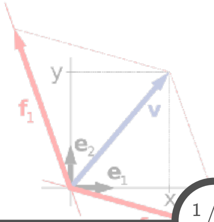
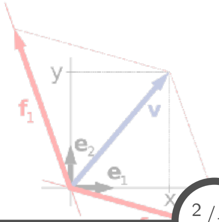
Contenido

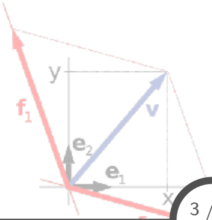
4. Eigenvalores y eigenvectores



Contenido: Tema 04



Contenido: Tema 04



Polinomio característico

Matrices y operadores, polinomios

Matriz

Se tiene una matriz A cuadrada de dimensión n. Esta matriz A será **diagonalizable** si existe una matriz no-singular P tal que,

$$B = P^{-1}AP \text{ es } \textbf{diagonal}.$$

Operador

Se tiene un operador lineal $T : V \to V$. El operador T será **diagonalizable** si existe una base S en V tal que la representación matricial de T relativo a S, $[T]_S$, sea una matriz **diagonal**.

Polinomios de matrices

Se considera un polinomio $f(t) = a_n t^n + \ldots + a_1 t + a_0$ sobre un campo K. Entonces, si A es una matriz cuadrada genérica, se puede definir,

$$f(A) = a_n A^n + \ldots + a_1 A + a_0 \mathbb{1} \quad \forall \quad \mathbb{1} = \text{matriz identidad},$$

en particular, se dice que A es **raiz** de $f(t)$ si $f(A) = 0$, es decir, igual a la matriz **cero**.

En general, para los polinomios f y g, así como cualquier matriz cuadrada A y un escalar k se tiene:

$$\begin{aligned} (i) &\quad (f+g)(A) = f(A) + g(A), \\ (ii) &\quad (fg)(A) = f(A)g(A), \\ (iii) &\quad (kf)(A) = kf(A), \\ (iv) &\quad f(A)g(A) = g(A)f(A). \end{aligned}$$

Para el caso de **operadores lineales**, solo basta recordar que las potencias de T se definen mediante la **composición**,

$$T^2 = T \circ T, \quad T^3 = T^2 \circ T, \ldots$$
$$\therefore \; f(T) = a_n T^n + \ldots + a_1 T + a_0 I \quad \forall \quad I = \text{operador identidad},$$

en donde también se puede considerar a T como **raiz** de $f(t)$ si se cumple $f(T) = 0$, es decir, igual al mapeo **cero**.

Polinomio característico

Polinomio característico

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz cuadrada de dimensión n, entonces es posible construir la matriz M dada por,

$$
\begin{aligned}
M &= A - t\mathbb{1}_n \;\; \forall \;\; \mathbb{1}_n = \text{matriz identidad}, \\
\Rightarrow \quad -M &= t\mathbb{1}_n - A,
\end{aligned}
$$

siendo t indeterminado, y en donde su determinante:

$$
\Delta(t) = \det(t\mathbb{1}_n - A) = (-1)^n \det(A - t\mathbb{1}_n),
$$

define un polinomio en t de grado n, el cual se conoce como el **polinomio característico** de A.

Teorema Cayley-Hamilton Cualquier matriz A será **raiz** de su propio **polinomio característico**.

Polinomio característico

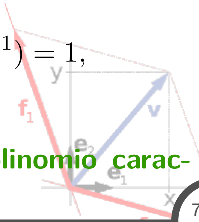
Polinomio característico

Suponiendo que A y B son matrices **similares**, es decir:

$$B = P^{-1}AP \ \ \forall \ \ P = \text{matriz de cambio de base},$$

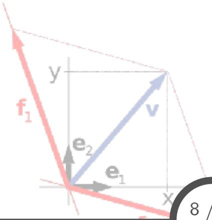
entonces analizando el **polinomio característico** de ambas matrices,

$$\begin{aligned}
\Delta_B(t) &= \det(t\mathbb{1} - B) = \det(t\mathbb{1} - P^{-1}AP), \\
\text{pero} \ \ t\mathbb{1} &= P^{-1}t\mathbb{1}P, \\
\therefore \quad \Delta_B(t) &= \det(P^{-1}t\mathbb{1}P - P^{-1}AP), \\
&= \det\left[P^{-1}(t\mathbb{1} - A)P\right], \\
&= \det(P^{-1})\det(t\mathbb{1} - A)\det(P), \\
&= \det(t\mathbb{1} - A) \ \ \forall \ \ \det(P)\det(P^{-1}) = 1, \\
\Rightarrow \quad \Delta_B(t) &= \Delta_A(t).
\end{aligned}$$



Teorema Matrices **similares** tienen el **mismo polinomio característico**.

