los vectores de coordenadas relativos a la base S.

Ejemplo

Calcular $\langle w_1|w_2\rangle$, donde $w_1 = 2u_1 + 3u_2 + u_3$ y $w_2 = -u_1 + u_2 - u_3$, siendo la base $S = \{u_1, u_2, u_3\} = \{(1,1,0),(1,2,3),(1,3,5)\}$,

$$\therefore \quad \langle w_1|w_2\rangle = [w_1]_S^T A[w_2]_S = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 14 & 22 \\ 4 & 22 & 35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$= -56.$$

Matrices ortogonales y espacios complejos

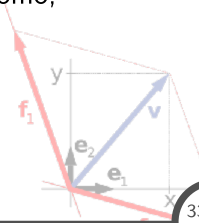
Espacios de producto interno complejos

Considerando un espacio vectorial V sobre el campo de los **complejos** $\mathbb{C}$, entonces algunos conceptos y propiedades del producto interno se modificarán de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
[I_2^*]\ (\textbf{simétrico conjugado}) &: \ \langle u|v\rangle = \langle v|u\rangle^* \,, \\
&: \ \langle ku|v\rangle = k^* \langle u|v\rangle \,. \\
[I_1^*]\ (\textbf{lineal}) &: \ \langle au_1 + bu_2|v\rangle = a^* \langle u_1|v\rangle + b^* \langle u_2|v\rangle \,, \\
&: \ \langle u|cv_1 + dv_2\rangle = c \langle u|v_1\rangle + d \langle u|v_2\rangle \,.
\end{aligned}
$$

En donde la **combinación lineal** ahora vendrá dada como,

$$
\left\langle \sum_i a_i u_i \middle| \sum_j b_j v_j \right\rangle = \sum_{ij} a_i^* b_j \langle u_i|v_j\rangle \,.
$$



Matrices ortogonales y espacios complejos

Espacios de producto interno complejos

La definición del producto interno **euclidiano** vendrá dado como,

$$\langle u|v\rangle = (u^*)^T v,$$

$$\langle u|v\rangle = \sum_{k=1}^{n} z_k^* w_k \quad \forall \quad u = (z_1, z_2, \ldots, z_n), \quad v = (w_1, w_2, \ldots, w_n).$$

Para el caso de espacios de **funciones**,

$$\langle f|g\rangle = \int_a^b f^*(t) g(t) dt,$$

y para el espacio de **matrices**:

$$\langle A|B\rangle = \mathrm{tr}(A^\dagger B) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^* b_{ij},$$

en donde se define $A^\dagger = (A^*)^T$ es decir, su **transpuesta conjugada**. Finalmente, una matriz es **hermítica** cuando se cumple,

$$A^\dagger = A.$$