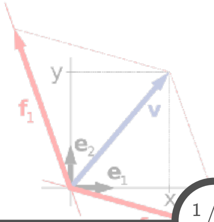
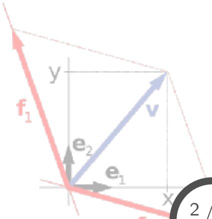
Contenido

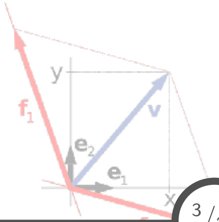
5. Operadores y espacios



Contenido: Tema 05



Contenido: Tema 05



Funcionales lineales y espacio dual

Funcionales lineales, ejemplos

Considerando mapeos lineales desde un **espacio vectorial** V, de dimensión n, a su propio **campo de escalares** K, de dimensión 1, entonces al mapeo,

$$\phi : V \rightarrow K$$

se le conoce como **funcional lineal** o **forma lineal** si $\forall\ u, v \in V$ y $a, b \in K$ se cumple con:

$$\phi(au + bv) = a\phi(u) + b\phi(v),$$

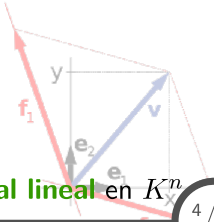
es decir, un funcional lineal en V será un mapeo **lineal** de V hacia K.

Ejemplos

- Sea $\pi_i : K^n \rightarrow K$ el mapeo de **proyección**,

$$\pi_i(a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n) = a_i,$$

el cual es **lineal**, por tanto representará un **funcional lineal** en K^n.



Funcionales lineales y espacio dual

Funcionales lineales, ejemplos

- Sea V el espacio vectorial de **polinomios** en t sobre $\mathcal{R}$, entonces definiendo,

$$J : V \rightarrow \mathcal{R} \;\; \forall \; J \text{ operador integral},$$

descrito como,

$$J(p(t)) = \int_0^1 p(t)dt,$$

el cual al ser **lineal**, se considera como un **funcional lineal** en V.

- Sea V el espacio vectorial de **matrices cuadradas** de dimensión n sobre K, entonces definiendo el mapeo de la **traza**,

$$T : V \rightarrow K,$$
$$T(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} \;\; \forall \;\; A = [a_{ij}],$$

es decir, el mapeo T asigna a la matriz A la suma de sus elementos diagonales $\Rightarrow$ es un mapeo **lineal**, y por tanto será un **funcional lineal** en V.

Funcionales lineales y espacio dual

Espacio dual

El set de transformaciones lineales en un esp. vectorial V sobre el campo K también forma un **espacio vectorial** sobre K, ya que cumple con las propiedades de **adición** y **multiplicación por un escalar**. Siendo ϕ, σ **funcionales lineales** en V y $k \in K$:

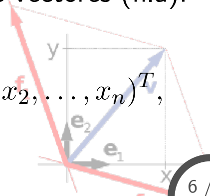
$$(\phi + \sigma)(v) = \phi(v) + \sigma(v) \quad \& \quad (k\phi)(v) = k\phi(v).$$

Al espacio formado por los funcionales lineales se le conoce como el **espacio dual** de V, y se le denota por V^*, el cual tiene la **misma dimensión** que el espacio V.

Ejemplo

Sea $V = K^n$ el espacio de vectores (columnas) de n entradas, entonces el **espacio dual** V^* puede idenficarse con el espacio de vectores (fila):

$$\begin{aligned}
& \phi = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in V^*, \\
\therefore \quad & \phi(v) = \phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T, \\
\Rightarrow \quad & \phi(v) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n.
\end{aligned}$$



Funcionales lineales y espacio dual

Base dual

Teorema Suponiendo que $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una **base** de V sobre K y considerando a $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ **funcionales lineales** definidos como,

$$\phi_i(v_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \rightarrow \quad i = j, \\ 0 & \rightarrow \quad i \neq j, \end{cases}$$

entonces $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\}$ será una base de V^*, que se conoce como **base dual**.