Contenido: Tema 04



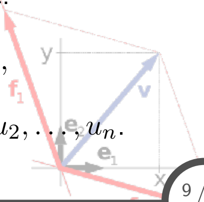
Sea A una matriz cuadrada de dimensión $n \Rightarrow A$ puede ser **similar** a una **matriz diagonal** $D = \mathrm{diag}(k_1, k_2, \ldots, k_n) \iff$ **existe** una base S que consista de vectores (columna) $u_1, u_2, \ldots, u_n$ tal que,

$$
\begin{aligned}
Au_1 &= k_1 u_1, \\
Au_2 &= \quad\quad k_2 u_2, \\
\vdots &= \quad\quad \vdots \\
Au_n &= \quad\quad\quad\quad k_n u_n,
\end{aligned}
$$

en tal caso, se dice que A es **diagonalizable**, en donde:

$$D = P^{-1} A P \;\; \forall \;\; P = \text{matriz no-singular},$$

donde las columnas de P serán los **vectores base** $u_1, u_2, \ldots, u_n$.



Diagonalización, eigenvalores y eigenvectores

Eigenvalor, eigenvector

Sea A una matriz cuadrada $\Rightarrow$ un escalar λ se le conoce como **eigenvalor** de A si existe un **vector** (columna) u diferente de cero, tal que

$$Au = \lambda u,$$

donde a u se le conoce como el **eigenvector** de A perteneciente al eigenvalor λ.

El set E_λ formado por todos los eigenvectores representa un subespacio de V, el cual se le conoce como **eigenespacio** de λ.

Teorema Una matriz A cuadrada de dimensión n es **similar** a una matriz **diagonal** $D \Longleftrightarrow A$ tiene n **eigenvectores** linealmente independientes, en donde los elementos de la diagonal de D son los **eigenvalores** correspondientes, con:

$$D = P^{-1}AP,$$

siendo P la matriz cuyas columnas son los eigenvectores

Diagonalización, eigenvalores y eigenvectores

Factorización

Si A es una matriz que puede ser diagonalizada, entonces se cumple:

$$D = P^{-1}AP \quad \forall \quad D = \text{diagonal},$$
$$\therefore \quad A = PDP^{-1},$$

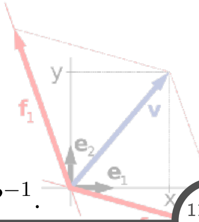
lo cual se conoce como **factorización diagonal**.

Utilizando esta factorización, es posible simplificar el álgebra de A al álgebra de la matriz diagonal $D \; \forall \; D = \text{diag}(k_1, k_2, \ldots, k_n)$,

$$\begin{aligned} A^m &= (PDP^{-1})^m = (PDP^{-1})(PDP^{-1})\ldots(PDP^{-1}), \\ &= PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P)\ldots(P^{-1}P)DP^{-1}, \\ &= PD^mP^{-1}, \\ &= P\text{diag}(k_1^m, k_2^m, \ldots, k_n^m)P^{-1}, \end{aligned}$$

por tanto, para cualquier polinomio $f(t)$,

$$\begin{aligned} f(A) = f(PDP^{-1}) &= Pf(D)P^{-1}, \\ &= P\text{diag}\left(f(k_1), f(k_2), \ldots, f(k_n)\right)P^{-1}. \end{aligned}$$



Teorema Sea A una matriz cuadrada $\Rightarrow$ las siguientes afirmaciones son equivalentes,

(i) Un escalar λ es un **eigenvalor** de A.

(ii) La matrix $M = A - \lambda \mathbb{1}$ es **singular**.

(iii) El escalar λ es una **raiz** del pol. característico $\Delta(t)$.

Demostración

- De una ec. de eigenvalores $Au = \lambda u \Rightarrow \lambda$ es un **eigenvalor** de A.
- El eigenvalor se obtiene mediante,

$$Au - \lambda u = 0 \quad \Rightarrow \quad (A - \lambda \mathbb{1})u = 0 \;\; \forall \;\; A - \lambda \mathbb{1} = M,$$

  para tener sol. diferente a la trivial debe ser una matriz **singular**.
- Analizando el polinomio característico de A,

$$\Delta(t) = \det(A - t\mathbb{1}), \quad \text{si } t = \lambda \;\; \Rightarrow \;\; \Delta(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1}),$$

  para que tenga solución, el rango de M debe ser menor al núm. de incógnitas,

$$\therefore \quad \det M = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta(\lambda) = 0.$$

Diagonalización, eigenvalores y eigenvectores

Propiedades de eingenvalores y eigenvectores

Del teorema anterior se observa que el **eigenespacio** E_λ es un **espacio solución** del sistema homogéneo $MX = 0 \;\forall\; M = A - \lambda\mathbb{1}$.

Teorema Suponiendo que $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son **eigenvectores** diferentes de cero de una matriz A pertenecientes a diferentes eigenvalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \Rightarrow v_1, v_2, \ldots, v_n$ son **linealmente independientes**.

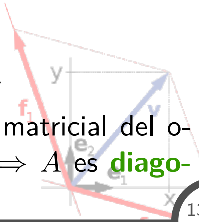
Teorema Si se tiene que el **polinomio característico** $\Delta(t)$ de una matriz cuadrada A de dimensión n es producto de n distintos factores,

$$\Delta(t) = (t - a_1)(t - a_2)\ldots(t - a_n),$$

$\Rightarrow A$ será **similar** a la matriz diagonal

$$D = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Teorema Suponiendo que A es la representación matricial del operador $T \Rightarrow T$ será **diagonalizable** $\Longleftrightarrow A$ es **diagonalizable**.



Diagonalización, eigenvalores y eigenvectores

Procedimiento

Se tiene una matriz cuadrada A de dimensión n,

(i) Hallar el **polinomio característico** $\Delta(t)$ de A.

(ii) Encontrar las **raices** de $\Delta(t)$ para obtener así los eigenvalores de A.

(iii) Repetir los siguientes pasos para **cada** eigenvalor λ de A:

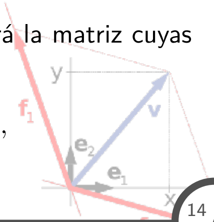
- (a) Formar la matriz $M = A - \lambda\mathbb{1}$.
- (b) Encontrar un vector base del espacio solución del sistema homogéneo $MX = 0$. Los vectores base encontrados son **eigenvectores** linealmente independientes de A pertenecientes a λ.

(iv) Considerando la colección $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ formada por todos los eigenvectores obtenidos para todos los λ,

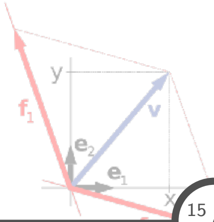
- (a) Si $m \neq n \Rightarrow A$ **no** es **diagonalizable**.
- (b) Si $m = n \Rightarrow A$ es **diagonalizable**, con lo cual P será la matriz cuyas columnas son los eigenvectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ con,

$$D = P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n),$$

$\forall\ \lambda_i$ el eigenvalor correspondiente al eigenvector v_i.



Contenido: Tema 04



Matrices reales y simétricas

Propiedades

Una matriz A es **simétrica** cuando $A = A^T$ y es **real** cuando $A = A^*$
$\Rightarrow$ ambas condiciones se reducen a $A = A^\dagger$.

Teorema Sea A una matriz **real** y **simétrica** $\Rightarrow$ cada **raiz** λ de su polinomio característico es **real**.

Demostración

Consideremos las ecuaciones de eigenvalores como,

$$Av = \lambda v \;\; \forall \;\; \lambda \;\&\; v \text{ pudiendo ser complejos,}$$

$$\therefore \;\; v^\dagger A v = v^\dagger \lambda v \quad \Rightarrow \quad v^\dagger A v = \lambda v^\dagger v \;\; \forall \;\; v^\dagger v > 0.$$