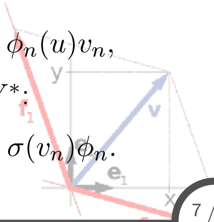
Teorema Sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una **base** de V y $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\}$ la **base dual** de V^*, entonces:

(i) Para cualquier **vector** $u \in V$ se tiene,

$$u = \phi_1(u)v_1 + \phi_2(u)v_2 + \ldots + \phi_n(u)v_n,$$

(ii) Para cualquier **funcional lineal** $\sigma \in V^*$:

$$\sigma = \sigma(v_1)\phi_1 + \sigma(v_2)\phi_2 + \ldots + \sigma(v_n)\phi_n.$$



Funcionales lineales y espacio dual

Base dual

Demostración

Al ser $u \in V$ y $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de V, entonces se puede expresar u como,

$$u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_i v_i + \ldots + a_n v_n,$$

aplicando el funcional lineal ϕ_i a la expresión anterior de u,

$$\phi_i(u) = a_1 \phi_i(v_1) + a_2 \phi_i(v_2) + \ldots + a_i \phi_i(v_i) + \ldots + a_n \phi_i(v_n),$$

pero: $\phi_i(v_j) = \delta_{ij} \quad \Rightarrow \quad \phi_i(u) = a_i \ \ \forall \ \ i = 1, 2, \ldots, n,$

sust. en u: $u = \phi_1(u) v_1 + \phi_2(u) v_2 + \ldots + \phi_n(u) v_n + \ldots + \phi_n(u) v_n.$

Usando el resultado anterior, se aplica el funcional lineal σ:

$$\begin{aligned}\sigma(u) &= \phi_1(u)\sigma(v_1) + \phi_2(u)\sigma(v_2) + \ldots + \phi_i(u)\sigma(v_i) + \ldots + \phi_n(u)\sigma(v_n),\\ &= \left(\sigma(v_1)\phi_1 + \sigma(v_2)\phi_2 + \ldots + \sigma(v_i)\phi_i + \ldots + \sigma(v_n)\phi_n\right)(u),\end{aligned}$$

debido a que u es un vector genérico de V, entonces:

$$\sigma = \sigma(v_1)\phi_1 + \sigma(v_2)\phi_2 + \ldots + \sigma(v_i)\phi_i + \ldots + \sigma(v_n)\phi_n.$$

Funcionales lineales y espacio dual

Base dual

Teorema Sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ **bases** de V y $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\}$ y $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$ **bases duales** de V^* asociadas a $\{v_i\}$ y $\{w_i\}$, respectivamente. Si P es la matriz de **cambio de base** de $\{v_i\}$ a $\{w_i\}$ $\Rightarrow$ $(P^{-1})^T$ será la matriz de **cambio de base** de $\{\phi_i\}$ a $\{\sigma_i\}$.

Demostración

Describiendo la base $\{w_i\}$ en términos de la base $\{v_i\}$,

$$w_i = a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + \ldots + a_{in}v_n,$$

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad \forall \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Funcionales lineales y espacio dual

Base dual

De igual manera, expresando la base dual $\{\sigma_i\}$ en términos de $\{\phi_i\}$:

$$\sigma_i = b_{i1}\phi_1 + b_{i2}\phi_2 + \ldots + b_{in}\phi_n,$$

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{bmatrix} \quad \forall \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{bmatrix},$$

de donde se pueden definir las matrices de cambio de base P y base dual Q como,

$$P = A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad Q = B^T = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & \ldots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \ldots & b_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \ldots & b_{nn} \end{bmatrix}.$$

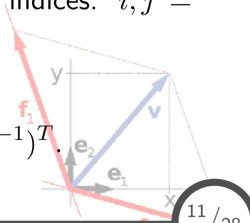
Base dual

Ahora, aplicando el funcional lineal σ_i al vector w_j, mediante sus expresiones respectivas de las bases $\{\phi_i\}$ y $\{v_i\}$:

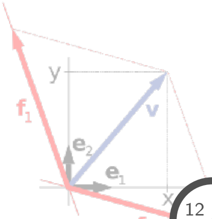
$$\begin{aligned} \sigma_i(w_j) &= \delta_{ij}, \\ \therefore\ \sigma_i(w_j) &= (b_{i1}\phi_1 + b_{i2}\phi_2 + \ldots + b_{in}\phi_n)(a_{j1}v_1 + a_{j2}v_2 + \ldots + a_{jn}v_n), \\ \Rightarrow\ \sigma_i(w_j) &= b_{i1}a_{j1} + b_{i2}a_{j2} + \ldots + b_{in}a_{jn}, \\ &= [a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jn}][b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{in}]^T, \\ &= F_jC_i, \end{aligned}$$

en donde F_j es el $j-$ésimo vector **fila** de P^T y C_i el $i-$ésimo vector **columna** de Q. Corriendo ahora para todos los índices: $i, j = 1, 2, \ldots, n$:

$$\begin{aligned} [F_jC_i] &= [\delta_{ij}] = \mathbb{1}, \\ \forall\ \ [F_jC_i] &= P^TQ \quad \Rightarrow \quad Q = (P^T)^{-1} = (P^{-1})^T. \end{aligned}$$



Contenido: Tema 05



Aniquiladores, transpuesta de un operador

Aniquiladores

Considerando W como un subset de un espacio vectorial V. Un funcional lineal $\phi \in V^*$ se le llama **aniquilador** si,

$$\phi(w) = 0 \;\; \forall \;\; w \in W \quad \Rightarrow \quad \phi(w) = \{0\}.$$

El set de todos los mapeos con tal característica, denotado como W^0, se conoce como **aniquilador de W**, y será un **subespacio** de V^*.

Características

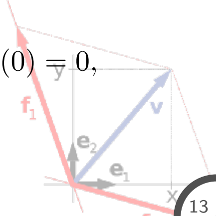
(i) $0 \in W^0$.

(ii) Si $\phi, \sigma \in W^0 \Rightarrow$ para cualquiera escalares $a, b \in K$ y cualquier $w \in W$ se tiene:

$$(a\phi + b\sigma)(w) = a\phi(w) + b\sigma(w) = a(0) + b(0) = 0,$$

$$\therefore \quad a\phi + b\sigma \in W^0,$$

demostrándose que W^0 es un **subespacio** de V^*.



Aniquiladores, transpuesta de un operador

Aniquiladores

Teorema Si se tiene que el espacio vectorial V posee una dimensión finita, y W es un subespacio de V

$$\Rightarrow \quad \text{dim}W + \text{dim}W^0 = \text{dim}V.$$

Demostración

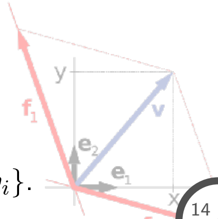
Suponiendo que la $\text{dim}V = n$ y $\text{dim}W = r \leq n$ siendo una **base** de W el set $\{w_1, w_2, \ldots, w_r\}$, entonces decidiendo **extenderla** para que sea una base de V,

$$\{w_1, w_2, \ldots, w_r, v_1, v_2, \ldots, v_{n-r}\}.$$

Ahora, considerando la **base dual** V^* de V,

$$\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_r, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-r}\},$$

siendo $\{\phi_i\}$ la base dual asociada a $\{w_i\}$, y $\{\sigma_i\}$ a $\{v_i\}$.



Aniquiladores, transpuesta de un operador

Aniquiladores

Debido a la definición de base dual,

$$\sigma_i(v_j) = 1 \ \forall \ i = j, \quad \sigma_i(v_j) = 0 \ \forall \ i \neq j,$$

entonces los funcionales $\{\sigma_i\}$ **aniquilarán** cada uno de los $\{w_i\}$,

$$\therefore \quad \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-r} \in W^0,$$

y como $\{\sigma_i\}$ es parte de la base de V^* $\Rightarrow$ sus elementos serán **linealmente independientes**.

Por otro lado, considerando un σ genérico tal que $\sigma \in W^0$,

$$\begin{aligned} \Rightarrow \ \sigma &= \sigma(w_1)\phi_1 + \sigma(w_2)\phi_2 + \ldots + \sigma(w_r)\phi_r + \ldots \\ &\quad \ldots + \sigma(v_1)\sigma_1 + \sigma(v_2)\sigma_2 + \ldots + \sigma(v_{n-r})\sigma_{n-r}, \\ &= \sigma(v_1)\sigma_1 + \sigma(v_2)\sigma_2 + \ldots + \sigma(v_{n-r})\sigma_{n-r}, \end{aligned}$$

es decir, el set $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-r}\}$ **expande** a W^0, por tanto será una **base** W^0 con dimensión:

$$\text{dim}W^0 = n - r = \text{dim}V - \text{dim}W \quad \Rightarrow \quad \text{dim}W^0 + \text{dim}W = \text{dim}V.$$