Por otro lado,

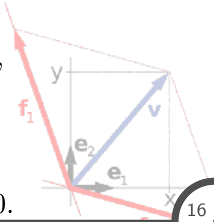
$$Av = \lambda v \quad \Rightarrow \quad (Av)^\dagger = (\lambda v)^\dagger,$$

$$\therefore \;\; v^\dagger A^\dagger = \lambda^* v^\dagger \quad \Rightarrow \quad v^\dagger A^\dagger v = \lambda^* v^\dagger v,$$

$$\therefore \;\; v^\dagger A v = \lambda^* v^\dagger v \;\; \forall \;\; A = A^\dagger,$$

comparando ambos resultados, tenemos:

$$\lambda v^\dagger v = \lambda^* v^\dagger v \quad \Rightarrow \quad \lambda = \lambda^* \;\; \forall \;\; v^\dagger v > 0.$$



Matrices reales y simétricas

Propiedades

Teorema Sea A una matriz **real** y **simétrica**. Suponiendo que u y v son **eigenvectores** de A y que pertenecen a diferentes eigenvalores λ_1 y $\lambda_2 \Rightarrow u$ y v son **ortogonales** $\langle u|v\rangle = 0$.

Demostración

$$\text{Se tiene,} \quad Au = \lambda_1 u, \quad Av = \lambda_2 v, \quad \forall \quad A = A^\dagger \quad \& \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{R},$$

$$\Rightarrow \quad v^\dagger A u = v^\dagger \lambda_1 u = \lambda_1 v^\dagger u \quad \& \quad u^\dagger A v = u^\dagger \lambda_2 v = \lambda_2 u^\dagger v,$$

aplicando el complejo conjugado a toda la primera expresión,

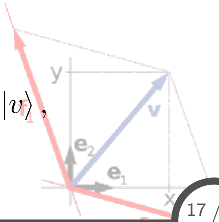
$$(v^\dagger A u)^\dagger = (\lambda_1 v^\dagger u)^\dagger \quad \Rightarrow \quad u^\dagger A^\dagger v = \lambda_1^* u^\dagger v \quad \Rightarrow \quad u^\dagger A v = \lambda_1 u^\dagger v,$$

comparando con el segundo resultado inicial,

$$u^\dagger A v = \lambda_1 u^\dagger v \quad \& \quad u^\dagger A v = \lambda_2 u^\dagger v,$$

$$\therefore \quad \lambda_1 u^\dagger v = \lambda_2 u^\dagger v \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 \langle u|v\rangle = \lambda_2 \langle u|v\rangle,$$

$$\Rightarrow \quad \langle u|v\rangle = 0 \quad \forall \quad \lambda_1 \neq \lambda_2.$$



Teorema Sea A una matriz **real** y **simétrica** $\Rightarrow$ existe una matriz **ortogonal** P tal que,

$$D = P^{-1}AP \ \ \forall \ \ D = \text{matriz diagonal.}$$

Demostración

De los teoremas anteriores, se tiene que los eigenvectores de matrices **hermíticas**[1] serán **ortogonales**, por tanto, basta con normalizarlos para formar las columnas **ortonormales** de la matriz de cambio de base P **ortogonal**.

Polinomio característico de matrices por bloques

Suponiendo que M es una matriz triangular **por bloques**,

$$M = \begin{bmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \ \ \forall \ \ A_1, A_2 \text{ matrices cuadradas,}$$

$\Rightarrow M - t\mathbb{1}$ será también una matriz triangular por bloques, con bloques **diagonales** $A_1 - t\mathbb{1}$ y $A_1 - t\mathbb{1}$.

[1] Es decir, reales y simétricas.

Matrices reales y simétricas

Matrices por bloques

De lo anterior, se tendría lo siguente,

$$M - t\mathbb{1} = \begin{bmatrix} A_1 - t\mathbb{1} & B \\ 0 & A_2 - t\mathbb{1} \end{bmatrix},$$

por tanto, calculando el determinante,

$$|M - t\mathbb{1}| = \begin{vmatrix} A_1 - t\mathbb{1} & B \\ 0 & A_2 - t\mathbb{1} \end{vmatrix} = |A_1 - t\mathbb{1}||A_2 - t\mathbb{1}|,$$

es decir, el **polinomio característico** de M es el **producto** de los polinomios característicos de los bloques diagonales A_1 y A_2.

Teorema Suponiendo que M es una matriz triangular **por bloques**, con bloques diagonales $A_1, A_2, \ldots, A_r \Rightarrow$ el polinomio característico de M es el **producto** de polinomios característicos de los **bloques diagonales** A_i:

$$\Delta_M(t) = \Delta_{A_1}(t)\Delta_{A_2}(t)\ldots\Delta_{A_r}(t).$$