Aniquiladores, transpuesta de un operador

Transpuesta de un mapeo lineal

Sea $T : V \to U$ un mapeo lineal desde un espacio vectorial V hacia un espacio vectorial U, entonces para cualquier **funcional lineal** $\phi \in U^*$ la **composición** $\phi \circ T$ representará un **mapeo lineal** $V \to K$,

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[rr, bend right, "\phi \circ T"'] & U \arrow[r, "\phi"] & K \end{tikzcd}$$

$\therefore$ se tiene que,

$$\phi \circ T \in V^*.$$

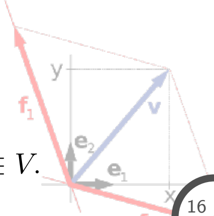
Con lo anterior, se observa que la correspondencia $\phi \to \phi \circ T$ representa un **mapeo** $U^* \to V^*$, ya que $\phi \in U^*$ y $\phi \circ T \in V^*$.

El mapeo anterior se le conoce como la **transpuesta** de T, el cual es **lineal** y se expresa como T^t:

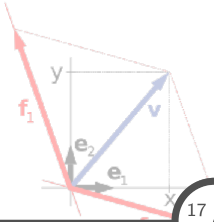
$$T^t : U^* \to V^*,$$

definida como: $\quad T^t(\phi) = \phi \circ T,$

siendo: $\quad \left(T^t(\phi)\right)(v) = \phi\left(T(v)\right) \quad \forall \quad v \in V.$



Contenido: Tema 05



Operadores adjuntos y autoadjuntos

Operadores adjuntos

Para un operador lineal T en un espacio vectorial de producto interno V se dice que tiene un operador **adjunto** $T^\dagger$ en V si,

$$\langle u|T(v)\rangle = \left\langle T^\dagger(u)\middle|v\right\rangle \quad \forall \quad u, v \in V.$$

Para el caso de **representaciones matriciales**:

- Sea A una matriz cuadrada, **real**, de dimensión n, considerada como la representación de un operador en $\mathcal{R}^n \Rightarrow$ para $u, v \in \mathcal{R}^n$:

$$\langle u|Av\rangle = u^T A v = (A^T u)^T v = \left\langle A^T u\middle|v\right\rangle,$$

  $\therefore$ la **transpuesta** de A, dada por A^T, será la **adjunta** de A.

- Sea B una matriz cuadrada, **compleja**, de dimensión n, considerada como la representación de un operador en $\mathcal{C}^n \Rightarrow$ para $u, v \in \mathcal{C}^n$:

$$\langle u|Bv\rangle = u^\dagger B v = (B^\dagger u)^\dagger v = \left\langle B^\dagger u\middle|v\right\rangle,$$

  $\therefore$ la **hermítica conjugada** de B, $B^\dagger$, será la **adjunta** de B.

Operadores adjuntos y autoadjuntos

Operadores adjuntos

Teorema Sea T un operador lineal en un espacio vectorial de producto interno V de dimensión finita sobre $K \Rightarrow$

(i) Existe un **único** operador lineal $T^\dagger$ en V tal que,

$$\langle u|T(v)\rangle = \left\langle T^\dagger(u)\middle|v\right\rangle \quad \forall \quad u, v \in V.$$

(ii) Si A es la representación matricial de T con respecto a alguna base **ortonormal** $S = \{u_i\}$ de $V \Rightarrow$ la representación matricial de $T^\dagger$ en la base S es la **hermítica conjugada** $A^\dagger$.[1]

Teorema Sean T, T_1 y T_2 operadores lineales en V y $k \in K \Rightarrow$

$$(T_1 + T_2)^\dagger = T_1^\dagger + T_2^\dagger, \qquad (kT)^\dagger = k^* T^\dagger,$$
$$(T_1 T_2)^\dagger = T_2^\dagger T_1^\dagger, \qquad (T^\dagger)^\dagger = T.$$

[1] Sólo se cumple cuando la representación matricial de $T^\dagger$ y T es respecto a una base **ortonormal**.

Operadores adjuntos y autoadjuntos

Funcionales lineales y espacios de producto interno

Recordando que un **funcional lineal** ϕ en un espacio vectorial V representa un **mapeo lineal**,

$$\phi : V \to K \ \ \forall \ \ K = \text{campo de escalares},$$

si además V es un espacio vectorial de producto interno $\Rightarrow$ cada $u \in V$ determina un **mapeo**:

$$\hat{u} : V \to K, \quad \text{definido como:} \quad \hat{u}(v) = \langle u|v \rangle .$$

Por tanto, para cualquier $a, b \in K$ y $v_1, v_2 \in V$ se tiene:

$$\hat{u}(av_1 + bv_2) = \langle u|av_1 + bv_2 \rangle = a \langle u|v_1 \rangle + b \langle u|v_2 \rangle = a\hat{u}(v_1) + b\hat{u}(v_2),$$

con lo cual, $\hat{u}$ es un **funcional lineal** de V.

Teorema Sea ϕ un funcional lineal en un espacio vectorial de producto interno V con dimensión finita $\Rightarrow$ existe un **único** vector $u \in V$ tal que,

$$\phi(v) = \langle u|v \rangle \ \ \forall \ \ v \in V.$$

El operador T será **autoadjunto** del espacio vectorial de producto interno V si se cumple,

$$T^{\dagger} = T.$$

Para el caso de representaciones matriciales A del operador,

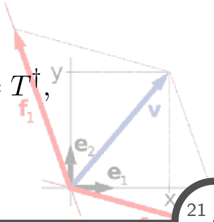
- **Real** $\Rightarrow A$ es **simétrica**.
- **Complejo** $\Rightarrow A$ es **hermítica**.

Teorema Sea λ un eigenvalor de un operador lineal T en V, si T es **autoadjunto** $\Rightarrow \lambda$ será **real**.

Demostración

$$\begin{aligned}
\lambda \langle v|v \rangle &= \langle v|\lambda v \rangle \,, \text{ pero } \; T(v) = \lambda v, \\
&= \langle v|T(v) \rangle \; = \left\langle T^{\dagger}(v) \middle| v \right\rangle \text{ pero } T = T^{\dagger}, \\
&= \langle T(v)|v \rangle \; = \langle \lambda v|v \rangle \; = \lambda^{*} \langle v|v \rangle \,,
\end{aligned}$$

por tanto $\lambda = \lambda^{*} \Rightarrow \lambda$ es **real**.



Operadores adjuntos y autoadjuntos

Operadores autoadjuntos

Teorema Sea T un operador **autoadjunto** en V. Supongamos que u y v son eigenvectores de T perteneciendo a diferentes eigenvalores $\Rightarrow$ u y v serán **ortogonales**: $\langle u|v\rangle = 0$.

Demostración

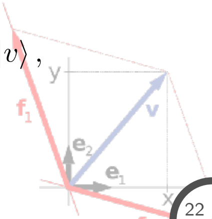
Tenemos que se cumple con:

$$T(u) = \lambda_1 u, \;\; T(v) = \lambda_2 v \;\; \forall \;\; \lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathcal{R},$$

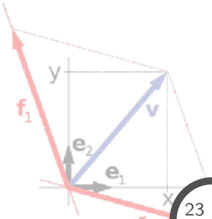
entonces,

$$\begin{aligned} \lambda_2 \langle u|v\rangle &= \langle u|\lambda_2 v\rangle = \langle u|T(v)\rangle, \\ &= \left\langle T^\dagger(u) \middle| v \right\rangle = \langle T(u)|v\rangle = \langle \lambda_1 u|v\rangle, \\ &= \lambda_1 \langle u|v\rangle \quad \text{ya que} \;\; \lambda_1 \in \mathcal{R}, \end{aligned}$$

pero $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \langle u|v\rangle = 0$.



Contenido: Tema 05



Operadores ortogonales y unitarios

Operadores ortogonales y unitarios

Sea U un operador lineal en un espacio vectorial de producto interno V, de dimensión finita $\Rightarrow$ si se tiene:

$$U^\dagger = U^{-1} \text{ ó } UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{1}$$

se dice que el operador es **ortogonal** o **unitario** si se trata de un campo asociado **real** o **complejo**, respectivamente.

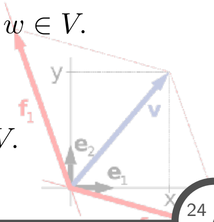
Teorema Las siguientes condiciones son equivalentes,

- $U^\dagger = U^{-1}; UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{1}$
  $\Rightarrow U$ es **unitario** (**ortogonal**).
- U preserva el **producto interno**,

$$\langle U(u)|U(w)\rangle = \langle u|w\rangle \quad \forall \quad u, w \in V.$$

- U preserva la **norma**,

$$\|U(v)\| = \|v\| \quad \forall \quad v \in V.$$



Para el caso de la invariancia del **prod. interno** cuando U es **unitario**,

$$\langle U(u)|U(v)\rangle = \left\langle U^\dagger U(u)\middle|v\right\rangle = \langle \mathbb{1}(u)|v\rangle \,,$$
$$\therefore\ \langle U(u)|U(v)\rangle = \langle u|v\rangle \,.$$

Ahora para la invariancia de la **norma** tenemos:

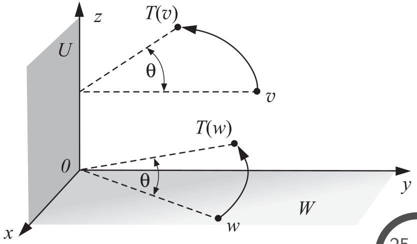
$$\|U(v)\| = \sqrt{\langle U(v)|U(v)\rangle} = \sqrt{\langle U^\dagger U(v)|v\rangle},$$
$$\|U(v)\| = \sqrt{\langle \mathbb{1}(v)|v\rangle} = \sqrt{\langle v|v\rangle} = \|v\|.$$

Ejemplo

Sea $T : \mathcal{R}^3 \to \mathcal{R}^3$ un operador lineal que rota cada vector v sobre el eje z por un ángulo fijo θ,

$T(x, y, z) =$

$(x\text{Cos}\theta - y\text{Sen}\theta, x\text{Sen}\theta + y\text{Cos}\theta, z)$.



Operadores ortogonales y unitarios

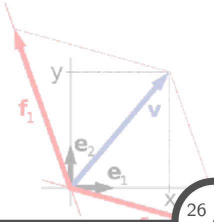
Matrices ortogonales y unitarias

Sea U un operador lineal en un espacio vectorial de producto interno V entonces se tiene:

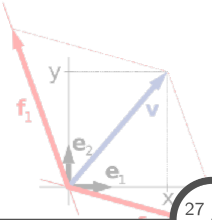
- Una matriz **compleja** A representa a un operador **unitario** U (relativa a una base ortonormal) $\iff A^\dagger = A^{-1}$, donde A se le conoce como matriz **unitaria**.
- Una matriz **real** A representa a un operador **ortogonal** U (relativa a una base ortonormal) $\iff A^T = A^{-1}$, donde A se le conoce como matriz **ortogonal**.

Recordando las características equivalentes de las matrices **unitarias** (**ortogonales**),

- A es una matriz **unitaria** (**ortogonal**).
- Las **filas** de A forman un set **ortonormal**.
- Las **columnas** de A forman un set **ortonormal**.



Contenido: Tema 05



Cambio de bases ortonormales

Teorema Sea $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ una base **ortonormal** de un espacio vectorial de producto interno $V \Rightarrow$ la matriz de **cambio de base** de $\{u_i\}$ a otra base **ortonormal** es **unitaria** (**ortogonal**).

De manera inversa, si $P = [a_{ij}]$ es una matriz **unitaria** (**ortogonal**) $\Rightarrow$ lo sig. representa una base **ortonormal**,

$$u_i' = a_{1i}u_1 + a_{2i}u_2 + \ldots + a_{ni}u_n \quad \forall \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Como las matrices que representan el **mismo** operador T son **similares**,

$$B = P^{-1}AP \quad \forall \quad P = \text{matriz de cambio de base},$$

- Las matrices **complejas** A y B son **unitariamente equivalentes** si existe una matriz **unitaria** P tal que $B = P^{\dagger}AP$.
- Las matrices **reales** A y B son **ortogonalmente equivalentes** si existe una matriz **ortogonal** P tal que $B = P^{T}AP$.